Finanzmathematik

Dr. Wolfgang Böhme

März 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlegende Elemente der Finanzmathematik 3
1.1 Zeit, Kapital, Zahlungen, Finanzströme . . . 3
1.2 Zinszahlungtermine . . . 6
1.3 Zinsperioden . . . 7

2 Zinsen und Zinssätze. Berechnungsmethoden 10
2.1 Einfache Verzinsung . . . 11
2.1.1 Umrechnung von Jahreszinssätze in unterjährige Zinssätzen . . . 12
2.1.2 Verwenden des Jahreszinssatzes bei unterjährigen Zinsperioden . . . 13
2.1.3 Zinsberechnung für aneinandergereihte ungleiche Zinsperioden bei einer unterjährigen Laufzeit . . . 15
2.1.4 Kapitalbildung bei einfacher Verzinsung . . . 17
2.2 Exponentielle Verzinsung . . . 19
2.2.1 Jährliche Zinsperioden mit konstantem Jahreszinsatz . . . 19
2.2.2 Zinsberechnung bei unterjährigen Zinsperioden . . . 20
2.2.3 Umrechnung von Jahreszinssätze in unterjährige Zinssätzen . . . 21
2.2.4 Zinsberechnung für aneinandergereihte ungleiche Zinsperioden in eine unterjährigen Laufzeit . . . 23
2.2.5 Gemischte Verzinsung . . . 26
2.2.6 Kapitalbildung bei exponentieller Verzinsung . . . 27
2.2.7 Vergleich einfache und exponentielle Verzinsung . . . 28
2.3 Stetige Verzinsung . . . 29
2.3.1 Zinssatz und stetiger Zinssatz - jährliche und überjährige Verzinsung . . . 31
2.3.2 Zinssatz und stetiger Zinssatz - unterjährige Verzinsung . . . 32

3 Rentenrechnung 34
3.1 Akkumulationsprozesse . . . 34
3.2 Konstante Ratenzahlungen - Zinszahlungen und Ratenzahlungen erfolgen erfolgen am Ende der Zinsperiode . . . 35
3.2.1 vorschüssige Renten . . . 35
3.2.2 nachschüssige Renten . . . 39
3.2.3 Ewige Renten . . . 41
3.3 Konstante Ratenzahlungen - Anzahl der Zinsperiode und der Ratenzahlungen stimmen nicht überein . . . 42
3.4 dynamische Renten . . . 45
3.4.1 dynamische Renten mit veränderlichen Zinssatz . . . 45
3.4.2 dynamische Renten mit veränderlicher Rate . . . 47

4 Tilgungsrechnung 51
4.1 Tilgung einer Schuld in gleichen Tilgungsraten - Ratentilgung . . . 52
4.1.1 Zinsperiode und Tilgungsperiode stimmen überein . . . 52
4.1.2 Zinsperiode stimmen nicht mit der Tilgungsperiode überein . . . 55
4.2 Tilgung einer Schuld in gleichen Annuitäten - Annuitätentilgung . . . 57
4.2.1 Zinsperiode und Tilgungsperiode stimmen überein . . . 57
4.2.2 Tilgungsperiode stimmen nicht mit der Zinsperiode überein . . . 61
4.3 Aufschläge bei der Tilgung einer Schuld . . . 63
4.4 Änderung der Rückzahlungsbedingungen bei der Tilgung einer Schuld . . . 65

5 Anhang **69**
5.1 Dynamische Renten 69
5.1.1 arithmetisch steigende Renten 69
5.1.2 geometrisch steigende Renten 70

Kapitel 1

Grundlegende Elemente der Finanzmathematik

1.1 Zeit, Kapital, Zahlungen, Finanzströme

In diesem Buch [Wie18] und siehe [Hul01]verstehen wir unter Finanzmathematik die mathematische Beschreibung der Bewertung und Entwicklung eines Geldbetrages (im weiteren Kapital genannt) zu unterschiedlichen Zeitpunkten oder Zeitdauern. Schon daraus ergeben sich zwei wichtige Grundelemente: der Geldbetrag (das Kapital) und die Zeit. Es ist bekannt, dass ein und derselbe Geldbetrag wesentlich davon abhängt, zu welchem Zeitpunkt er betrachtet (bewertet) wird. Nehmen wir an, Sie haben die Möglichkeit, einen Betrag – sagen wir von 1000 EUR – heute oder erst in einem Jahr zu erhalten. Wahrscheinlich werden Sie sich für den Betrag zum heutigen Zeitpunkt entscheiden. Egal, wie die Dinge sich entwickeln, werden die 1000 EUR heute kaum dem Betrag in einem Jahr entsprechen. Dafür sprächen folgende Überlegungen:

- Niemand weiß, ob sich die Dinge so verschlechtern, und der Geber des Geldbetrages in einem Jahr überhaupt noch in der Lage sein wird, 1000 EUR zu zahlen. Wir nennen das „Ausfallrisiko des Geldgebers".
- In der Regel führen Inflation zur Abwertung des Geldbetrages. D.h. 1000 EUR sind heute wahrscheinlich mehr wert als in einem Jahr. Sie können für ein und denselben Geldbetrag heute mehr Waren und Dienstleistungen kaufen als in einem Jahr. Die Abwertung ist jedoch keine abgemachte Sache, es kann durchaus auch zu einer Aufwertung kommen. Auf jedem Fall müssen Sie mit der Veränderung der Bewertung des Geldbetrages zu einem anderen Zeitpunkt rechnen.
- Wenn sie bereits heute über 1000 EUR verfügen, können Sie das Geld anlegen, z.B. als Festgeld für 1 Jahr oder in einjährige Staatsanleihen und werden nach einem Jahr wahrscheinlich über mehr Geld verfügen als über 1000 EUR. Aber auch hier kann der Fall nicht ausgeschlossen werden, dass die Bank ihrer Verpflichtung nicht nachkommen kann, oder der Staat die Anleihen mit entsprechenden Zinsen nicht zurückzahlen kann.
- Ein weiterer Risikofaktor wäre das Wechselkursrisiko. Wenn Sie beispielsweise eine Urlaubsreise in einem Jahr in die USA planen und bereits heute für erhaltenen 1000 EUR sagen wir 1200 USD kaufen (Wechselkurs 1 EUR = 1,20 USD). Die gleiche Transaktion ein Jahr später kann ganz anders aussehen. Entweder erhalten sie mehr oder weniger USD, je nachdem, wie sich der Wechselkurs entwickelt.

Vielleicht finden Sie noch andere Gründe dafür, dass ein und derselbe Geldbetrag heute oder zu einem anderen Zeitpunkt sich unterscheiden können. An dieser Stelle ist es wichtig, dass wir das Kapital zeitabhängig betrachten müssen. Wenn wir das Kapital (eine gewissen Geldbetrag) mit K bezeichnen, macht es Sinn dem Kapital einen Zeitstempel zu verpassen. Mit K_t bezeichnen wir das Kapital K zum Zeitpunkt t. Betrachtet man das Kapital zu unterschiedlichen Zeitpunkten (bezeichnen wir mit t_1 und t_2), so beträgt das Kapital zum Zeitpunkt t_1 : K_{t_1} und zum Zeitpunkt t_2 : K_{t_2}. Die Veränderung des Kapitalbetrages zwischen zwei benachbarten Zeitpunkten wird mit $\Delta = K_{t_2} - K_{t_1}$ wenn $t_2 > t_1$ ist. Zum besseren Verständnis macht es Sinn, die Kapitalbeträge auf einer Zeitachse abzutragen. Gehen wir zunächst davon aus, dass der Zeitpunkt t_1 vor dem Zeitpunkt t_2 liegt ($t_1 < t_2$). Die Zeitpunkte lassen sich dann auf der Zeitachse t abtragen.



Der Auslöser einer Kapitaländerung kann unterschiedlicher Natur sein. Einige Beispiele wären: ein Zahlungseingang bzw. -ausgang, Zinszahlungen. Im weiteren werden wir den Auslöser einer Kapitaländerung Transaktion nennen und mit A bzw. mit A_i, wenn es sich um mehrere handelt, bezeichnen. Da Transaktionen immer zu bestimmten Zeitpunkten stattfinden, werden wir auch die Transaktionen mit einem Zeitstempel versehen: A_t bzw. A_{it}. Die Summe aller Transaktionen zum Zeitpunkt t, egal mit welchem Vorzeichen, werden wir kurz mit A_t bezeichnen, also als eine (aggregierte) Tansaktion betrachten.

$$A_t = \sum_{i=1}^{n_t} A_{it} \tag{1.1}$$

$$n_t - Anzahl\, der\, Transaktionen\, zum\, Zeitpunkt\, t \tag{1.2}$$

Der Kapitalbetrag K_t zum Zeitpunkt t kann errechnet werden aus dem Kapitalbetrag K_{t_1}, welcher sich in der Folge der letzen Transaktion(en) zum Zeitpunkt t_1 ergeben hat und aller Transaktionen im Zeitpunkt t:

$$K_t = K_{t_1} + \sum_{i=1}^{n_t} A_{it} \tag{1.3}$$

$$K_t = K_{t_1} + A_t \tag{1.4}$$

Grafisch dargestellt ergibt sich folgendes Bild:



Beispiel 1:

Auf einem Girokonto werden folgende Transaktionen getätigt:

- am 5. Februar wird eine Überweisung von 300 EUR getätigt.
- am 10. Februar werden 500 EUR am Geldautomaten abgehoben.
- am 20. Februar erfolgt eine Gutschrift von 1000 EUR und es wird eine Überweisung von 200 EUR getätigt.

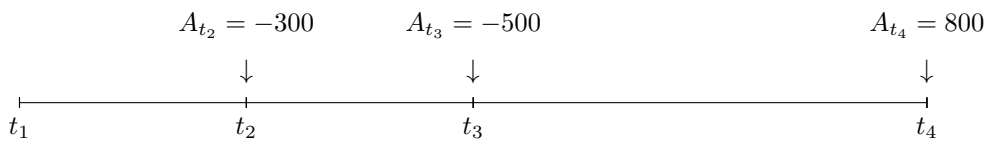
Das Guthaben (Kapital) am 1.Februar betrug 800 EUR. Auf unserer Zeitachse sind damit folgende Zeitpunkte zu betrachten:

- t_1 : 1. Februar
- t_2 : 5. Februar
- t_3 : 10. Februar
- t_4 : 20. Februar

Die entsprechenden Transaktionen sind dann:

$$A_{t_2} = -300\, EUR$$
$$A_{t_3} = -500\, EUR$$
$$A_{t_4} = 1000\, EUR - 200\, EUR = 800\, EUR$$

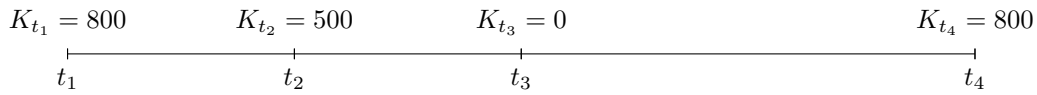
in grafischer Form:



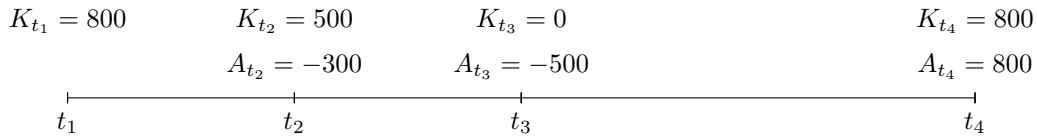
Das Guthaben zu den Zeitpunkten beträgt dann:

$$
\begin{aligned}
K_{t_1} &= 800\,EUR \\
K_{t_2} &= K_{t_1} + A_{t_2} = 800\,EUR - 300\,EUR = 500\,EUR \\
K_{t_3} &= K_{t_2} + A_{t_3} = 500\,EUR - 500\,EUR = 0\,EUR \\
K_{t_4} &= K_{t_3} + A_{t_4} = 0\,EUR + 800\,EUR = 800\,EUR
\end{aligned}
$$

In grafischer Form:



Oder in einer gemeinsamen Grafik dargestellt. Dadurch wird deutlich, dass Transaktionen zu Kapitalveränderungen führen.



Eine Folge von Transaktionen A_{t_i} bzw. eine Folge von Kapitalvolumina K_{t_i} werden Finanzströme genannt und sind Gegenstand weiterer Untersuchungen.

Selbstverständlich sind Finanzströme nicht nur bei der Kontobewegung zu finden. Weitere Beispiele wären:

- eine Folge von Zahlungen zur Tilgung eines Kredites oder Mietzahlungen
- Periodisch wiederkehrende Zahlungen wie Zinserträge oder Mieteinnahmen
- Kauf und Verkauf von Wertpapieren

Nicht nur gleichbleibende Zahlungen oder Erträge sind möglich, sondern auch sich ständig ändernde Beträge können berücksichtigt werden. Im vorhergehenden Beispiel wurde die Historie von Transaktionen betrachtet. Genauso großes Interesse haben auch zukünftige Zahlungen. Wichtig in jedem Fall ist die Tatsache, dass nach jeder Transaktion der Wert des Kapitals sich ändert.

Eine besondere Rolle in Finanzströmen spielen die Zinsen. Bekanntlich werden für das zeitweise Überlassen von Geldbeträgen Zinsen gezahlt, die häufig als Preis für die befristete zur Verfügungsstellung von Geld aufgefasst wird. Allein die Tatsache, das jemand über Geld verfügt, gibt ihm die Möglichkeit durch zeitweise Überlassung eines Geldbetrages, Geld zu verdienen. Eine im Kapitalismus übliche Praxis, die

jedoch moralisch zu zumindest sehr fraglich ist. So gibt es durchaus andere Modelle des Geldverleihens, wie z.B im Islamic Banking, wo finanzielle Vergütung des Geldverleihes nicht praktiziert wird.

Die Interpretation der Zinsen als Preis für die zeitweise Überlassung eines Geldbetrages auch unter kapitalistischen Verhältnissen greift zu kurz. Das Verleihen von Geld kann für den Geldgeber auch negative Folgen haben. So muß er damit rechnen, dass widrige Umstände es möglich machen, dass der Geldbetrag nicht oder nur teilweise zurückgezahlt werden kann. Diese Möglichkeit wird als Ausfallrisiko des Kreditnehmers bezeichnet und muss bei der Zinsbestimmung berücksichtigt werden. Ein weiterer Aspekt sind Verluste durch Inflation. Ein Geldbetrag von heute ist allein wegen der Inflation nicht gleichwertig zu einem späteren Zeitpunkt. In Zeiten knappen Geldes kann die Knappheit die Zinsen hochtreiben und ein Niveau erreichen lassen, dass nicht mehr den üblichen Marktbedingungen entspricht.

Im Rahmen dieses Buches werden wir nicht der politökonomischen Natur der Zinsen nachgehen, sondern uns mit Methoden der Zinsberechnung beschäftigen.

Da zu ist es notwendig, einige Voraussetzungen zu treffen:

- Keine Inflation
- Keine Knappheit von Geld
- Keine Ausfallrisiken

1.2 Zinszahlungtermine

Bevor wir uns ausführlich mit Zinsberechnungen beschäftigt werden, müssen noch einige grundsätzliche Begriffe und Abmachungen besprochen werden. Wie bereits gesagt, werden für das Überlassen von Geldbeträgen für einen gewissen Zeitraum Zahlungen fällig, die wir Zinsen nennen wollen. Der Prozess des Geldverleihs kann aus zweierlei Sicht betrachtet werden: vom Standpunkt des Begünstigten sind Zinsen an den Gläubiger zu entrichten. Der Gläubiger selbst zahlt nicht, sondern erhält Zinszahlungen. In diesem Sinne sind die Zinszahlungen - ob als Zahler oder Empfänger - Transaktionen , wie sie im Kapitel Abschnitt 1.1 behandelt wurden. Aus der Sicht des Gläubigers verlassen die Zinszahlungen entweder das System der Kapitalbewegungen (die Zinsen werden an den Gläubiger ausgezahlt) oder die Zinsen werden dem Kapital zugeschlagen wodurch sich praktisch das überlassenen Kapital erhöht. Aus der Sicht des Begünstigten sind Zinszahlungen zu erbringende Leistungen für die Überlassung des Kapitals, die entweder ausgezahlt werden oder die Schuld zumindest zeitweise erhöhen. Die Zinszahlung erfolgt zu einem bestimmten Termin, den wir **Zinszahlungstermin** nennen. Es ist zu vereinbaren, wann und wie die Zinszahlungen erfolgen, und in welcher Höhe sie anfallen. Letzteres ist Gegenstand der Zinsberechnung (siehe Hauptabschnitt Kapitel 2 . Grundsätzlich sind zwei Möglichkeiten der Zinszahlungen möglich:

- Die Zahlung erfolgt **einmalig** für den gesamten Zeitraum, für den das Geld überlassen wurde (*Überlassungszeitraum* oder *Laufzeit*). Die Zahlung kann am Anfang, am Ende oder zu einem vorher definierten Zeitpunkt erfolgen. Selbstverständlich wird die Höhe der Zinsen davon abhängen, wann die Zinszahlung erfolgt.
- Der Zeitraum, für den das Geld überlassen wurde (*Laufzeit*), wird in einige - in der Regel gleichgroße - Zeitabschnitte unterteilt und die Zinsen für jeden dieser Abschnitte separat gezahlt. Auch hier kann der genaue Termin der Zinszahlungen variiert werden. In der Regel erfolgen die Zahlung am Ende der jeweiligen Zeitabschnittes, möglich sind aber auch andere Termine, wie z.B. zu Beginn deZeitabschnittes. Wichtig ist jedoch, es erfolgen **mehrere Zinszahlungen**. Ein typisches Beispiel wäre bei einem Überlassungszeitraum von 10 Jahren, die Unterteilung der gesamten Periode in 10 einjährige Zeitabschnitte. Für jedes Jahr erfolgt eine separate Zinszahlung, wobei zu klären ist, wann diese Zahlung erfolgen, z.B. am Ende jedes Zeitabschnittes.

Versuchen wir die Finanzströme für beide Fälle grafisch zu illustrieren. Die Zinszahlungen erfolgen jeweils am Ende jedes Zeitabschnittes.

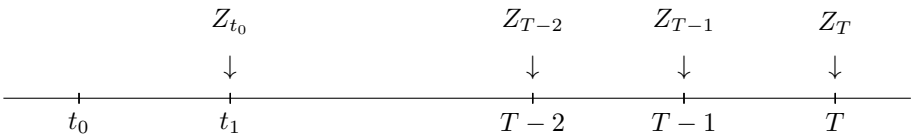
Eine Zahlung



Dabei bezeichnen:

t_0	Beginn des Überlassungszeitraums
T	Ende des Überlassungszeitraums
Z_T	Zinszahlung

Mehrere Zahlungen



Dabei bezeichnen:

t_0	Beginn des Überlassungszeitraums
t_1	erster Zinszahlungstermin
...	...
$T-1$	vorletzter Zinszahlungstermin
T	letzter Zinszahlungstermin
Z_t	Zinszahlung zum Zeitpunkt t

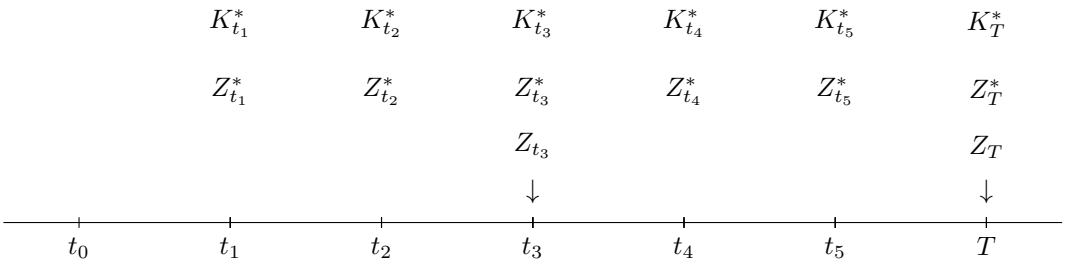
Zinszahlungen erfolgen zu jeden Zinszahlungstermin. Es ist nun zu klären, wie die Zinsen berechnet werden.

1.3 Zinsperioden

Die Periode, für die die Berechnung der Zinsen zu Grunde liegt, wird als**Zinsperiode** bezeichnet. Zinszahlungstermine können in ein und der selben Zinsperiode stattfinden (müssen es aber nicht) Sehr häufig trifft es zu, dass Zinszahlungen am Ende oder am Anfang einer Zinsperiode auftreten. Alle diese Möglichkeiten werden am Beispiel illustriert.

1. Die Anzahl der Zinszahlungen ist kleiner als die Anzahl der Zinsperioden hat mehrere Zinsperioden:

Nehmen wir an, die Zinsen werden jährlich berechnet, die Zinszahlungen erfolgen jedoch aller 3 Jahre. Der Überlassungszeitraum beträgt 6 Jahre. Damit erfolgen 2 Zinszahlungen und am Ende der Zinsperioden werden die Zinsen akkumuliert, wobei die jährlichen Zinsen gemäß der Berechnungsvorschrift für Zinsen der jeweiligen Zinsperiode durchgeführt werden.



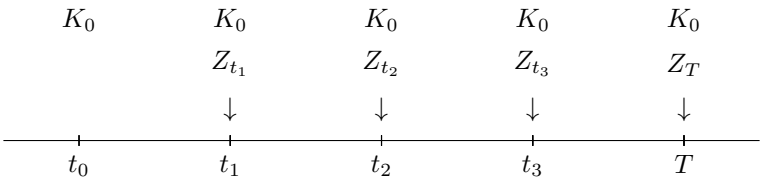
Dabei bezeichnen:

t_0	Beginn der ersten Zinsperiode (t_0, t_1)
t_1	Ende der ersten Zinsperiode (t_0, t_1) und Beginn der zweiten Zinsperiode (t_1, t_2)
t_2	Ende der zweiten Zinsperiode (t_1, t_2) und Beginn der dritten Zinsperiode (t_2, t_3)
...	...
$t_6 = T$	Ende der letzten Zinsperiode (t_5, t_6) und Ende des Überlassungszeitraums
t_3	1. Zinszahlungstermin
(T)	2. Zinszahlungstermin
$Z_{t_1}*$	Zinsen für die Zinsperiode (t_0, t_1)
$Z_{t_2}*$	Zinsen für die Zinsperiode (t_1, t_2)
...	...
$Z_{t_6}*$	Zinsen für die Zinsperiode (t_5, t_6)
Z_{t_3}	1. Zinszahlung
Z_T	2. Zinszahlung
K_{t_0}	Kapital zum Zeitpunkt t_0 (Anfangskapital)
K_t	Kapital zum Zeitpunkt t

Die Zinsen für die Perioden (t_0, t_1),(t_1, t_2) und (t_2, t_3) bzw. (t_3, t_4),(t_4, t_5) und (t_5, t_6)werden berechnet, aber nicht ausgezahlt. Sie werden akkumuliert zu Z_{t_3} und Z_T und gemeinsam zum Zinszahlungsterminen (t_3) und (T)ausgezahlt. Am Ende des Überlassungszeitraumes wird das überlassene Kapital K_{t_0} dem Gläubiger zurückerstattet.

2. Zinsperiode hat mehrere Zinszahlungstermine:

Die Zinsperiode betrage 1 Jahr, Zinszahlungen sind halbjährlich durchzuführen. Der Überlassungszeitraum möge 2 Jahre sein. Insgesamt sind 4 Zinszahlungen fällig.



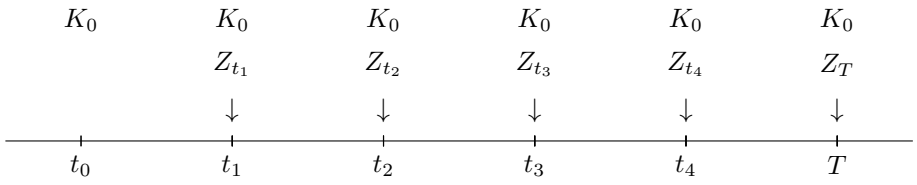
Dabei bezeichnen:

t_0	Beginn der ersten Zinsperiode (t_0, t_2)
t_2	Ende der ersten Zinsperiode (t_0, t_2) und Beginn der zweiten Zinsperiode (t_2, T)
T	Ende der zweiten Zinsperiode (t_2, T) und Ende des Überlassungszeitraums
(t_1)	1. Zinszahlungstermin
(t_2)	2. Zinszahlungstermin
...	...
(T)	4. Zinszahlungstermin
Z_{t_1}	1. Zinszahlung
Z_{t_2}	2. Zinszahlung
...	...
Z_T	4. Zinszahlung
K_{t_0}	Kapital zum Zeitpunkt t_0 (Anfangskapital), t_1, t_2, t_3 und T

Die Zinsberechnung erfolgt am Ende jeder Zinsperiode. Das Kapital ändert sich nicht, da zu den Zinszahlungsterminen die Zinsen ausgezahlt werden.

3. Zinszahlungen erfolgen am Ende jeder Zinsperiode:

Ein Kapital wird jährlich verzinst (Zinsperiode ist ein Jahr). Die Zinszahlungen erfolgen ebenfalls am Ende des Jahres (Zinszahlungen erfolgen am Ende der jeweiligen der Zinsperiode). Der Überlassungszeitraum beträgt 5 Jahre:



Dabei bezeichnen:

t_0	Beginn der ersten Zinsperiode (t_0, t_1)
t_1	Ende der ersten Zinsperiode (t_0, t_1) und Beginn der zweiten Zinsperiode (t_1, t_2)
...	...
T	Ende der letzten Zinsperiode (t_4, T) und Ende des Überlassungszeitraums
Z_{t_1}	1. Zinszahlung für die Zinsperiode (t_0, t_1)
Z_{t_2}	2. Zinszahlung für die Zinsperiode (t_1, t_2)
...	...
Z_T	letzte Zinszahlung für die Zinsperiode (t_4, T)
K_{t_0}	Kapital zum Zeitpunkt t_0 (Anfangskapital), t_1, t_2, t_3, t_4 und T

Kapitel 2

Zinsen und Zinssätze. Berechnungsmethoden

Zur Berechnung der Zinsen werden folgende Werte benötigt:

1. die Dauer der Zinsperiode
2. die Höhe des überlassenen Kapitals (kurz Kapital)
3. der Zinssatz

Die Dauer der Zinsperiode errechnet man aus dem End- und Anfangszeitpunkt der Zinsperiode. Bezeichnet man mit t_0 den Beginn der Zinsperiode und mit t_1 das Ende der Zinsperiode ($t_1 > t_0$), so ist die Dauer oder Länge der Zinsperiode aus der Differenz beider Zeitpunkte auf der Zeitskala zu berechnen:

$$\Delta t = t_1 - t_0$$

Die Höhe des zu verzinsenden Kapitals zu Beginn der Zinsperiode wird wie bisher mit K_{t_0} bezeichnet. Der Zinssatz ist notwendig, um die Höhe der Zinsen in Abhängigkeit von der Höhe des Kapitals K_{t_0} und der Dauer der Zinsperiode Δt zu berechnen. Der Zinssatz (bezeichnet mit i) gibt den prozentualen Anteil für die Überlassung des Kapitals in der Höhe $K = 1$ für die Dauer der Zinsperiode (t_0, t_1) an. Mit anderen Worten: Der Zinssatz i sind die Zinsen Z, die ein Kapital in der Höhe von 1 ($K = 1$) in der Zinsperiode (t_0, t_1) erwirtschaftet. Für die Überlassung vom Kapital K_{t_0} für die Dauer Δt müssen Zinsen Z im Umfang vob $K_{t_0} \cdot i$ gezahlt werden. Allgemein gilt:

$$Z = K \cdot i \tag{2.1}$$

Das beschrieben Prinzip der Zinsberechnung impliziert, dass der Zinssatz i speziell für die Dauer der Zinsperiode anzugeben ist. Das würde bedeuten: Sollen 2000 EUR für 2,5 Monaten überlassen werden, benötigen wir einen "2,5 - Monatszinssatz"', um die Zinsen als Anteil vom Kapital berechnen zu können. Grundsätzlich ist das möglich, aber nicht üblich. In der Regel wird ein Jahreszinssatz i_{Jahr} oder ein Monatszinssatz, aus dem sich dann die Höhe des Zinssatzes für jede Zinsperiode ableiten lässt.

Wir müssen folglich unterscheiden, für welche Zinsperiode der Zinssatz angegeben ist. Im Idealfall entspricht der Zinssatz der Zinsperiode, z.B der Jahreszinssatz für eine Zinsperiode von 1 Jahr oder der Monatszinssatz für eine Zinsperiode von einem Monat. Wenn das nicht der Fall ist, ist entweder ein Verfahren anzuwenden, dass die Nutzung anderer Zinsperioden als für den gegebenen Zinssatz ermöglicht oder der Zinssatz ist der Dauer der Zinsperiode anzupassen. Beide Wege sollen beschritten werden.

Entsprechen Zinssatz der Dauer der Zinsperiode, kann die Berechnung der Zinsen für eine Zinsperiode durch die einfache Formel:

$$Z = K \cdot i$$

erfolgen. Dabei ist K das Kapital zu Beginn der Zinsperiode, i der zinsperiodenspezifische Zinssatz.

Schwieriger wird es, wenn Zinssatz nicht der Dauer der Zinsperiode entspricht. Bevor wir uns diesem Fall zuwenden, muss die Berechnung der Zinsen diskutiert werden, wenn Anzahl der Zinszahlungen nicht mit de Anzahl der Zinsperioden übereinstimmen. Wenn die Zinszahlung aus mehreren Zinsperioden zu einer Zinszahlung zum Zinszahlungstermin aggregiert werden, ist zu beachten, dass die in einer Zinsperiode aufgelaufenen Zinsen dem Kapital zugeschlagen werden müssen, da sie nicht der Auszahlung unterliegen. Die dahinterliegende Theorie der Zinsberechnung wird als **Zinseszinsrechnung** oder **exponentielle Verzinsung** bezeichnet. Im Unterschied dazu erfolgt die Zinsberechnung innerhalb einer Zinsperiode, sofern der Zinssatz der Dauer dieser Zinsperiode entspricht, ohne Zinseszinseffekt und wird **einfache Verzinsung** genannt. Beide Methoden sind Gegenstand des nächsten Abschnittes.

2.1 Einfache Verzinsung

Wir betrachten einige typische Fälle, wo die einfache Verzinsung zur Anwendung kommt.

1. Zinsperiode und Überlassungszeitraum sind identisch.
2. Der Überlassungszeitraum in eine Reihe - häufig gleichlanger - Zinsperioden unterteilt. Am Ende (oder zu Beginn) der Zinsperiode finden Zinszahlungen statt. Wichtig dabei ist, dass die Zinsen ausgezahlt werden und nicht am Ende der Zinsperiode dem Kapital zugeschlagen werden.
3. Der Überlassungszeitraum (die Laufzeit) ist nicht größer als ein Jahr. Auch hier findet die einfache Verzinsung Anwendung, wenn - wie oft üblich - ein Jahreszinssatz zur Anwendung kommt.

Es werden zwei weitere Annahmen getroffen, die jedoch später wieder aufgehoben werden.

1. Der Zinssatz entspricht der Länge der Zinsperiode
2. Der Zinssatz ist konstant für die gesamte Laufzeit

Beispiele:

1. Die Laufzeit und die einzige Zinsperiode betragen 1 Jahr. Gegeben ist der Jahreszinssatz.
2. Der Laufzeit beträgt 3 Jahre, die Zinsperioden dauern jeweils 1 Jahr. Gegeben ist ein Jahreszinssatz. Die Zinszahlungen erfolgen am Ende jeder Zinsperiode.
3. Die Laufzeit beträgt 1 Jahr. Die Länge jeder Zinsperiode ist ein Halbjahr. Gegeben ist der Halbjahreszinssatz. Die Zinszahlungen erfolgen nach jeder Zinsperiode (also halbjährig)

Für jede Zinsperiode j werden die ZinsenZ_j gemäß dem Vorgehen der einfachen Verzinsung berechnet:

$$Z_j = K \cdot i \tag{2.2}$$

Am Ende jeder Zinsperiode erfolgt die Auszahlung der Zinsen. Bei mehreren Zinsperioden werden die Zinsen nicht dem Kapital zugeschlagen, da vereinbarungsgemäß jede Zinsperiode mit einer Zinszahlung verbunden ist. Die Zinsen werden ausgezahlt. Das Kapital ist in jeder Zinsperiode konstant.

Berechnen wir die Zinsen für die Beispiele . Der Jahreszinssatz beträgt für die Beispiele 1 und 2 5% für das Beispiel 3 ist der Halbjahreszinssatz von $2,5\%$ gegeben, das Kapital habe die Höhe von 1000 EUR:

1. $Z = K \cdot i = 1000 \cdot 0,05 = 50$
   Die einmalige Zinszahlung beträgt 50 EUR.
2. $Z_j = K \cdot i = 1000 \cdot 0,05 = 50,\ j = 1,2,3$
   Die 3 Zinszahlungen betragen jeweils 50 EUR
3. $Z_j = K \cdot i = 1000 \cdot 0,025 = 25,\ j = 1,2$
   Die 2 Zinszahlungen betragen jeweils 25 EUR und werden halbjährlich gezahlt. Im praktischen Bankgeschäft ist es durchaus möglich, dass an Stelle der 2 Zinszahlung eine Zinszahlung im Umfang von 50 EUR erfolgt.

Die einfache Verzinsung wird häufig dann verwendet, wenn die Länge der Zinsperiode nicht länger als ein Jahr ist. Ist die Zinsperiode kürzer als ein Jahr spricht man von **unterjährigen Verzinsung**.

Die Auszahlung erfolgt im praktischen Bankgeschäft häufig nach mehreren unterjährigen Zinsperioden, was methodisch nicht unproblematisch ist. Schließlich fallen die Zinsen nach jeder unterjährigen Zinsperiode an und sollten deshalb in den nachfolgenden Zinsperioden bis die Auszahlung erfolgt ebenfalls verzinst werden.

Wir gehen davon aus, das der Zinssatz der Dauer der Zinsperiode entspricht. Ist das jedoch nicht der Fall kommen zwei Vorgehensweisen zun tragen:

1. Umrechnen des gegebenen Zinssatzes in einen Zinssatz, der der Länge der Zinsperiode entspricht.
2. Nutzung des gegebenen Zinssatzes, auch wenn er nicht der der Länge der Zinsperiode entspricht und modifizieren der Berechnungsformel.

Im Bankgeschäft ist es üblich, Jahreszinssätze (Bezeichnung $i_{p/a}$ oder wenn nicht anders vereinbart i) zu verwenden, auch dann, wenn die Zinsperiode unterjährig ist. Grundsätzlich kann jede beliebige Länge der Zinsperiode gewählt werden. Wie das geschehen kann, wird später betrachtet. Dazu sind einige weitere Vereinbarungen zu treffen. Es sind folgende unterjährige Zinsperioden bzw. Zinssätze üblich:

- halbjährliche Zinsperiode bzw. Halbjahreszinssatz (Bezeichnung $i_{\frac{1}{2}}$)
- vierteljährliche Zinsperiode bzw. Vierteljahreszinssatz (Bezeichnung $i_{\frac{1}{4}}$)
- monatliche Zinsperiode bzw. Monatszinssatz (Bezeichnung $i_{\frac{1}{12}}$)
- Zinsperode dauert ein Tag bzw. Tageszinssätze (Bezeichnung unter bestimmten Bedingungen $i_{\frac{1}{360}}$)

Die Bezeichnung basiert auf dem Vorgehen in [Wie18], wo dass Jahr in Abhängigkeit von der Betrachtungsweise in mehrere gleich lange Zeitintervalle unterteilt wird. Die Anzahl aller Zeitintervalle eines Jahres in [Wie18] als **Basis** bezeichnet. So gilt:

- bei halbjährlichen Zinsperioden ist die Basis =2
- bei vierteljährlichen Zinsperioden ist die Basis =4
- bei monatlichen Zinsperioden ist die Basis =12
- dauert Zinsperiode ein Tag ist die Basis =360

Die letztere Bezeichnung basiert auf der Tatsache, dass die Dauer eines Jahres mit 360 Tagen festgelegt wird. Ausführlicher dazu siehe Unterabschnitt 2.1.2

Allgemein bezeichnet man den unterjähriger Zinssatz für eine Zinsperiode, wenn die Zinsperiode aus m Zeitintervallen bei einer gegebenen Basis besteht, mit $i_{\frac{m}{Basis}}$.

So bezeichnet beispielsweise $i_{\frac{7}{12}}$ den Zinssatz für eine Zinsperiode von sieben Monaten, wobei als Basis 12 gewählt wird. Eine andere Darstellungsweise für den Zinssatz einer Zinsperiode von 7 Monaten wäre $i_{\frac{210}{360}}$, wobei die Basis dann allerdings 360 ist. Der Zinssatz bezieht sich auf eine Periode von 210 Tagen, was 7 Monaten entspricht. Dabei wird unterstellt, dass ein Monat genau 30 Tage hat.

2.1.1 Umrechnung von Jahreszinssätze in unterjährige Zinssätzen

Die Umrechnungsformeln kann allgemein folgendermaßen formuliert werden:

$$i_{\frac{1}{m}} = \frac{i}{m} \tag{2.3}$$

$$i = i_{\frac{1}{m}} \cdot m \tag{2.4}$$

Dabei ist m die Anzahl von unterjährigen Zinsperioden eines Jahres. Für die halb-, vierteljährigen und Monatszinsen gilt:

$$i_{\frac{1}{2}} = \frac{i}{2}$$
$$i_{\frac{1}{4}} = \frac{i}{4}$$
$$i_{\frac{1}{12}} = \frac{i}{12}$$

Selbstverständlich können auch nicht standardisierte unterjährige Zinssätze, wie z.B. ein Zweimonatszinssatz (Bezeichnung $i_{\frac{1}{6}}$, da ein Jahr aus 6 Zweimonatsperioden besteht) berechnet werden.

$$i_{\frac{1}{6}} = \frac{i}{6}$$

Beispiel:

Der Jahreszinssatz i beträgt 6%. Wie lauten die entsprechenden Halbjahres-, Vierteljahres-, Monats- und Zweimonatszinssätze und die entsprechenden Zinsen?

Die unterjährigen Zinssätze:

$$i_{\frac{1}{2}} = \frac{0,06}{2} = 0,03$$
$$i_{\frac{1}{4}} = \frac{0,06}{4} = 0,015$$
$$i_{\frac{1}{12}} = \frac{0,06}{12} = 0,005$$
$$i_{\frac{2}{12}} = \frac{0,06}{6} = 0,01$$

Die Zinsen je Zinsperiode:

$$Z_{\frac{1}{2}} = 1000 \cdot 0,03 = 30$$
$$Z_{\frac{1}{4}} = 1000 \cdot 0,0015 = 15$$
$$Z_{\frac{1}{12}} = 1000 \cdot 0,005 = 5$$
$$Z_{\frac{2}{12}} = 1000 \cdot 0,01 = 10$$

2.1.2 Verwenden des Jahreszinssatzes bei unterjährigen Zinsperioden

Wir verwenden zunächst standardisierte Längen der Zinsperioden: halb- oder vierteljährliche bzw. monatliche Zinsperioden. Die Zinsberechnung ist simpel nach folgenden Formeln:

$$Z_{\frac{1}{2}} = K \cdot \frac{1}{2} \cdot i$$
$$Z_{\frac{1}{4}} = K \cdot \frac{1}{4} \cdot i$$
$$Z_{\frac{1}{12}} = K \cdot \frac{1}{12} \cdot i$$

Dabei werden die Zinsen für halb- oder vierteljährliche bzw monatliche Zinsperioden mit $Z_{\frac{1}{2}}$,$Z_{\frac{1}{4}}$ und $Z_{\frac{1}{12}}$ bezeichnet.
in Anlehnung an
In analoger Weise können auch Zinsen für ableitbare Zinsperioden, z.B. eine Zinsperiod4 von 2 Monaten berechnet werden:

$$Z_{\frac{2}{12}} = K \cdot \frac{2}{12} \cdot i$$

Beispiel:

Es sind die Zinsen für die Zinsperioden von einem halben Jahr, einem Vierteljahr, einem Monat von zwei Monaten zu berechnen, wenn der Jahreszinssatz 6% und das Kapital 1000 EUR betragen:

$$Z_{\frac{1}{2}} = 1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,06 = 30$$
$$Z_{\frac{1}{4}} = 1000 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,06 = 15$$
$$Z_{\frac{1}{12}} = 1000 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,06 = 5$$
$$Z_{\frac{2}{12}} = 1000 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,05 = 10$$

Bei nichtstandardisierten Zinsperioden verwenden wir die Anzahl der Tage einer Zinsperiode. Hier müssen weitere Absprachen getroffen werden. Wieviel Tage eine Zinsperiode hat, hängt von der sogenannten **"day count convention"** ab. Neben der korrekten Zählweise der Tage für die Monate (Januar: 31 Tage, Februar 28 oder 29 Tage usw.) und fürs Jahr (365 oder 366 Tage) - wir schreiben dafür aktuell oder abgekürzt *act* - werden häufig Vereinfachungen hingenommen (z.B. jeder Monat hat 30 Tage und das Jahr 360 Tage). Es sind noch andere Kombinationen üblich:

day count convention	*Tage im Monat*	*Tage im Jahr*
30/360	30	360
30/365	30	365
act/360	*variabel*	360
act/365	*variabel*	365
act/*act*	*variabel*	*variabel*

Illustrieren wir das Vorgehen für die Zinsperiode (1.1-30.6.) in einem Schaltjahr. Die Zinsperiode hat exakt 182 Tage (Januar:31 Tage, Februar :29 Tage, März: 31 Tage, April:30 Tage, Mai: 31 Tage, Juni: 30Tage). Die Zahl der Tage in der "day count convention"variiert in Abhängigkeit der getroffen Vereinbarung.

day count convention	*Tage im Monat*	*Tage im Jahr*	$1.1 - 30.6$
30/360	30	360	180/360
30/365	30	365	180/365
act/360	*variabel*	360	182/360
act/365	*variabel*	365	182/365
act/*act*	*variabel*	*variabel*	182/366

ein weiteres Beispiel: 1.2.-31.3. (kein Schaltjahr) - 59 Tage
Kapital: 100 EUR

Zinssatz: 0,05

day count convention	*Tage im Monat*	*Tage im Jahr*	1.2-31.3.	*Zinsen of*
30/360	30	360	180/360	$60/360 * 5EUR = 0,833EUR$
30/365	30	365	180/365	$60/365 * 5EUR = 0,822EUR$
act/360	*variabel*	360	59/360	$59/360 * 5EUR = 0,819EUR$
act/365	*variabel*	365	59/365	$59/365 * 5EUR = 0,808EUR$
act/*act*	*variabel*	*variabel*	59/365	$59/365 * 5EUR = 0,808EUR$

2.1.3 Zinsberechnung für aneinandergereihte ungleiche Zinsperioden bei einer unterjährigen Laufzeit

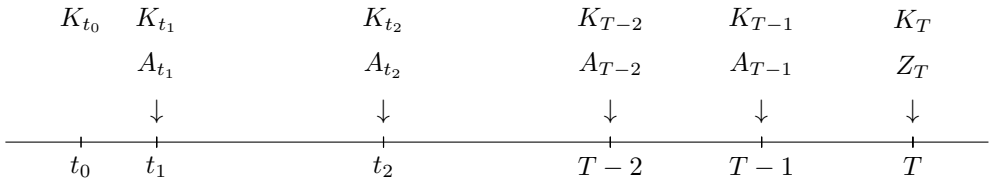
Bisher gingen wir von gleichlangen Zinsperioden aus. Das ist für viele Finanzprodukte der Fall, es gibt aber auch viele Beispiele mit unterschiedlich langen, aneinandergereihten Zinsperioden.

Ein typischer Fall ist die Zinsberechnung in Girokonten der Kreditinstitute. Es erfolgen regelmäßig Ein- und Auszahlingen, die dazu führen, dass das Guthaben bei jeder Transaktion wechselt und dann für einen oder mehrere Tage konstant bleibt. Die Zeitdauer, in der das Guthaben unverändert bleibt, bildet eine Zinsperiode. Vom Beginn bis zum Ende des Abrechnungszeitraumes reiht sich eine Zinsperiode an die andere. Am Ende des Abrechnungszeitraums - in der Regel ist es ein Vierteljahr - berechnet das Kreditinstitut die aufgelaufenen Zinsen. Bei einem Guthaben ergeben sich Guthabenzinsen, es können aber auch Sollzinsen anfallen, wenn das Konto zeitweise oder durchgehend im Minus ist.

Der Finanzstrom eines Girokontos in einem Abrechnungszeitraum kann als Folge von unterschiedlich langen aneinander gereihten Zinsperioden aufgefasst werden. Die Dynamik des Finanzstromes wird durch Transaktionen ausgelöst, wodurch sich die Höhe des zu verzinsenden Kapitals ständig ändert und für gewisse Zeit konstant bleibt. Bezeichnet man die Zeitpunkte der Guthabensänderungen mit t_i mit $i = 1, 2, ..., T$, so kann eine Folge von (T-1) Zinsperioden gebildet werden:

$$(t_1, t_2), (t_2, t_3), ..., (T-2, T-1), (T-1, T)$$

Oder grafisch dargestellt:



Dabei bezeichnen:

t_0	Beginn der ersten Zinsperiode (t_0, t_1)
t_1	Ende der ersten Zinsperiode (t_0, t_1) und Beginn der zweiten Zinsperiode (t_1, t_2)
t_2	Ende der zweiten Zinsperiode (t_1, t_2)
$T-2$	Beginn der vorletzten Zinsperiode $(T-2, T-1)$
$T-1$	Ende der vorletzten Zinsperiode $(T-2, T-1)$ und Beginn der letzten Zinsperiode $(T-1, T)$
T	Ende der letzten Zinsperiode $(T-1, T)$
A_{t_1}	Transaktion zum Zeitpunkt t_1
A_{t_2}	Transaktion zum Zeitpunkt t_2
A_{T-2}	Transaktion zum Zeitpunkt $T-2$
A_{T-1}	Transaktion zum Zeitpunkt T_1
Z_T	Zinszahlung für die Periode (t_1, T) zum Zeitpunkt T
K_{t_0}	Guthaben zum Zeitpunkt t_0 (Anfangsguthaben)
K_{t_1}	Guthaben zum Zeitpunkt t_1
K_{t_2}	Guthaben zum Zeitpunkt t_2
K_{T-2}	Guthaben zum Zeitpunkt T_2
K_{T-1}	Guthaben zum Zeitpunkt $T-1$
K_T	Guthaben zum Zeitpunkt T

Anmerkung: In der Grafik sind für jeden Zeitpunkt nur eine Transaktion angegeben. Sollten mehrere Transaktionen vorliegen, sind diese als Aggregate verschiedener Transaktionen zu verstehen.

Das Kapital ändert sich zum Zeitpunkt der Transaktion(en):

$$K_{t_{j+1}} = K_{t_j} + A_{t_{j+1}} \tag{2.5}$$

Die Berechnung der Zinsen am Ende jeder Zinsperiode (t_j, t_{j+1}) erfolgt durch folgende Formel, wobei üblicherweise der Jahreszinssatz i gegeben ist:

$$Z_{(t_j,t_{j+1})} = K_{t_j} \cdot \frac{\Delta_{(t_j,t_{i+j})}}{\Delta_{Jahr}} \cdot i \tag{2.6}$$

Dabei bezeichnen:

$Z_{(t_j,t_{j+1})}$	Zinsen für die Zinsperiode (t_j, t_{j+1})
K_{t_j}	Kapital am Beginn der Zinsperiode (t_j, t_{j+1})
$\Delta_{(t_j,t_{j+1})}$	Dauer der Zinsperiode (t_j, t_{j+1}) in Tagen gemäß der gewählten *day count convention*
Δ_{Jahr}	Dauer eines Jahres in Tagen gemäß der gewählten *day count convention*
i	Jahreszinssatz

In der Bankpraxis werden häufig die Zinsen nicht ausgezahlt und auch nicht dem Kapital zugeschlagen. Damit wird die Kapitaländerung ausschließlich durch die Transaktionen ausgelöst, die Zinsen bleiben zunächst unberücksichtigt. Alternativ könnte man die Zinsen dem Kapital zuschlagen und mit verzinsen. Dieses Vorgehen werden im Abschnitt Abschnitt 2.2 diskutieren.

Das in den Kreditinstitute praktizierte Vorgehen ist aus meiner Sicht nicht korrekt, dem Kreditinstitut werden zusätzliche Einnahmen ermöglicht. So wird bei der Abrechnung der Girokonten die sogenannte *Staffelmethode* angewandt. Die Zinsen werden für jede Zinsperiode wie oben beschrieben berechnet, aber nicht dem Kapital zugeschrieben. Am Ende des Abrechnungszeitraums T werden die Zinsen jeder Zinsperiode addiert zu einer aggregierten Zinszahlung:

$$Z_T = \sum_{j=1}^{n} Z_{(t_j,t_{j+1})}$$

Dabei ist n die Anzahl der Zinsperioden im Abrechnungszeitraum.

Am Beispiel der Kontobewegungen eines Girokontos innerhalb eines Jahres sollen die besprochenen Vorgehensweisen (die Staffelmethode) illustriert werden.

Beispiel

Für das vierte Quartal eines Jahres finden folgende Kontobewegungen statt:

11.10. Einzahlung von 1500,00 EUR
19.11. Einzahlung von 300,00 EUR
Überweisung von 450 EUR
15.12. Abhebung vom Geldautomaten 500,00 EUR

Daraus ergeben sich folgende Transaktionen:

$t_1 = 11.10.$ $A_1 = 1500,00$ EUR
$t_2 = 19.11.$ $A_2 = -150,00$ EUR
$t_3 = 15.12.$ $A_3 = -500,00$ EUR

Zu Beginn des Abrechnungszeitraum, am 1.10., beträgt das Guthaben 10000,00 EUR.
Das Bankguthaben - ohne Zinsen beträgt dann:

$t_0 = 1.10.$ $K_0 = 10000,00$ EUR
$t_1 = 11.10.$ $K_1 = 11500,00$ EUR
$t_2 = 19.11.$ $K_2 = 11350,00$ EUR
$t_3 = 15.12.$ $K_3 = 10850,00$ EUR
$t_4 = 31.12.$ $K_4 = 10850,00$ EUR

Zinsberechnung erfolgt zunächst für jede Zinsperiode separat. Der Jahreszinssatz für die Guthabenverzinsung beträgt 2%. Der Zinsberechnung liegt die *day count convention* 30/360 zu Grunde.

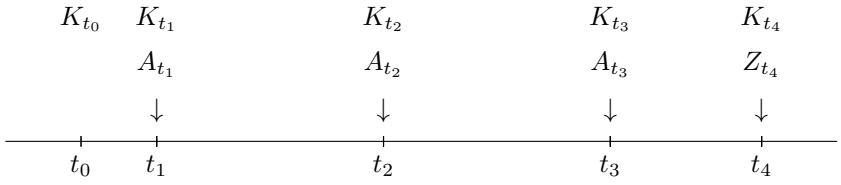
$$
\begin{aligned}
Z_{t_0,t_1} &= 10000 \cdot \frac{10}{360} \cdot 0,02 = 5,56 \\
Z_{t_1,t_2} &= 11500 \cdot \frac{39}{360} \cdot 0,02 = 24,92 \\
Z_{t_2,t_3} &= 11350 \cdot \frac{26}{360} \cdot 0,02 = 16,39 \\
Z_{t_3,t_4} &= 10850 \cdot \frac{15}{360} \cdot 0,02 = 9,04
\end{aligned}
$$

Nach der Staffelmethode werden die Zinsen für alle Zinsperioden addiert und dann dem Kapital am Quartalsende zugeschlagen:

$$
\begin{aligned}
Z_{t_4} &= Z_{t_0,t_1} + Z_{t_1,t_2} + Z_{t_2,t_3} + Z_{t_3,t_4} = \\
&= 5,56 + 24,92 + 16,39 + 9,04 = \\
&= 55,91 \\
K_{t_4} &= 10850,00 + 55,91 = 10905,91
\end{aligned}
$$

Korrekterweise müssten die Zinsbeträge der jeweiligen Höhe des Kapitals zugeschrieben werden. Dann ist ebenfalls die Zinsberechnung zu korrigieren, da ihr eine modifizierte Höhe des Kapitals zu Grunde liegt. Es werden praktisch Zinsen auf die Zinsen berechnet. Das Beispiel wird fortgesetzt im Abschnitt Zinseszinsrechnung.

Im Falle der Staffelmethode ergibt sich folgende Darstellung:



2.1.4 Kapitalbildung bei einfacher Verzinsung

Kapitalbildung bei einfacher Verzinsung bedeutet, dass die Zinsen dem Kapital zugeschlagen werden. Das Kapital nach einer oder mehreren Zinszahlungen ist damit immer größer als das Ausgangskapital. Bei nur einer Zinsperiode gilt:

$$K_{t_1} = K_{t_0} + Z_{(t_0,t_1)} = K_{t_0} + K_{t_0} \cdot i = K_{t_0} \cdot (1 + i)$$

Bezeichnungen:

K_{t_0}	Ausgangskapital zum Zeitpunkt $t = t_0$
K_{t_1}	Endkapital zum Zeitpunkt $t = t_1$
$Z_{(t_0,t_1)}$	Zinsen für die Zinsperiode (t_0, t_1)
i	Zinssatz für die Dauer der Zinsperiode (t_0, t_1)

Das akkumulierte Kapital K_{t_1} wird in der Finanzmathematik **Endwert** und das Anfangskapital K_{t_0} **Barwert genannt** genannt.

Den Ausdruck $q = (1 + i)$ nennt man **Aufzinsfaktor**, den Ausdruck $\frac{1}{q} = \frac{1}{1+i}$ **Abzinsfaktor** bzw. **Diskontfaktor**. Damit kann geschrieben werden:

$$K_{t_1} = K_{t_0} \cdot q$$
$$K_{t_0} = K_{t_1} \cdot \frac{1}{q}$$

Ist der Zinssatz nicht für die Dauer der Zinsperiode gegeben, ist er entsprechend Unterabschnitt 2.1.1 zu bestimmen.

Bei mehr als einer, aber gleichlanger Zinsperioden (Anzahl ist gleich m) modifiziert sich die Formel folgendermaßen:

$$K_{t_m} = K_{t_0} + \sum_{j=1}^{m} Z_{(t_{j-1},t_j)} \tag{2.7}$$
$$= K_{t_0} \cdot (1 + m \cdot i) \tag{2.8}$$

Bezeichnungen:

K_{t_0}	Ausgangskapital zum Zeitpunkt $t = t_0$
K_{t_m}	Endkapital zum Zeitpunkt $t = t_m$ (oder Endwert)
$Z_{(t_{j-1},t_j)}$	Zinsen für die Zinsperiode (t_{j-1}, t_j)
i	Zinssatz für die Dauer der Zinsperiode (t_{j-1}, t_j)

Mit Hilfe der Auf- und Abzinsfaktoren kann kurz geschrieben werden:

$$K_{t_m} = K_{t_0} \cdot q$$
$$K_{t_0} = K_{t_m} \cdot \frac{1}{q}$$
$$q = (1 + m \cdot i)$$
$$\frac{1}{q} = \frac{1}{(1 + m \cdot i)}$$

Sind die Zinssätze für jede Periode nicht konstant modifizeren sich die Formeln:

$$K_{t_m} = K_{t_0} + \sum_{j=1}^{m} Z_{(t_{j-1},t_j)}$$
$$= K_{t_0} + \sum_{j=1}^{m} K_{t_0} \cdot i_j$$
$$= K_{t_0} \cdot (1 + \sum_{j=1}^{m} i_j)$$

Dabei bezeichnet i_j den für die Zinsperiode (t_{j-1}, t_j) spezifischen Zinssatz.

Mit Hilfe der Auf- und Abzinsfaktoren kann kurz geschrieben werden;

$$
\begin{aligned}
K_{t_m} &= K_{t_0} \cdot q \\
K_{t_0} &= K_{t_m} \cdot \frac{1}{q} \\
q &= (1 + \sum_{j=1}^{m} i_j) \\
\frac{1}{q} &= \frac{1}{(1 + \sum_{j=1}^{m} i_j)}
\end{aligned}
$$

Es lässt sich der "durchschnittliche konstante Zinssatz" herleten, indem man die Endwerte mit konstantem Zinssatz ($K_{t_0} \cdot (1 + m \cdot i)$ und bei variablen Zinssatz $K_{t_0} \cdot (1 + \sum_{j=1}^{m} i_j)$ gleichsetzt.

$$
\begin{aligned}
K_{t_0} \cdot (1 + m \cdot i) &= K_{t_0} \cdot (1 + \sum_{j=1}^{m} i_j) \\
(1 + m \cdot i) &= (1 + \sum_{j=1}^{m} i_j) \\
i &= \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^{m} i_j
\end{aligned}
$$

Der durchschnittliche konstante Zinssatz entspricht folglich dem arithmetischen Mittel der variablen Zinssätze.

Als Beispiel seien Bundesschatzbriefe vom Typ A angeführt. Die Laufzeit beträgt 6 Jahre, die Zinsperiode hat die Dauer eines Jahre. Die Zinszahlungen erfolgen am Ende der jeweiligen Zinsperiode. Die Zinssätze steigen jährlich und betragen zur Zeit $0,5\%$, 1%, $1,5\%$, 2%, $2,25\%$, $2,75\%$.

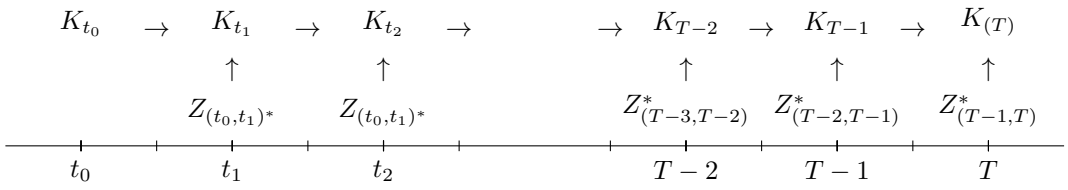
2.2 Exponentielle Verzinsung

Im Unterschied zur einfachen Verzinsung werden bei der exponentiellen Verzinsung die aufgelaufenen Zinsen ebenfalls verzinst. Voraussetzung dafür ist, dass mehrere Zinsperioden vorliegen . Dabei ist es unwesentlich, wie lang eine Zinsperiode dauert. Auch in unterjährigen Zinsperioden kann die exponentielle Verzinsung zum Tragen kommen.

2.2.1 Jährliche Zinsperioden mit konstantem Jahreszinsatz

Zum besseren Verständnis gehen wir zunächst davon aus, dass der Überlassungszeitraum bzw, die Laufzeit mehrere Jahre dauert. Am Ende der Laufzeit erfolgt **eine** Zinszahlung. Die Zinsperiode hat die Dauer eines Jahres. Der Überlassungszeitraum ist in n einjährige Zinsperioden unterteilt. Gegeben sei ein konstanter Jahreszinssatz.
Die Zinsberechnung erfolgt nachschüssig. Das bedeutet, die in jeder Zinsperiode aufgelaufenen Zinsen werden am Ende der Zinsperiode dem Kapital zugefügt. Wir bezeichnen deshalb die dem Kapital zugeführten Zinsen mit Z^* im unterschied zu den ausgezahlten Zinsen Z. Das neu berechnete Kapital, vermehrt um die Zinsen für die abgelaufene Zinsperiode, bildet dann die Grundlage für die Zinsberechnung der nächsten Zinsperiode.

Zunächst werden die Finanzströme für dieses vereinfachte Vorgehen grafisch dargestellt:



Dabei bezeichnen:

t_0	Beginn der ersten Zinsperiode (t_0, t_1)
t_1	Ende der ersten Zinsperiode (t_0, t_1) und Beginn der Zinsperiode (t_1, t_2)
t_2	Ende der ersten Zinsperiode (t_1, t_2) und Beginn der Zinsperiode (t_2, t_3)
$T-2$	Ende der ersten Zinsperiode $(T-3, T-2)$ und Beginn der vorletzten Zinsperiode $(T-2, T-1)$
$T-1$	Ende der vorletzten Zinsperiode $(T-2, T-1)$ und Beginn der letzten Zinsperiode $(T-1, T)$
T	Ende der letzten Zinsperiode $(T-1, T)$ (Ende des Überlassungszeitraums)
$Z^*_{(t_{j-1}, t_j)}$	Zinsberechnung für die Zinsperiode (t_{j-1}, t_j)
K_{t_0}	Anfangskapital
K_{t_j}	Kapital zum Zeitpunkt t_j
K_T	Endkapital zum Zeitpunkt T

Betrachten wir nun die Kapitalbildung im beginnend mit der **ersten** Zinsperiode. Die Zinsen und Kapital werden folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned} Z^*_{(t_0,t_1)} &= K_{t_0} \cdot i \\ K_{t_1} &= K_{t_0} + Z^*_{(t_0,t_1)} = K_{t_0} + K_{t_0} \cdot i = K_{t_0} \cdot (1+i) \end{aligned}$$

Für die **letzte** Zinsperiode:

$$\begin{aligned} Z^*_{(T-1,T)} &= K_{T-1} \cdot i \\ K_T &= K_{T-1} + Z^*_{(T-1,T)} = K_{T-1} + K_{T-1} \cdot i = K_{T-1} \cdot (1+i) = K_{t_0} \cdot (1+i)^n \end{aligned}$$

Es wird ersichtlich, dass die Verzinsung exponentiell mit dem konstanten Wachstumstempo i erfolgt. Analog zur einfachen Verzinsung fassen wir den Ausdruck $(1+i)$ als Aufzinsfaktor und $\frac{1}{(1+i}$ als Abzinsfaktor einer Zinsperiode auf:

$$q = (1+i) \tag{2.9}$$

$$\hat{q} = \frac{1}{q} = \frac{1}{(1+i)} \tag{2.10}$$

K_T ist der **Endwert** des Kapitalbildungsprozesses, K_{t_0} bildet das Anfangskapital oder den **Barwert**. Der Zusammenhang zwischen Barwert und Endwert zeigen die folgenden Formeln:

$$K_T = K_{t_0} \cdot q^n \tag{2.11}$$

$$K_{t_0} = K_T \cdot \frac{1}{q^n} = K_T \cdot \hat{q} \tag{2.12}$$

Mit q^n bezeichnen wir den **Aufzinsfaktor**, mit $\hat{q} = \frac{1}{q^n}$ den **Abzinsfaktor** oder **Diskontfaktor** für n Perioden.

2.2.2 Zinsberechnung bei unterjährigen Zinsperioden

Bisher erfolgte die Zinsberechnung auf der Grundlage von Zinsperioden der Dauer eines Jahres. Nun soll die Zinsberechnung auf der Basis von unterjährigen Zinsperioden betrachtet werden.

Ein Kapital sei unterjährig verzinst (m Zinsperioden pro Jahr), die Laufzeit beträgt mehrere Jahre (Anzahl der Jahre ist gleich n), die Zinsen werden am Ende jeder Zinsperiode dem Kapital zugeführt und erhöhen damit die Zinsen für die nachfolgende Zinsperiode. Gegeben sei der periodenspezifische Zinssatz

$i_{Zinsperiode}$. In der Regel werden halbjährige, vierteljährige, monatliche und tägliche Zinsperioden verwendet. Für letzter verwenden wir die "day count convention" 30/360. In Abhängigkeit von der Dauer der Zinsperiode werden folgende periodenspezifische Zinssätze verwendet: $i_{\frac{1}{2}}$,$i_{\frac{1}{4}}$, $i_{\frac{1}{12}}$ und $i_{\frac{1}{360}}$ oder allgemein $i_{\frac{1}{m}}$.

Das Endkapital berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
K_1 &= K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{m}})^m \\
K_2 &= K_1 \cdot (1 + i_{\frac{1}{m}})^m = K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{m}})^{2m} \\
... &= ... \\
K_n &= K_{n-1} \cdot (1 + i_{\frac{1}{m}})^m = K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{m}})^{nm}
\end{aligned}$$

Nach m_0 Zinsperioden beträgt das akkumulierte Kapial $K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{m}})^{m_0}$.

Beispiel

Ein Kapital von 10000 EUR wird vierteljährlich verzinst. Der Vierteljahreszinssatz beträgt 2%. Die Laufzeit sei 5 Jahre:

$$\begin{aligned}
K_5 &= K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{4}})^{5 \cdot 4} \\
K_5 &= 10000 \cdot (1 + 0,02)^{5 \cdot 4} \\
K_5 &= 14859,47
\end{aligned}$$

Am Ende des Überlassungszeitraums beträgt das kumulierte Kapital 14859,47 EUR. Nach 3 Jahren und 3 Vierteljahren beläuft sich da akkumulierte Kapital auf $K_{3\frac{3}{4}} = K_0 \cdot ((1 + i_{\frac{1}{4}})^{3 \cdot 4 + 3} = 10000 \cdot 1,02^{15} = 13458,68$.

Wie im nächsten Unterabschnitt gezeigt wird entspricht der Vierteljahreszinssatz von 2% nicht dem Jahreszinssatz von $4 \cdot 2\% = 8\%$.

2.2.3 Umrechnung von Jahreszinssätze in unterjährige Zinssätzen

In Analogie zum Vorgehen bei einfacher Verzinsung stellt sich die Frage, wie jährliche Zinssätze in unterjährige Zinssätze umgerechnet werden können. Zunächst gehen wir von standardisierten unterjährigen Zinsperioden aus: Monate, Quartale, Halbjahre. Die unterjährigen Zinssätze werden wie im Falle der einfachen Verzinsung mit $i_{\frac{1}{12}}$, $i_{\frac{1}{4}}$ und $i_{\frac{1}{2}}$ bezeichnet.

Am Beispiel des Quartalszinssatzes soll die Umrechnung erläutert werden. Die Verzinsung erfolgt am Ende jedes Quartals, die Zinsen werden dem Kapital zugeschrieben:

$$\begin{aligned}
Z_1 &= K_0 \cdot i_{\frac{1}{4}} \\
K_1 &= K_0 + Z_1 = K_0 + K_0 \cdot i_{\frac{1}{4}} = K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{4}}) \\
Z_2 &= K_1 \cdot i_{\frac{1}{4}} \\
K_2 &= K_1 + Z_2 = K_1 + K_1 \cdot i_{\frac{1}{4}} = K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{4}})^2 \\
K_3 &= K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{4}})^3 \\
K_4 &= K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{4}})^4
\end{aligned}$$

K_4 ist das kummulierte Kapital nach 4 Quartalen oder nach einem Jahr:

$$\begin{aligned} K_4 &= K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{4}})^4 \\ K_4 &= K_0 \cdot (1 + i) \\ K_0 \cdot (1 + i) &= K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{4}})^4 \\ i &= (1 + i_{\frac{1}{4}})^4 - 1 \end{aligned}$$

Allgemein kann geschrieben werden:

$$K_m = K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{m}})^m = K_0 \cdot (1 + i) \tag{2.13}$$

$$K_0 \cdot (1 + i) = K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{m}})^m \tag{2.14}$$

Die Umrechnung vom unterjährigen Zinssatz $i_{\frac{1}{m}}$ in den Jahreszinssatz i erfolgt nach folgender Formel:

$$i = (1 + i_{\frac{1}{m}})^m - 1 \tag{2.15}$$

Respektiv gilt für den Monats- und Halbjahreszinsatz :

$$\begin{aligned} i &= (1 + i_{\frac{1}{2}})^2 - 1 \\ i &= (1 + i_{\frac{1}{12}})^{12} - 1 \end{aligned}$$

Umgekehrt kann der Jahreszinssatz i in den unterjährigen Zinssatz $i_{\frac{1}{m}}$ umgerechnet werden:

$$i_{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{(1 + i)} - 1 \tag{2.16}$$

Beispiel

Ein Betrag von 10000 EUR soll monatlich zu einem Zinssatz von 0,5% ein Jahr lang verzinst werden.

1. Welcher Betrag wurde zum Jahresende erwirtschaftet?
2. Wie hoch ist der entsprechende Jahreszinssatz?
3. Wie hoch wäre der Betrag am Jahresende, wenn die Verzinsung einfach erfolgt würde?
4. Wie hoch ist unter Bedingung der einfachen Verzinsung der Jahreszinssatz?

Für die exponentielle Verzinsung gilt:

$$\begin{aligned} K_{12} = K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{12}})^{12} = 10000 \cdot (1 + 0,005)^{12} = 10.616,77 \\ i = ((1 + i_{\frac{1}{12}})^{12}) - 1 = (1 + 0,005)^{12} - 1 = 0,0617 \end{aligned}$$

Im Unterschied dazu die einfache Verzinsung:

$$K_{12} = K_0 \cdot (1 + i \cdot 12) = 10000 \cdot (1 + 0,06 \cdot 12) = 10600,00$$
$$i = i_{\frac{1}{12}} \cdot 12 = 0,005 \cdot 12 = 0,06$$

Im Falle der exponentiellen Verzinsung wird ein höherer Betrag erwirtschaftet ($16,77 EUR$) und der Jahreszinssatz liegt höher ($6,17\%$ gegenüber 6%).

2.2.4 Zinsberechnung für aneinandergereihte ungleiche Zinsperioden in eine unterjährigen Laufzeit

Wir greifen noch einmal das Beispiel für unterjährige Verzinsung im Unterabschnitt Unterabschnitt 2.1.3 auf und zeigen, wie unter Verwendung der Zinseszinsen eine korrekte Zinsberechnung erfolgen kann.

Beispiel

Für das vierte Quartal eines Jahres finden folgende Kontobewegungen statt:

11.10.	Einzahlung von 1500,00 EUR
19.11.	Einzahlung von 300,00 EUR
	Überweisung von 450 EUR
15.12.	Abhebung vom Geldautomaten 500,00 EUR

Daraus ergeben sich folgende Transaktionen:

$t_1 = 11.10.$ $A_{t_1} = 1500,00$
$t_2 = 19.11.$ $A_{t_2} = -150,00$
$t_3 = 15.12.$ $A_{t_3} = -500,00$

Zu Beginn des Abrechnungszeitraum, am 1.10., beträgt das Guthaben 10000,00 EUR ($K_{t_0} = 10000,00$). Das Bankguthaben - ohne Zinsen beträgt dann:

$t_0 = 1.10.$ $K_{t_0} = 10000,00$ EUR
$t_1 = 11.10.$ $K_{t_1} = K_{t_0} + A_{t_1} = 10000 + 1500 = 11500,00$
$t_2 = 19.11.$ $K_{t_2} = K_{t_1} + A_{t_2} = 11500 - 150 = 11350,00$
$t_3 = 15.12.$ $K_{t_3} = K_{t_2} + A_{t_3} = 11350 - 500 = 10850,00$
$t_4 = 31.12.$ $K_{t_4} = K_{t_3} = 10850,00$ EUR

Die Zinsberechnung erfolgt bei der Staffelmethode für jede Zinsperiode separat. Der Jahreszinssatz für die Guthabenverzinsung beträgt 2%. Für die unterjährigen Zinsperioden werden die Zinsen nach einfacher Zinsberechnung bestimmt. Der Zinsberechnung liegt die *day count convention* 30/360 zu Grunde. Danach werden die Zinsen addiert und als Gesamtbetrag dem Endbetrag gut geschrieben.

$$Z_{t_0,t_1} = K_{t_0} \cdot \frac{t_1 - t_0}{360} = 10000 \cdot \frac{10}{360} \cdot 0,02 = 5,56$$
$$Z_{t_1,t_2} = K_{t_1} \cdot \frac{t_2 - t_1}{360} = 11500 \cdot \frac{39}{360} \cdot 0,02 = 24,92$$
$$Z_{t_2,t_3} = K_{t_2} \cdot \frac{t_3 - t_2}{360} = 11350 \cdot \frac{26}{360} \cdot 0,02 = 16,39$$
$$Z_{t_3,t_4} = K_{t_3} \cdot \frac{t_4 - t_3}{360} = 10850 \cdot \frac{15}{360} \cdot 0,02 = 9,04$$

$$Z(t_0,t_4) = Z_{t_0,t_1} + Z_{t_1,t_2} + Z_{t_2,t_3} + Z_{t_3,t_4} = 5,56 + 24,92 + 16,39 + 9,04 = 55,91$$
$$K_{t_4} + Z(t_0,t_4) = 10850,00 + 55,91 = 10905,91$$

Das Endkapital nach der Staffelmethode beträgt 10905,91 EUR.

Korrekterweise müssten die Zinsbeträge der jeweiligen Höhe des Kapitals zugeschrieben werden. Werden die Zinsen nicht ausgezahlt und dem Kapital zugeschlagen, muss das Kapital $K_{t_{j+1}}$ nach der Zinsberechnung zum Zeitpunkt t_{j+1} um die aufgelaufenen Zinsen $Z_{(t_j,t_{j+1})}$ erhöht werden:

$$K^*_{t_{j+1}} = K^*_{t_j} + Z^*_{(t_j,t_{j+1})} = K_{t_j} + A_{t_{j+1}} + Z^*_{(t_j,t_{j+1})}$$

Mit $K^*_{t_j}$ bezeichnen wir das korrigierte Kapital um die aufgelaufenen Zinsen . Am nächsten Zinsberechnungstermin bildet nun nicht mehr das Kapital K_{t_j} sondern $K^*_{t_j}$ die Grundlage für die Zinsberechnung. Die so berechneten Zinsen werden jetzt mit $Z^*_{(t_j,t_{j+1})}$ bezeichnet:

$$Z^*_{(t_j,t_{j+1})} = K^*_{t_j} \frac{\Delta_{(t_j,t_{j+1})}}{\Delta_{Jahr}} \cdot i$$

Eine Ausnahme bildet die erste Zinsperiode. Hier wird zur Zinsberechnung das Kapital K_{t_0} herangezogen:

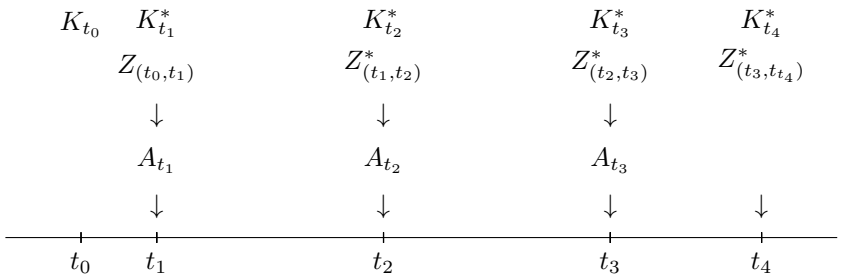
$$Z_{(t_0,t_1)} = K_{t_0} \frac{\Delta_{(t_1,t_2)}}{\Delta_{Jahr}} \cdot i$$

Für das Beispiel gilt

$$\begin{aligned}
K_{t_0} &= 10000,00EUR \\
Z_{t_0,t_1} &= K_{t_0} \cdot \frac{t_1 - t_0}{360} = 1000 \cdot \frac{10}{360} \cdot 0,02 = 5,56 \\
K^*_{t_1} &= K_{t_1} + Z_{t_0,t_1} = 11500,00 + 5,56 = 11505,56 \\
Z^*_{t_1,t_2} &= K^*_{t_1} \cdot \frac{t_2 - t_1}{360} = 11505,56 \cdot \frac{39}{360} \cdot 0,02 = 24,93 \\
K^*_{t_2} &= K^*_{t_1} + A_2 + Z^*_{t_1,t_2} = 11505,56 - 150 + 24,93 = 11380,48 \\
Z^*_{t_2,t_3} &= K^*_{t_2} \cdot \frac{t_3 - t_2}{360} = 11380,48 \cdot \frac{26}{360} \cdot 0,02 = 16,44 \\
K^*_{t_3} &= K^*_{t_2} + A_3 + Z^*_{t_2,t_3} = 11380,48 - 500 + 16,44 = 10896,93 \\
Z^*_{t_3,t_4} &= K^*_{t_3} \cdot \frac{t_4 - t_3}{360} = 10896,93 \cdot \frac{15}{360} \cdot 0,02 = 9,08 \\
K^*_{t_4} &= K^*_{t_3} + Z^*_{t_3,t_4} = 10896,93 + 9,08 = 10906,01
\end{aligned}$$

Das korrekte Endkapital unter Berücksichtigung der Verzinsung jeder Teilzinsen beträgt 10906,01 EUR und ist damit um 10 cent größer als bei der Staffelmethode.

Es ist noch die grafische Darstellung der Finanzströme nachzutragen:



Bei nichtstandardisierten Periodenlängen erfolgt die Umrechnung der Zinssätze auf der Grundlage der "day count convention". Die Periodenlänge bestimmt die Anzahl der Tage, die dann der Zinsberechnung zu Grunde liegen. Angenommen, die erste Zinsperiode besteht aus 156 Tagen, vereinbart ist eine Verzinsung nach der "day count convention"30/360. Die zweite und letzte Zinsperiode hat die Dauer von 3 Monaten. Damit wird ein Geldbetrag, er möge 10000 EUR betragen, 246 Tage $(156 + (3 * 30) = 246)$ überlassen. Gegeben ist ein Jahreszinssatz i von 5%.

Die Zinsen für die erste Zinsperiode werden nach dem Prinzip der einfachen Zinsen berechnet. Entsprechend erfolgt auch die Umrechnung des Jahreszinssatzes in den periodenspezifischen Zinssatz $i_{\frac{156}{360}}$.

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= K_0 \cdot i \cdot \frac{156}{360} = 10000 \cdot 0,05 \cdot \frac{156}{360} = 216,67 \\
K_1 &= K_0 + Z_1 = 10000 + 216,67 = 10216,67 \\
i_{\frac{156}{360}} &= i \cdot \frac{156}{360} = 0,05 \cdot \frac{156}{360} = 0,0217
\end{aligned}
$$

Für die zweite Zinsperiode erfolgt die Zinsberechnung ebenfalls nach dem Prinzip der einfachen Zinsen, allerdings nicht mit dem Anfangskapital (K_1), sondern mit dem Endwert nach der ersten Zinsperiode (K_1).

$$
\begin{aligned}
Z_2 &= K_1 \cdot i \cdot \frac{90}{360} = 10216,67 \cdot 0,05 \cdot \frac{90}{360} = 127,71 \\
K_2 &= K_1 + Z_2 = 10216,67 + 127,71 = 10344,37 \\
i_{\frac{90}{360}} &= i \cdot \frac{90}{360} = 0,05 \cdot \frac{156}{360} = 0,0125
\end{aligned}
$$

Das Endwert am Ende der zweiten Zinsperiode beträgt 10344,37 EUR. Es stellt sich nun die Frage, kann man einen Jahreszinssatz berechnen, der in 246 Tagen den gleichen Endwert erwirtschaftet wie die Verzinsung in zwei Zinsperioden.

$$
\begin{aligned}
K_2 &= K_0 \cdot (1 + i \cdot \frac{246}{360}) \\
10344,37 &= 10000 \cdot (1 + i \cdot \frac{246}{360}) \\
i &= (\frac{10344,37}{10000} -) \cdot \frac{360}{246} = 0,0504
\end{aligned}
$$

Allein die Tatsache, dass 10000 EUR in **zwei** Zinsperioden mit dem Jahreszinsatz von 5% verzinst wurden, erhöhte den Jahreszinssatz auf 5, 04% bei einer Verzinsung von nur einer Zinsperiode mit der Dauer von 246 Tagen.

Würde man den Jahreszinssatz von 5% auf die Periode von 246 Tagen anwenden (nach dem Prinzip der einfachen Verzinsung erhielte man folgenden Endwert:

$$K_2 = K_0 \cdot (1 + i \cdot \frac{246}{360}) = 10000 \cdot (1 + 0,05 \cdot \frac{246}{360}) = 10341,67$$

Der Endwert ist erwartungsgemäß ein wenig kleiner (2,70 EUR) als bei einer zwei periodischen Verzinsung $(10344,37 - 10341,67) = 2,70)$.

Formal könnte man eine Zinssatz bestimmen, der einer Zinsperiode von 246 Tagen entspricht und diesen zur Berechnung der Zinsen heranziehen:

$$\begin{aligned} i_{\frac{246}{360}} &= i \cdot \frac{246}{360} = 0,034167 \\ K_2 &= K_0 \cdot (1 + i_{\frac{246}{360}}) = 10000 \cdot (1 + 0,034167) = 10341,67 \end{aligned}$$

2.2.5 Gemischte Verzinsung

Gemischte Verzinsung, d.h. Verwendung von einfacher und exponentieller Verzinsung tritt immer dann auf, wenn die Zinszahlungstermine in Zinsperioden auftreten, in welchen sowohl einfache als auch exponentielle Verzinsung anzuwenden ist. Ein typisches Beispiel wäre die Anlage eines Geldbetrages K_0für die Dauer von 3 Jahren und 2 Monaten, wenn die Zinsperioden jeweils 1 Jahr und am Ende eine Zinsperiode von 2 Monaten auftritt. Damit ergeben sich 4 Zinsperioden. Für die ersten drei Zinsperioden kommt die exponentielle Verzinsung zur Anwendung, für die letzte zweimonatliche Zinsperiode die einfache Verzinsung. Es existieren 4 Zinsberechnungstermine:

- t_1 -Ende der ersten Zinsperiode (t_0, t_1)
- t_2 -Ende der zweiten Zinsperiode (t_1, t_2)
- t_3 -Ende der dritten Zinsperiode (t_2, t_3)
- t_4 -Ende der vierten Zinsperiode (t_0, t_1) und Zinszahlungstermin

Die Zinsberechnung kann in zwei Schritten erfolgen:

1. für den Zeitraum (t_0, t_3), bestehend aus 3 Zinsperioden

2. für den Zeitraum (t_3, t_4), bestehend aus 1 Zinsperiode

Ist ein Jahreszinssatz gegeben, erfolgt die Berechnung des Endbetrages ebenfalls in 2 Schritten:

$$\begin{aligned} K_{t_3} &= K_0 \cdot (1 + i)^3 \\ K_T = K_{t_4} &= K_{t_3} \cdot (1 + i \cdot \frac{2}{12}) \end{aligned}$$

Die Formeln können zusammengefasst werden;

$$K_T = K_{t_4} = K_0 \cdot (1 + i)^3 \cdot (1 + i \cdot \frac{2}{12})$$

Illustrieren wir die Berechnungen, wenn das Anfangskapital $K_0 = 10000$ EUR und der Jahreszinssatz 5% betragen:

$$\begin{aligned} K_T = K_{t_4} &= 10000 \cdot (1 + 0,05)^3 \cdot (1 + 0,05 \cdot \frac{2}{12}) \\ &= 11.576,25 \cdot 1,008 = 11.672,72 \end{aligned}$$

Allgemein kann geschrieben werden, wenn die Anzahl der Zinsperioden, für die die exponentielle Verzinsung angewendet wird gleich m ist und die Dauer der unterjährigen Zinsperiode k Tage sind ("day count convention" 30/360):

$$K_T = K_{t_{m+1}} = K_0 \cdot (1+i)^m \cdot (1 + i \cdot \frac{k}{360}) \tag{2.17}$$

Selbstverständlich kann auch eine unterjährige Zinsperiode der exponentiellen Verzinsung vorgeschaltet werden.
In unserem Beispiel sind wir davon ausgegangen, dass die m Zinsperioden eine Dauer von einem Jahr haben. Das muss keineswegs so sein. Würden wir davon ausgehen, dass die Verzinsung in den m Jahren vierteljährig erfolgt, müssten $4m$ vierteljährige Zinsperioden betrachtet werden:

$$K_T = K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{4}})^{4m} \cdot (1 + i \cdot \frac{2}{12})$$

Dabei sind:

i	der Jahreszinssatz
$i_{\frac{1}{4}}$	der Vierteljahreszinssatz

Der Vierteljahreszinssatz ist aus dem Jahreszinsatz zu berechen:

$$i_{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{(1+i} - 1$$

oder allgemein bei n unterjährigen Zinsperioden eines Jahres:

$$i_{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{(1+i} - 1 \tag{2.18}$$

$$K_T = K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{n}})^{m \cdot n} \cdot (1 + i \cdot \frac{k}{360}) \tag{2.19}$$

2.2.6 Kapitalbildung bei exponentieller Verzinsung

Die Kapitalbildung im Fall der exponentiellen Verzinsung bei gegebenen periodenabhängigen Zinssatz $i_{Zinsperiode} = i$ und n gleichlangen Zinsperioden kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$$

Dabei können die Zinsperioden unterjährig, jährlich oder mehrjährig sein. Wichtig ist, dass der Zinssatz dabei periodenabhängigen gegeben oder berechenbar ist.//[0,2cm] Das akkumulierte Kapital nach n Zinsperioden (K_n) bezeichnen wir als **Endwert**. Der Ausdruck $q = (1+i)$ bildet den **Aufzinsfaktor**. Der Kapitalbildungsprozess kann kurz wie folgt dargestellt werden:

$$K_n = K_0 \cdot q^n \tag{2.20}$$

Während q der Aufzinsfaktor ist, wird der reziproke Wert $\frac{1}{q} = \hat{q}$ **Abzinsfaktor** oder **Diskontfaktor** genannt. Er dient der Berechnung des **Barwertes** bzw. des **Anfangskapitals** K_0:

$$K_0 = K_n \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^n = K_n \cdot \hat{q}^n \tag{2.21}$$

Treten Zinszahlungstermine nicht nur am Anfang oder Ende von gleichlangen Zinsperioden, sondern sind den gleichlangen Zinsperioden eine verkürzte Zinsperiode nachgeschaltet, so müsste die Zinsberechnung nach dem Prinzip der gemischten Zinsen erfolgen (siehe Unterabschnitt 2.2.5). Für eine Zinszahlungsterminen mit n jährlichen Zinsperioden und einer unterjährigen Zinsperiode der Dauer von k Tagen bei eine "Day count convention" (30/360) gilt:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n \cdot (1 + i \cdot \frac{k}{360})$$

Häufig verwendet man näherungsweise auch hier ausschließlich die exponentielle Verzinsung:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^{(n+\frac{k}{360})}$$

Für das Beispiel im Abschnitt Unterabschnitt 2.2.5 erhielte man dann folgenden Endwert:

$$K_4 = K_0 \cdot (1+i)^{(3+\frac{2}{12})} \ \textit{an Stelle von}$$
$$K_4 = K_0 \cdot (1+i)^3 \cdot (1 + i \cdot \frac{2}{12})$$

Oder die konkreten Zahlen eingesetzt $K_0 = 10000$ und $i = 5\%$:

$$K_4 = 10000 \cdot (1+0,05)^{(3+\frac{2}{12})} = 11.670,77 \ \textit{an Stelle von}$$
$$K_4 = 10000 \cdot (1+0,05)^3 \cdot (1 + 0,05 \cdot \frac{2}{12}) = 11.672,72$$

Umgekehrt kann der Zinssatz bestimmt werden, der äquivalent zur gemischten Verzinsung ist, d.h. das gleiche Resultat erzielt nur diesmal durch exponentielle Verzinsung. Dieser Zinssatz wird gelegentlich auch als effektiver Zinssatz i_{eff} bezeichnet;

$$\begin{aligned} K_4 = 11672,72 &= 10000 \cdot (1+i_{eff})^{(3+\frac{2}{12})} \\ (1+i_{eff})^{(3+\frac{2}{12})} &= \frac{11672,72}{10000} \\ (1+i_{eff}) &= \Big(\frac{11672,72}{10000}\Big)^{\left[\frac{1}{(3+\frac{2}{12})}\right]} \\ i_{eff} &= \Big(\frac{11672,72}{10000}\Big)^{\left[\frac{1}{(3+\frac{2}{12})}\right]} - 1 = 0,050055 \end{aligned}$$

Der effektive Zinssatz ist ein wenig größer als 5%.

2.2.7 Vergleich einfache und exponentielle Verzinsung

Der grundlegende Unterschied zwischen einfacher und exponentiellen Verzinsung besteht darin, dass bei exponentieller Verzinsung die in einer Zinsperiode anfallenden Zinsen in den darauffolgenden Zinsperioden mit verzinst werden. Die Formeln Zur Bildung des Endkapitals K_T sollen gegenübergestellt werden. Wir unterstellen, dass für beide Verzinsungsarten der gleiche periodenspezifische Zinssatz $i_{Zinsperiode}$ verwendet wird. Der besseren Übersichtlichkeit halber bezeichnen wir hier den periodenspezifischen Zinssatz $i_{Zinsperiode}$ kurz mit i.

$$K_T = K_0 \cdot (1 + i \cdot n) \ (einfache Verzinsung)$$
$$K_T = K_0 \cdot (1 + i)^n \quad (exponentielle Verzinsung)$$

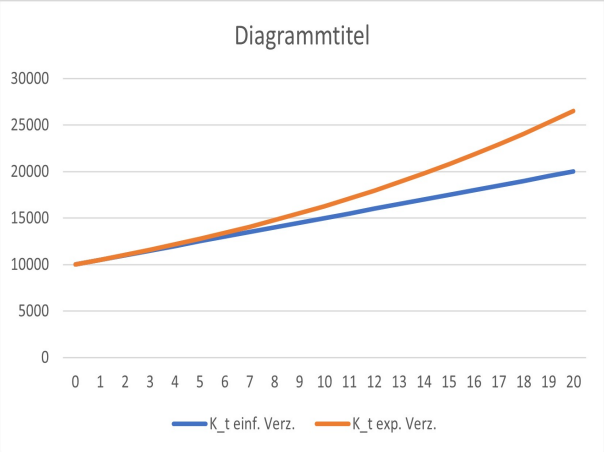
Die Zuwächse des Kapitals in einer Zinsperiode betragen:

$$\Delta K_t = K_t - K_{t-1} = K_0 \cdot i \ (einfache Verzinsung)$$
$$\Delta K_t = K_t - K_{t-1} = K_0 \cdot (1 + i)^t - K_0 \cdot (1 + i)^{t-1} =$$
$$= K_{t-1} \cdot (1 + i) - K_{t-1} = K_{t-1} \cdot i = K_0 \cdot (1 + i)^{t-1} \cdot i \ (exponentielle Verzinsung)$$

Wegen $K_0 \cdot (1 + i)^{t-1} \cdot i > K_0 \cdot i$ sind die Kapitalzuwächse im Fall der exponentiellen Verzinsung größer als bei der einfachen Verzinsung. Der Kapitalzuwachs bei einfacher Verzinsung ist zeitunabhängig, mit anderen Worten: der Kapitalzuwachs ist für jede Zinsperiode konstant ($\Delta K_t = const.$). Man spricht deshalb von einem **Wachstumsprozess mit konstantem Zuwachs**.

Bei exponentieller Verzinsung ist der Zinssatz konstant ($i = const.$), der Kapitalzuwachs wächst ($\Delta K_t > \Delta K_{t-1}$). Man spricht von einem **exponentiellen Wachstum**.

Graphisch lassen sich beide Wachstumsprozesse gut darstellen. Wir wählen $K_0 = 10000$, $n = 10$ und $i = 5\%$.



Auf die Unterschiede bei der Umrechnung von Jahreszinssätzen in unterjährige Zinssätze bei einfacher und exponentieller Verzinsung wurde im Beispiel Unterabschnitt 2.2.3 bereits hingewiesen. Allgemein ergibt sich folgendes Bild.

$$i = i_{\frac{1}{m}} \cdot m \qquad (einfache Verzinsung)$$
$$i = (1 + i_{\frac{1}{m}})^m - 1 \ (exponentielle Verzinsung)$$
$$i_{\frac{1}{m}} = \frac{i}{m} \qquad (einfache Verzinsung)$$
$$i_{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{(1 + i)} - 1 \quad (exponentielle Verzinsung)$$

2.3 Stetige Verzinsung

Bisher gingen wir von einer endlichen Anzahl von Zinsperioden innerhalb eines Jahres aus. Das Jahr ist in m gleichlange unterjährige Zinsperioden unterteilt, wird das akkumulierte Kapital am Ende des Jahres K_1 nach folgender Formel berechnet. Mit K_0 bezeichnen wir das Anfangskapital zum Zeitpunkt $t = 0$.

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{m}})^m$$

Vergrößert man ständig die Anzahl der Zinsperioden werden die Zinsen immer in kleineren Zinsperioden wieder angelegt. Zunächst 2 halbjährige Zinsperioden, dann 4 vierteljährig und 12 monatliche Zinsperioden und schließlich 360 tägliche Zinsperioden $m = 2, 4, 12, 360$). Denkbar wäre eine stündliche Verzinsung ($m = 8640$), oder sogar eine Zinsperiode von einer Minute oder Sekunde.

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})^m = steigend \;\; m = 2, 4, 12, 360, 8640, ...$$

Man kann diesen Prozess ständig fortsetzen, die Zinsperioden werden unendlich klein, die Anzahl der Zinsperioden wird unendlich groß. Der periodenspezifische Zinssatz nähert sich der Grenze 0. Die Zinsen werden schließlich unmittelbar wieder angelegt, es findet eine kontinuierliche Verzinsung statt.

Wir berechnen die unterjährigen Zinssäte $i_{\frac{1}{m}}$ für unterschiedliche Dauer der Zinsperioden bei gegebenen Jahreszinssatz $i = 100\%$. Das Kapital betrage 1 EUR.

Zinssatz	$\frac{1}{m}$	$K_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})^m$
$i_{\frac{1}{1}}$	1	2,0000
$i_{\frac{1}{2}}$	0,50	2,2500
$i_{\frac{1}{4}}$	0,25	2,4414
$i_{\frac{1}{12}}$	0,0833	2,6121
$i_{\frac{1}{360}}$	0,0028	2,7363
$i_{\frac{1}{8640}}$	0,0000157	2,7181

Der unterjährigen Zinssatz $\frac{i}{m}$ nähert sich mit wachsendem m der Grenze 0.

Es ist bekannt, dass sich die Folge $x_m = (1 + \frac{1}{n})^n$ der Eulerschen Zahl $e = 2,71828181$ mit wachsendem m annähert:

$$\lim_{m \to \infty} (1 + \frac{1}{m})^m = e$$

Daraus abgeleitet gilt:

$$\lim_{m \to \infty} (1 + \frac{i}{m})^m = e^i$$
$$K_0 = \lim_{m \to \infty} K_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})^m = K_0 \cdot e^i$$
$$K_n = \lim_{m \to \infty} K_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})^{m \cdot n} = K_0 \cdot e^{i \cdot n}$$

Für ein Kapital K_0 kann nun der Wert des akkumulierten Kapitals K_t zu jeden beliebigen Zeitpunkt $t > 0, t \in \mathbb{R}$. Dabei ist $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen.

$$K_t = K_0 \cdot e^{i \cdot t}$$

Dabei ist i der **stetige Zinssatz**. Das Intervall $(0, t)$ ist der Verzinsungszeitraum des Anfangskapitals K_0. Um den stetigen Zinssatz vom üblichen Jahreszinssatz i zu unterscheiden bezeichnen wir den stetigen Zinssatz mit i_s. Der Kapitalbildungsprozess stellt sich dann so dar:

$$K_t = K_0 \cdot e^{i_s \cdot t} \tag{2.22}$$

Stetige Zinssätze werden vor allem in wissenschaftlichen Abhandlungen der Finanzmathematik genutzt. Ess erweist sich als Vorteil, stetige und nicht diskrete Kapitalbildungsprozesse zu nutzen. Im Rahmen der Risikoabschätzung (siehe **??**) werden wir darauf zurückkommen.

Beispiel

Ein Kapital von 10000 EUR wird stetig verzinst mit einem stetigen Jahreszinssatz von 5%. Welchen Wert hat das Kapital zum Zeitpunkt $t = 3$? Der Zeitpunkt $t = 3$ ist als 3 Jahre nach dem Beginn des Überlassungszeitraums $t = 0$ zu interpretieren.

$$\begin{aligned} K_3 &= K_0 \cdot e^{i \cdot 3} \\ K_3 &= 10000 \cdot e^{0,05 \cdot 3} \\ K_3 &= 11618,34 \end{aligned}$$

Das Kapital ist angwachsen auf 11618,34 EUR.

Nach einem Jahr ($t = 1$) beträgt das akkumulierte Kapital 10512,71 EUR.

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 \cdot e^{i} \\ K_1 &= 10000 \cdot e^{0,05} \\ K_1 &= 10512,71 \end{aligned}$$

Man kann vermuten, dass die steige Verzinsung mit dem stetigen Zinssatz 5% nicht das gleiche Resultat erbringt, wie einfache bzw. exponentielle Verzinsung mit einem üblichen Zinssatz von 5%. Der Zusammenhang von Zinssatz und stetigen Zinssatz ist Gegenstand des nächsten Unterabschnittes.

2.3.1 Zinssatz und stetiger Zinssatz - jährliche und überjährige Verzinsung

Wir betrachten zunächst ein Beispiel. Das Kapital von 10000 EUR mit einem steigen Zinssatz von 5% für ein Jahr stetig verzinst:

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 \cdot e^{i} \\ K_1 &= 10000 \cdot e^{0,05} \\ K_1 &= 10512,71 \end{aligned}$$

Nach einem Jahr ($t = 1$) beträgt das akkumulierte Kapital 10512,71 EUR.

Würde man einfache oder exponentielle Verzinsung bei einer Zinsperiode von einem Jahr anwenden, käme bei gleichen Bedingungen zu folgendem Resultat:

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 \cdot (1 + i) \\ K_1 &= 10000 \cdot (1 + 0,05) \\ K_1 &= 10500,00 \end{aligned}$$

Das nach einem Jahr akkumulierte Kapital beträgt bei stetiger Verzinsung 10512,71 EUR. bei einfacher und exponentieller Verzinsung jedoch nur 10500,00 EUR. Die Übereinstimmung des akkumulierten Kapital bei einfacher und exponentieller Verzinsung gilt sebstverstäbdlch nur für das erste Jahr.

Um zu bestimmen, welcher stetiger Zinssatz dem üblichen jährlichen Zinssatz i entspricht, muss das Kapital in beiden Fällen gleich groß sein. Den stetigen Zinssatz bezeichnen wir mit i_s.

$$\begin{aligned} K_0 \cdot (1+i) &= K_0 \cdot e^{i_s} \\ i &= e^{i_s} - 1 \\ e^{i_s} &= 1 + i \\ i_s &= \ln(1+i) \\ i_s &= \ln(1+0,05) = 0,0488 \end{aligned}$$

Dem Jahreszinssatz $i = 5\%$ entspricht der stetige Zinssatz $i_s = 4,88\%$.

Umgekehrt kann man aus dem stetigen Zinssatz den Jahreszinssatz ableiten. Wäre beispielsweise der stetige Zinssatz $i_s = 5\%$, ergäbe sich:

$$\begin{aligned} i &= e^{i_s} - 1 \\ i &= e^{0,0488} - 1 = 0,05 \\ i &= e^{0,05} - 1 = 0,0513 \end{aligned}$$

Dem stetigen Jahreszinssatz $i_s = 4,88\%$ entspricht dem Jahreszinssatz $i = 5\%$ und dem stetigen Zinssatz $i_s = 5\%$ der Jahreszinssatz von $i = 5,13\%$. Es gilt die Relation $i < i_s$.

Bei einer Laufzeit größer als 1 Jahr kommt man zu einem gleichen Resultat:

$$\begin{aligned} K_n &= K_0 \cdot e^{i_s \cdot n} \\ K_n &= K_0 \cdot (1+i)^n \\ K_0 \cdot e^{i_s \cdot n} &= K_0 \cdot (1+i)^n \\ i_s &= \ln(1+i) \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergeben sich folgende Zusammenhänge zwischen exponentiellen Zinssatz i und steigen Zinssatz i_s bei einer jährlichen oder überjährigen Verzinsung:

$$i_s = \ln(1+i) \tag{2.23}$$

$$i = e^{i_s} - 1 \tag{2.24}$$

Das zugehörige akkumulierte Kapital berechnet sich wie folgt:

$$K_t = K_0 \cdot e^{i_s \cdot t} \tag{2.25}$$

$$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t \tag{2.26}$$

2.3.2 Zinssatz und stetiger Zinssatz - unterjährige Verzinsung

Ist die Laufzeit t kleiner als ein Jahr $t < 1$, muss der stetige Zinssatz angepasst werden. Gegeben sei der Jahreszinssatz i und unterjährige Laufzeiten. Die Zahl $\frac{k}{m}$ charakterisiert die Dauer der unterjährigen Laufzeit, gemessen an der Basis m, wobei $m > k$ ist. So entspricht einer Laufzeit von einem Vierteljahr der Dauer von 0,25 Jahre ($\frac{1}{4}$ bei einer Basis m =4, denn ein Jahr hat 4 Quartale). Bei einer Laufzeit von 58 Tagen ist die Basis die Anzahl der Tage eines Jahres (bei einer "day count convention" 30/360 sind das 360 Tage. Die Zahl $\frac{58}{360}$ gibt die Dauer der Laufzeit gemessen in Jahren an ($\frac{58}{360} = 0,1611$ Jahre).

Bei gegebenen Jahreszinssatz i kann der äquivalente unterjährige Zinssatz $i_{\frac{k}{m}}$ berechnet werden:

$$i_{\frac{k}{m}} = i \cdot \frac{k}{m}$$

Nun soll der unterjährige stetige Zinssatz $i_{s(\frac{k}{m})}$ abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} K_0 \cdot (1 + i_{\frac{k}{m}}) &= K_0 \cdot e^{i_{s(\frac{k}{m})}} \\ (1 + i_{\frac{k}{m}}) &= e^{i_{s(\frac{k}{m})}} \\ \ln(1 + i_{\frac{k}{m}}) &= i_{s(\frac{k}{m})} \end{aligned}$$

Damit gilt folgende Umrechnungsformel zwischen unterjährigem periodenspezifischen Zinssatz $i_{\frac{k}{m}}$ und unterjährigen ebenfalls periodenspezifischen stetigen Zinssatz $i_{s(\frac{k}{m})}$:

$$i_{s(\frac{k}{m})} = \ln(1 + i_{\frac{k}{m}}) \tag{2.27}$$

Beispiele:

Für die Laufzeiten $\frac{1}{4}$ und $\frac{58}{360}$ soll die periodenspezifischen stetigen Zinssätze $i_{s(\frac{1}{4})}$ und $i_{s(\frac{58}{360})}$ berechnet werden.

$$\begin{aligned} i_{s(\frac{1}{4})} &= \ln(1 + 0,05 \cdot \frac{1}{4}) = 0,0124 \\ i_{s(\frac{58}{360})} &= \ln(1 + 0,05 \cdot \frac{58}{360}) = 0,0080 \end{aligned}$$

Das entsprechende akkumulierte Kapital beträgt dann , wenn das Anfangskapital 10000 EUR ist:

$$\begin{aligned} K_t &= K_0 \cdot e^{i_{s(\frac{k}{m})}} \\ K_{\frac{1}{4}} &= 10000 \cdot e^{0,0124} = 10124,77 \\ K_{\frac{58}{360}} &= 10000 \cdot e^{0,0080} = 10080,32 \end{aligned}$$

Im Vergleich dazu bei einfacher Verzinsung:

$$\begin{aligned} K_t &= K_0 \cdot (1 + i \cdot \frac{k}{m}) \\ K_{\frac{1}{4}} &= 10000 \cdot (1 + 0,05 \cdot \frac{1}{4}) = 10125,00 \\ K_{\frac{58}{360}} &= 10000 \cdot (1 + 0,05 \cdot \frac{58}{360}) = 10080,56 \end{aligned}$$

Kapitel 3

Rentenrechnung

3.1 Akkumulationsprozesse

Eine Folge von Transaktionen A_i werden Finanzströme genannt und sind Gegenstand weiterer Untersuchungen. Durch Transaktionen werden Kapitaländerungen (Kapital im Moment t ist K_t) hervorgerufen:



Während bisher im Wesentlichen Zinszahlungen die Transaktionen bestimmten, erweitern wir jetzt die Betrachtung auf Zahlungen. Sie können sowohl das Kapital erhöhen als auch mindern. Besonders interessant sind dabei ständig wiederkehrende Zahlungen. Sie treten sowohl bei der Kapitalbildung als auch bei der Tilgung von Schulden auf. Schwerpunkt ist dabei die Bestimmung von End- und Barwerten von Finanzströmen. Im ersten Schritt bestimmen wir die End- und Barwerte auf der Basis von Zinssätzen, die auch für die Verzinsung des Kapitals verwendet werden, wie es in der klassischen Finanzmathematik üblich ist. Später trennen wir uns von diesem Vorgehen und verwenden zur Barwertbestimmung risikofreie Zinssätze.

Transaktionen können periodisch wiederkehrende Zahlungen sein, die wir **Raten** nennen und mit R bezeichnen. Die Ratenzahlungen können konstant oder variabel sein. In Abhängigkeit davon, wann konkret die Ratenzahlungen erfolgen, sprechen wir von **vor- oder nachschüssigen Kapitalbildungsprozessen**. Auch Zinsen können als Transaktionen aufgefasst werden, sofern sie nicht ausgezahlt werden, sondern das Kapital erhöhen. Die Zinsen werden in der Regel am Ende der Zinsperiode dem Kapital gutgeschrieben. Dabei sei ein periodenspezifischer Zinssatz $i_{Zinsperiode}$ gegeben.

Im weiteren betrachten wir folgende Fälle:

1. Zinszahlungen bei konstantem Zinssatz und konstante Ratenzahlungen erfolgen am Ende der Zinsperiode (Abschnitt 3.2). Dabei betrachten wir vorschüssige Renten (Unterabschnitt 3.2.1), nachschüssige Renten (Unterabschnitt 3.2.2) und sogenannte ewige Renten (Unterabschnitt 3.2.3)

2. Konstante Ratenzahlungen und Zinsperioden stimmen nicht überein, der periodenspezifische Zinssatz ist konstant (Abschnitt 3.3)

3. der periodenspezifische Zinssatz ist variabel (Unterabschnitt 3.4.1)

4. Ratenzahlungen sind nicht konstant - dynamische Renten (Unterabschnitt 3.4.2)

3.2 Konstante Ratenzahlungen - Zinszahlungen und Ratenzahlungen erfolgen erfolgen am Ende der Zinsperiode

In diesem Abschnitt wird zunächst davon ausgegangen, dass die Zinszahlungen und Ratenzahlungen am Ende jeder Zinsperiode erfolgen. Dabei können die Zinsperioden ein Jahr betragen oder unterjährig sein. Betragen die Zinsperioden ein Jahr, spricht man von konstanten Jahresrenten. Sind die Zinsperioden unterjährig, nennt man auch die Rente unterjährig. Gegeben sollte ein periodenspezifischer Zinssatz sein (bei einer Zinsperiode von einem Jahr sei der Jahreszinssatz gegeben, bei unterjährigen Zinsperioden der entsprechende unterjährige Zinssatz). Ist das nicht der Fall müssen die periodenspezifischen Zinssätze abgeleitet werden. Wichtig dabei ist, dass Ratenzahlungen am Anfang oder Ende der Zinsperiode stattfinden.

3.2.1 vorschüssige Renten

Zunächst untersuchen wir Renten mit konstanten vorschüssigen Zahlungen. Grundsätzlich kann eine vorschüssige Rente als Spezialfall eines Finanzstromes mit vorschüssigen Transaktionen aufgefasst werden. Die einzige Besonderheit besteht darin, dass die Transaktionen aus einem konstanten Wert bestehen ($A_t = R_t = R = \text{const.}$) Die Formeln zur Kapitalbildung können entsprechend modifiziert werden:

$$\begin{aligned}
K_0 &= R \\
K_1 &= K_0 \cdot (1+i) + R = K_0 \cdot q + R \\
K_2 &= K_1 \cdot (1+i) + R = K_1 \cdot q + R \\
... &= ... \\
K_{T-1} &= K_{T-2} \cdot (1+i) + R = K_{T-2} \cdot q + R \\
K_T &= K_{T-1} \cdot (1+i) = K_{T-1} \cdot q + R
\end{aligned}$$

Grafisch ergibt sich folgendes Bild:



Der Kapitalbildungsprozess kann auch anders dargestellt werden: Jede der Ratenzahlungen kann als Teilbetrag (B_t) aufgefasst werden, der bis zum Laufzeitende exponentiell verzinst wird:

1. Teilbetrag: $B_1 = R \cdot (1+i)^T = R \cdot q^T$
2. Teilbetrag: $B_2 = R \cdot (1+i)^{T-1} = R \cdot q^{T-1}$
...
Letzter Teilbetrag: $B_T = R \cdot (1+i) = R \cdot q$

Die Summe aller Teilbeträge ergibt das akkumulierte Kapital zum Teitpunkt T.

$$\sum_{t=1}^{T} B_t = R \cdot \sum_{t=1}^{T} \cdot q^t$$

Der Ausdruck $\sum_{t=1}^{T} q^t = q + q^2 + ... + q^T$ bildet eine geometrische Reihe. Bekannterweise kann die Teilsumme der ersten T Elemente wie folgt berechnet werden:

$$\sum_{t=1}^{T} q^t = q + q^2 + ... + q^T = q \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1}$$

Folglich kannn der Endwert der vorschüssigen Rente K_T (Rentenendwert) nach T Zahlungen nach folgender Formel berechnet werden:

$$K_T = R \cdot q \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1} \tag{3.1}$$

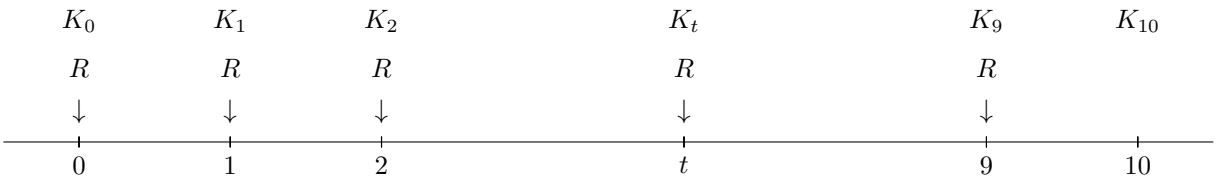
Bevor ein Beispiel angeführt wird, sei darauf hingewiesen, dass konstante Ratenzahlungen in folgenden Fällen auftreten können:

1. Zinsperioden betragen genau ein Jahr. Man spricht in diesem Fall von konstanten Jahresrenten. Gegeben ist dabei ein Jahreszinssatz und eine Laufzeit von T Jahren.
2. Unterjährige Zinsperioden bei gegebenen unterjährigen Zinssatz. Ist ein Jahreszinssatz gegeben, muss dieser in einen unterjährigen Zinssatz umgerechnet werden. Die Anzahl der Zinsperioden kann beliebig lang sein, auch länger als ein Jahr.

Charakteristisch in allen Fällen ist dabei, dass immer ein periodenspezifischer Zinssatz gegeben sein muss bzw. berechnet und verwendet werden muss. Der Formelapparat dabei ist identisch in allen beschriebenen Fällen. Ein anderes Vorgehen muss gewählt werden, wenn Zinsperiode und Ratenzahlungen nicht übereinstimmen. Siehe dazu Abschnitt 3.3.

Beispiel

Zahlt man 10 Jahre lang am Jahresanfang einen Betrag von 1000 EUR ein erhält man bei einem Jahreszinssatz von 5% am Ende des 10. Jahres den Betrag (Rentenendwert K_{10}). Der Akkumulationsprozess lässt sich grafisch folgendermaßen darstellen:



Der Rentenendwert wird folgendermaßen berechnet:

$$K_T = R \cdot q \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1}$$
$$K_{10} = 1000 \cdot 1,05 \cdot \frac{1,05^{10} - 1}{1,05 - 1} = 13206,70$$

Der Rentenendwert beträgt 13206,70 EUR.

Der Barwert (Rentenbarwert BW_0) erhält man, indem man den Rentenendwert mit dem Abzinsfaktor ($\hat{q}^T = \frac{1}{q^T}$) multipliziert:

$$BW_0 = K_T \cdot \hat{q}^T = K_T \cdot \frac{1}{q^T}$$
$$BW_0 = R \cdot q \cdot \frac{1}{q^T} \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1}$$
$$= R \cdot \frac{1}{q^{T-1}} \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1}$$

Für das Beispiel:

$$BW_0 = R \cdot \frac{1}{q^{T-1}} \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1}$$
$$= 1000 \cdot \frac{1}{1,05^9} \cdot \frac{1,05^{10} - 1}{1,05 - 1} =$$
$$= \frac{1}{1,05^{10}} \cdot K_{10} = 8107,77$$

Der Barwert beträgt 8107,77 EUR. Würde man diesen Betrag zu Beginn der Laufzeit einzahlen und mit einem Zinssatz von 5% p/a verzinsen, erhielte man den Betrag des Rentenendwertes von 13206,70 EUR. D.h. die Zahlung von 10 vorschüssigen Raten von 1000 EUR oder die Einzahlung von einmalig 8107,77 EUR zu Beginn der Laufzeit sind äquivalent, sie erbringen den gleichen Endwert.

$$K_{10} = 8107,77 \cdot 1,05^{10} = 13206,70$$

Bisher wurde der Barwert einer Rente als abgezinster Endwert zum Laufzeitbeginn berechnet. Wir wollen diesen Barwert ab jetzt mit BW_0 bezeichnen, als Barwert zum Zeitpunkt $t = 0$. Es ist aber auch eine weitere Betrachtung möglich. Angenommen, bis zum Zeitpunkt t ($t > 0$) wurden bereits einige Ratenzahlungen getätigt. Zur Übersichtlichkeit nehmen wir an, dass der Zeitpunkt t ausschließlich zu Zahlungsterminen der Raten bestimmt wird. Damit ist in unserer Notation t eine ganze Zahl zwischen 0 und T: $t \in (0, T)$ und $t \in N$, wobei N die Menge der natürlichen Zahlen ist. Die Anzahl der getätigten Ratenzahlungen ist t, es stehen noch $T - t$ vorschüssige Ratenzahlungen aus. Man kann den Barwert der Rente ebenfalls für den Zeitpunkt t berechnen. Dazu ist zunächst der Endwert der ausstehenden Zahlungen zu bestimmen und dieser dann zum Zeitpunkt t abzuzinsen. Der so erhalten Barwert wird mit BW_t bezeichnen, als Barwert zum Zeitpunkt t. Der Endwert der noch ausstehenden Ratenzahlungen sei mit K^*_{T-t} bezeichnet.

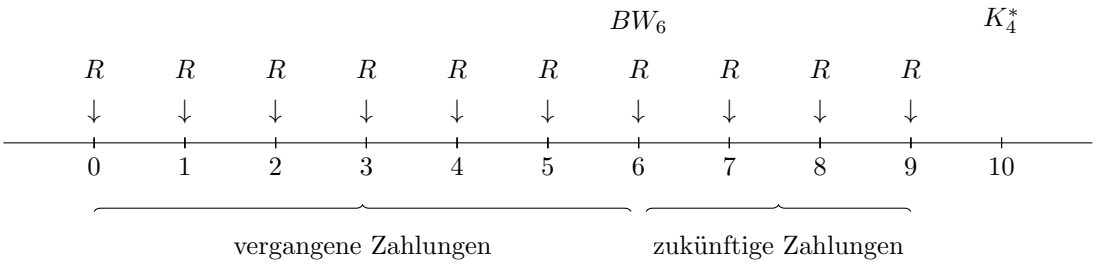
$$K^*_{T-t} = R \cdot q \cdot \frac{q^{T-t} - 1}{q - 1}$$
$$BW_t = K^*_{T-t} \cdot \frac{1}{q^{T-t}}$$
$$BW_t = R \cdot q \cdot \frac{1}{q^{T-t}} \cdot \frac{q^{T-t} - 1}{q - 1}$$
$$= R \cdot \frac{1}{q^{T-t-1}} \cdot \frac{q^{T-t} - 1}{q - 1}$$

Für das oben angeführte Beispiel nehmen wir nun an, dass zum Zeitpunkt $t = 6$ bereits 6 vorschüssige Ratenzahlungen erfolgt sind, und weitere 4 Ratenzahlungen noch ausstehen. Der Rentenendwert der noch ausstehenden Zahlungen ($K^*_{10-6} = K^*_4$) und der Barwert zum Zeitpunkt $t = 6$ (BW_6) können nun berechnet werden:

$$K^*_{10-6} = 1000 \cdot (1,05) \cdot \frac{(1,05^{10-6} - 1}{0,05} = 4525,63$$
$$BW_6 = 4525,63 \cdot \frac{1}{1,05^4} = 3723,25$$

Rentenendwert der noch ausstehenden Zahlungen beträgt 4525,63 EUR. Der Barwert zum Zeitpunkt $t = 6$ beläuft sich auf 3723,25 EUR. Würde man diesen Betrag zum Zeitpunkt $t = 6$ einzahlen erhielte man den Endwert von 4525,63 EUR. Oder der Barwert der noch ausstehende Zahlungen beträgt 3723,25 EUR.

Grafisch kann die Berechnung des Barwertes BW_6 so dargestellt werden:



An dieser Stelle sei erwähnt, dass der Zusammenhang von Bar- und Endwert nur dann in dieser Form hergestellt werden darf, wenn die Zinssätze zum Auf- und Abzinsen und für die Rentenrechnung identisch sind. Sie beziehen sich auf ein spezielles Finanzprodukt und dienen der internen Berechnung.

Die Formel zur Rentenrechnung kann umgestellt werden, Ratenhöhe oder Laufzeit zu berechnen wenn der Zinssatz bzw. Auf- und Abzinsfaktoren gegeben sind.

$$R = K_T \cdot \frac{q-1}{q} \cdot \frac{1}{q^T - 1} \tag{3.2}$$
$$T = \frac{\ln\left(1 + \frac{K_T}{R} \cdot \frac{q-1}{q}\right)}{lnq} \tag{3.3}$$

Renten wurden bisher als Kapitalbildungsprozess dargestellt. Man kann sich auch vorstellen, dass ein Kapital genutzt wird, um mehrjährige Rentenzahlungen daraus zu finanzieren (man spricht auch von **Kapitalverzehr**). Die Idee ist relativ einfach. Es sei K ein Ausgangskapital, dass zu einem Jahreszinssatz i verzinst wird, gleichzeitig wird mit dem gleichen Zinssatz eine Rente gebildet, die zur Auszahlung kommt. Beide Prozesse lassen sich in einen Prozess integrieren:

$$K_T = K \cdot q^T - R \cdot q \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}$$

Dabei ist K_T das Kapital, dass nach T Ratenzahlungen und Verzinsung des Ausgangskapitals übrigbleibt. Soll das gesamte Ausgangskapital aufgebraucht werden, muss $K_T = 0$ sein. Nun kann die Höhe der dazu notwendigen Rentenzahlung berechnet werden:

$$0 = K \cdot q^T - R \cdot q \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1}$$
$$R \cdot q \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1} = K \cdot q^T$$
$$R = \frac{K \cdot q^T \cdot (q-1)}{q \cdot (q^T - 1)}$$

Beispiel: Ein Rentner verfügt bei Renteneintritt über 200000 EUR. Daraus möchte er für die nächsten 20 Jahre eine jährliche vorschüssige Rente finanzieren. Die Bank bietet ihm einen Zinssatz von 5% an.

$$R = \frac{K \cdot q^T \cdot (q-1)}{q \cdot (q^T - 1)}$$
$$R = \frac{200000 \cdot 1,05^{20} \cdot (0,05)}{1,05 \cdot (1,05^{20} - 1)} = 15284,30$$

Gegenrechnung:

$$K_T = -R \cdot q \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1}$$
$$K_{20} = -15284,30 \cdot 1,05 \cdot \frac{1,05^{20} - 1}{0,05} = -530659,46$$

$$K_T = K \cdot q^T$$
$$K_{20} = 200000 \cdot 1,05^{20} = 530659,46$$

Die vorschüssige Rente verbraucht ein Kapital von 530659,46 EUR. Das wird finanziert durch ein akkumuliertes Kapital ebenfalls in der Höhe von 530659,46 EUR. Finanzierung und Auszahlungen stimmen überein.

3.2.2 nachschüssige Renten

Nachschüssige Renten sind dadurch charakterisiert, dass die Ratenzahlung im Unterschied zur vorschüssigen Rente erst am Ende der jeweiligen Zinsperiode erfolgt und damit nicht in die Zinsberechnung dieser Periode eingeht. Der Kapitalbildungsprozess ist entsprechend anzupassen:

$$\begin{aligned} K_0 &= 0 \\ K_1 &= R \\ K_2 &= K_1 \cdot (1+i) + R \\ ... &= ... \\ K_{T-1} &= K_{T-2} \cdot (1+i) + R \\ K_T &= K_{T-1} \cdot (1+i) \end{aligned}$$

Grafisch ergibt sich folgendes Bild:



Wie im Unterabschnitt 3.2.1 kann der Kapitalisierungsprozess als Summe aufgezinster Teilbeträge betrachtet werden:

1. Teilbetrag: $B_1 = R \cdot (1+i)^{T-1} = R \cdot q^{T-1}$
2. Teilbetrag: $B_2 = R \cdot (1+i)^{T-2} = R \cdot q^{T-2}$
...
Letzter Teilbetrag: $B_T = R = R \cdot q^0$

Die Summe aller Teilbeträge ergibt das akkumulierte Kapital zum Teitpunkt T.

$$\sum_{t=1}^{T} B_t = R \cdot \sum_{t=0}^{T-1} \cdot q^t = R \cdot (1 + q + q^2 + ... + q^{T-1})$$
$$= R \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1}$$

$$K_T = R \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1} \tag{3.4}$$

Dabei ist K_T der Endwert der nachschüssigen Rente am Ende der Laufzeit T.

Es gelten die Bemerkungen über mögliche Anwendungsgebiete : Jahresrenten, unterjährige oder überjährige Renten bei konstanten Ratenzahlungen. Siehe dazu Unterabschnitt 3.2.1.

Beispiel

Wie im Beispiel im Unterabschnitt 3.2.1 zahlt man 10 Jahre lang, nun aber am Jahresende, einen Betrag von 1000 EUR ein erhält man bei einem Jahreszinssatz von 5% am Ende des 10. Jahres folgenden Betrag (Rentenendwert):

$$K_T = R \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1}$$
$$K_10 = 1000 \cdot \frac{1,05^{10} - 1}{1,05 - 1} = 12577,81$$

Der Rentenendwert beträgt 12577,81 EUR.

Der Barwert (Rentenbarwert) erhält man, indem man den Rentenendwert mit dem Abzinsfaktor ($\hat{q}^T = \frac{1}{q^T}$) multipliziert:

$$BW_0 = K_T \cdot \hat{q}^T = K_T \cdot \frac{1}{q^T}$$
$$BW_0 = R \cdot \frac{1}{q^T} \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1}$$

Für das Beispiel:

$$BW_0 = R \cdot \frac{1}{q^T} \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1}$$
$$= 1000 \cdot \frac{1}{1,05^{10}} \cdot \frac{1,05^{10} - 1}{1,05 - 1} =$$
$$= \frac{1}{1,05^{10}} \cdot K_{10} = 7721,73$$

Der Barwert beträgt 7721,73 EUR. Würde man diesen Betrag zu Beginn der Laufzeit einzahlen und mit einem Zinssatz von 5% p/a verzinsen, erhielte man den Betrag des Rentenendwertes von 12577,81 EUR. D.h. die Zahlung von 10 nachschüssigen Raten von 1000 EUR oder die Einzahlung von einmalig 7721,73 EUR zu Beginn der Laufzeit sind äquivalent, sie erbringen den gleichen Endwert.

In analoger weise kann die Formel zur Berechnung des Rentenendwertes nach T bzw. R umgestellt werden:

$$R = K_T \cdot \frac{q-1}{q^T - 1} \tag{3.5}$$

$$T = \frac{\ln\left(1 + \frac{K_T}{R} \cdot (q-1)\right)}{lnq} \tag{3.6}$$

Der Barwert BW_t wird analog zur voerschüssigen Rente berechnet und interpretiert werden:

$$K_{T-t} = R \cdot \frac{q^{T-t} - 1}{q-1}$$
$$BW_t = K_{T-t} \cdot \frac{1}{q^{T-t}}$$

$$K_4 = K_{10-6} = 1000 \cdot \frac{(1,05^{10-6} - 1)}{0,05} = 4310,12$$
$$BW_6 = 4310,12 \cdot \frac{1}{1,05^4} = 3545,95$$

Rentenendwert der noch ausstehenden Zahlungen beträgt 4310,12 EUR. Der Barwert zum Zeitpunkt $t = 6$ beläuft sich auf 3545,95 EUR. Würde man diesen Betrag zum Zeitpunkt $t = 6$ einzahlen erhielte man den Endwert von 4310,12 EUR.

Lediglich der Endwert des Beispiels in Unterabschnitt 3.2.1 ist durch den Endwert der nachschüssigen Rente zu ersetzen.

Auch im nachschüssigen Fall kann der Prozess des Kapitalverzehrs in Formeln gefasst werden. Die sich daraus ergebene Ratenhöhe R berechnet sich:

$$R = \frac{K \cdot q^T \cdot (q-1)}{q^T - 1}$$

Die entsprechende Ratenhöhe R für das Beispiel im Unterabschnitt 3.2.1 ist dann:

$$R = \frac{200000 \cdot 1,05^{20} \cdot (1,05-1)}{1,05^{20} - 1}$$
$$= 14556,48$$

Die nachschüssige Ratenzahlung von 14556,48 EUR im Jahr zehrt das Anfangskapital vn 200000 EUR in 20 Jahren vollständig auf.

3.2.3 Ewige Renten

Ewige Renten stellen ein Spezialfall von Renten dar, die dem Kapitalverzehr dienen. Unter bestimmten Umständen reicht das Kapital aus, um daraus unendliche viele Ratenzahlungen zu ermöglichen.
Betrachten wir zunächst eine nachschüssige ewige Rente. Man kann sich leicht überlegen, dass das Kapital genau dann nicht aufgebraucht wird, wenn die periodischen Ratenzahlungen den in der Zinsperiode erwirtschafteten Zins nicht überschreiten.

$$R \leq \qquad\qquad Z = K \cdot i \tag{3.7}$$

Ist die Ratenzahlung kleiner als der der erwirtschaftete Zins, wird das Kapital sogar anwachsen, hat die Ratenzahlung die Höhe der Zinsen, wird die ewige Rente vollständig dzrch die Zinsen abgedeckt, das Anfangskapital bleibt unverändert.
Im Falle der vorschüssigen ewigen Rente muss die Ratenhöhe um eine Zinsperiode abgezinst werden:

$$R \leq \qquad Z = K \cdot \frac{i}{q} = K \cdot \frac{i}{1+i} \tag{3.8}$$

Ewige Renten werden in der finanzwirtschaftlichen Praxis dann genutzt, wenn aus einem Kapital jährlich oder in anderen Zeitintervallen ein konstante Beträge ausgezahlt werden und dabei das Ausgangskapital nicht aufgebraucht werden soll. So könnte man sich die Finanzierung der Prämien der Nobelpreise vorstellen, wenn die Kapitalbildung ausschließlich durch Verzinsung erfolgt. Auch in Stiftungen in denen regelmäßig Beträge ausgeschüttet werden können durch ewige Renten finanziert werden:

Beispiel : Es ist das Anfangskapital zu bestimmen, wenn jährlich 100000 EUR ausgeschüttet werden soll, und das Kapital nicht aufgebraucht wird. Der Zinssatz betrage 5%.

$$\begin{aligned} K &= R \cdot \tfrac{1}{i} && \text{- nachschüssig} \\ K &= R \cdot \tfrac{1+i}{i} && \text{- vorschüssig} \\ K &= 100000 \cdot \tfrac{1}{0{,}05} = 2000000 && \text{- nachschüssig} \\ K &= 100000 \cdot \tfrac{1+0{,}05}{0{,}05} = 2100000 && \text{- vorschüssig} \end{aligned}$$

Wird der Ratenbetrag am Ende des Jahres ausgezahlt benötigt man 2000000 EUR, wird er jedoch am Jahresanfang bereitgestellt sind 2100000 EUR notwendig. Ein höherer Betrag würde dazu führen, dass das Kapital ständig ansteigen wird.

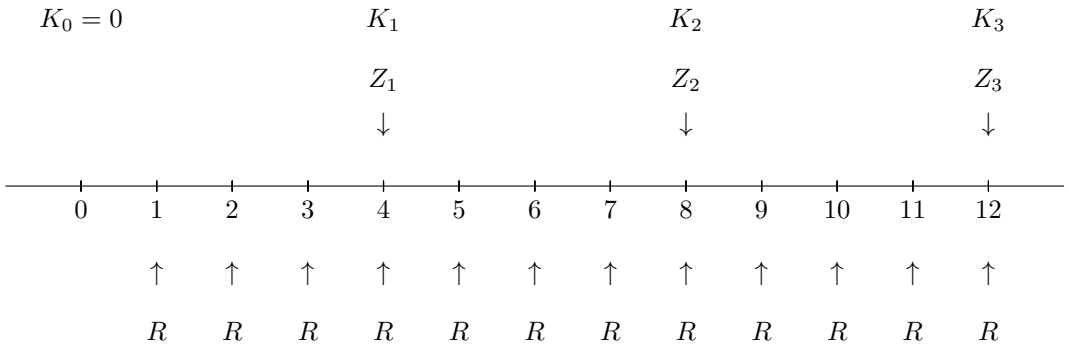
3.3 Konstante Ratenzahlungen - Anzahl der Zinsperiode und der Ratenzahlungen stimmen nicht überein

Es existieren viele Kombinationen, wenn die Anzahl der Zinsperioden und der Ratenzahlungen nicht übereinstimmen. Hier seinur folgender Fall betrachtet:

- unterjährige Einzahlungen bei jährlicher Verzinsung

Die Zinsperiode beträgt ein Jahr, gegeben ist folglich ein Jahreszinssatz i. Die Ratenzahlungen erfolgen unterjährig. Ein Jahr besteht aus m Zinsperioden. Die Raten werden nachschüssig gezahlt.

Illustriert werden soll der Zahlungs- und Verzinsungsverlauf an einem Beispiel mit vierteljährigen Ratenzahlungen $R = 1000$ EUR und 3 jähriger Laufzeit, $i = 5\%$.



Dabei bezeichnen:

K_t	Kapital am Ende der Zinsperiode t, t=1,2,3
Z_t	Zinsen für die Zinsperiode t, t=1,2,3
R	Vierteljahresraten

Betrachten wir den allgemeinen Fall. Die Zinsperiode (ein Jahr) wird in m Zinszahlungsperioden unterteilt. Am Ende jedes Jahres wird das angesammelte Kapital gemäß exponentieller Verzinsung mit dem Jahreszinssatz i verzinst. Innerhalb des Jahres wird das Kapital nach dem Prinzip der einfachen Verzinsung anteilig verzinst. Dort kommt der unterjährige Zinssatz $i_{\frac{1}{m}} = \frac{i}{m}$. In unserem Beispiel ist der Vierteljahreszinssatz $i_{\frac{1}{4}} = \frac{i}{4}$ gebildet.

Im ersten Jahr ergeben sich folgende Zinsen, die am Ende des Jahres zusammengefasst werden:

Raten	Restlaufzeit bis Jahresende	Zinsen bis Jahresende
1. Rate	m-1	$R \cdot i \cdot \frac{m-1}{m}$
2. Rate	m-2	$R \cdot i \cdot \frac{m-2}{m}$
...	...	...
j. Rate	m-j	$R \cdot i \cdot \frac{m-j}{m}$
...	...	...
m. Rate	0	$R \cdot i \cdot \frac{m-m}{m} = 0$

Die Zinsen am Jahresende betragen dann:

$$\begin{aligned} Z_1 &= R \cdot \sum_{j=1}^{m} i \cdot \frac{m-j}{m} \\ &= R \cdot i \cdot \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^{m} (m-j) \\ &= R \cdot i \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{(m-1)m}{2} \\ &= R \cdot i \cdot \frac{m-1}{2} \end{aligned}$$

Am Ende des ersten Jahres beläuft sich das akkumulierte Kapital:

$$\begin{aligned} K_1 &= R \cdot m + Z_1 \\ &= R \cdot [m + i \cdot \frac{m-1}{2}] \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Kapitals im Jahre 2 (K_2) ist das akkumulierte Kapital K_1 ist zu verzinsen. Zusätzlich werden, wie im ersten Jahr,die m Einzahlungen und die unterjährigen Zinsen dazu addiert:

$$\begin{aligned} K_2 &= K_1 \cdot (1+i) + R \cdot m + Z_2 \\ R \cdot m + Z_2 &= R \cdot [m + i \cdot \frac{m-1}{2}] \\ &\Longrightarrow \\ K_2 &= R \cdot [m + i \cdot \frac{m-1}{2}] \cdot [1 + (1+i)] \end{aligned}$$

Für das darauffolgenden Jahre gilt analog:

$$K_3 = K_2 \cdot (1+i) + R \cdot m + Z_3 = R \cdot [m + i \cdot \frac{m-1}{2}] \cdot [1 + (1+i) + (1+i)^2]$$
$$... = ...$$
$$K_n = R \cdot [m + i \cdot \frac{m-1}{2}] \cdot [1 + (1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{(n-1)}]$$

$$K_n = R \cdot [m + i \cdot \frac{m-1}{2}] \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{3.9}$$

Dabei bildet K_n den Endwert der Rente.

Für das Beispiel ergeben sich bei 4 Zinsperioden pro Jahr im ersten Jahr:

Raten	Restlaufzeit bis Jahresende in Vierteljahren	Zinsen bis Jahresende
1.Rate	3	$1000 \cdot 0,05 \cdot \frac{3}{4} = 37,50$
2.Rate	2	$1000 \cdot 0,05 \cdot \frac{2}{4} = 25,00$
3.Rate	1	$1000 \cdot 0,05 \cdot \frac{1}{4} = 12,50$
4.Rate	0	$1000 \cdot 0,05 \cdot \frac{0}{4} = 0$

Die aufgelaufenen Zinsen betragen:

$$Z_1 = 37,50 + 25,00 + 12,50 = 75$$

Am Ende des ersten Jahres beläuft sich das akkumulierte Kapital:

$$K_1 = R \cdot m + Z_1$$
$$K_1 = 1000 \cdot 4 + 75 = 4075$$

Zur Berechnung des Kapitals im Jahre 2 K_2 ist das akkumulierte Kapital K_1 ist zu verzinsen. Danach addiert man die m Einzahlungen und die Zinsen, wie im ersten Jahr:

$$K_2 = K_1 \cdot (1+i) + R \cdot m + Z_2$$
$$K_2 = 4075 \cdot 1,05 + 1000 \cdot 4 + 75 = 8353,75$$
$$Z_2 = R \cdot \sum_{j=1}^{m} i \cdot \frac{m-j}{m}$$
$$Z_2 = 75$$

Am Ende des zweiten Jahres beläuft sich das akkumulierte Kapital auf 8353,75
Das Kapital ist wiederum zu verzinsen und die m Einzahlungen und die Zinsen dem verzinsten Kapital zu zuschlagen:

$$K_3 = K_2 \cdot (1+i) + R \cdot m + Z_3$$
$$K_2 = 8353,75 \cdot 1,05 + 1000 \cdot 4 + 75 = 12846,44$$
$$Z_3 = R \cdot \sum_{j=1}^{m} i \cdot \frac{m-j}{m}$$
$$Z_3 = 75$$

Insgesamt erwirtschaftet diese Rente 12846,44 EUR.

Zum gleichen Resultat kommt man, wenn die Formel:

$$K_3 = R \cdot [m + i \cdot \frac{m-1}{2}] \cdot [1 + (1+i) + (1+i)^2]$$
$$K_3 = R \cdot [m + i \cdot \frac{m-1}{2}] \cdot \frac{(1+i)^3 - 1}{i}$$

verwendet und das Problem nicht rekursiv löst.

$$K_3 = 1000 \cdot [4 + 0,05 \cdot \frac{3}{2}] \cdot [1 + (1+0,05) + (1+0,05)^2] = 12846,44$$
$$K_3 = 1000 \cdot [4 + 0,05 \cdot \frac{3}{2}] \cdot \frac{(1+0,05)^3 - 1}{0,05} = 12846,44$$

3.4 dynamische Renten

Es werden zwei Möglichkeiten betrachtet die Ratenzahlungen zu dynamisieren:

1. der Zinssatz bleibt nicht konstant . Wir gehen davon aus dass der Zinssatz sich nicht ständig verändert, sondern eine gewisse Zeit konstant bleibt, und danach den Bedingungen angepasst wird.

2. Die Ratenhöhe bleibt nicht konstant. Auch hier treffen wir einige Annahmen: die Ratenhöhe steigt durch einen konstanten Betrag (arithmetische fortschreitende Rente) oder mit konstantem Wachstumstempo (geometrisch fortschreitende Rente)

3.4.1 dynamische Renten mit veränderlichen Zinssatz

Die Laufzeit der Rente wird in mehrere Zeitabschnitte $(0, d_1), (d_1, d_2), ..., (d_{T-2}, d_{T-1}), (d_{T-1}, d_T)$ unterteilt und angenommen, dass in diesen Zeitabschnitten der Zinssatz unverändert bleibt. Mit $i_{(d_{t-1}, d_t)}$ wird der Zinssatz für das Intervall (d_{t-1}, d_t) bezeichnet

Intervall	Zinssatz
$(0, d_1)$	$i_{(0,d_1)}$
(d_1, d_2)	$i_{(d_1,d_2)}$
...	...
(d_{T-2}, d_{T-1})	$i_{(d_{T-2},d_{T-1})}$
(d_{T-1}, d_T)	$i_{(d_{T-1},d_T)}$

Das Endkapital K_T kann dann schrittweise für jedes Intervall berechnet werden. Wir betrachten den nachschüssigen Fall einer Jahresrente. Die Ratenhöhe R sei für die gesamte Laufzeit $(0, T)$ konstant

$$
\begin{aligned}
K_{(0,d_1)} &= R \cdot \frac{(1+i_{(0,d_1)})^{d_1}-1}{i_{(0,d_1)}} \\
K_{(d_1,d_2)} &= R \cdot \frac{(1+i_{(d_1,d_2)})^{(d_2-d_1)}-1}{i_{(d_1,d_2)}} \\
... &= ... \\
K_{(d_{T-1},d_T)} &= R \cdot \frac{(1+i_{(d_{T-1},d_T)})^{(d_T-d_{T-1})}-1}{i_{(d_{T-1},d_T)}}
\end{aligned}
$$

Dabei ist $K_{(d_{t-1},d_t)}$ der Endwert der Teilrente für das Intervall (d_{t-1}, d_t). Jeder dieser Teilendwerte (bis auf den letzten $K_{(d_{T-1},d_T)}$) unterliegt ebenfalls der Verzinsung und bilden den aufgezinsten Endwert $K^*_{(d_{t-1},d_t)}$ der Teilrente für das Intervall (d_{t-1}, d_t):

$$
\begin{aligned}
K^*_{(0,d_1)} &= K_{(0,d_1)} \cdot (1+i_{(d_1,d_2)})^{(d_2-d_1)} ... \cdot (1+i_{(d_{T-1},d_T)})^{(d_T-d_{T-1})} \\
K^*_{(d_1,d_2)} &= K_{(d_1,d_2)} \cdot (1+i_{(d_2,d_3)})^{(d_3-d_2)} ... \cdot (1+i_{(d_{T-1},d_T)})^{(d_T-d_{T-1})} \\
... &= ... \\
K^*_{(d_{T-2},d_{T-1})} &= K_{(d_{T-2},d_{T-1})} \cdot (1+i_{(d_{T-1},d_T)})^{(T-d_{T-1})}
\end{aligned}
$$

Die aufgezinsten Teilrenten müssen nun addiert werden (der letzte Teilendwert $K_{(d_{T-1},d_T)}$ muss dabei nicht aufgezinst werden)

$$
K_T = K^*_{(0,d_1)} + K^*_{(d_1,d_2)} + ... + K^*_{(d_{T-2},d_{T-1})} + K_{(d_{T-1},d_T)}
$$

Beispiel:

Die Laufzeit $T = 12$ Jahre einer Rente ist in 3 Abschnitte unterteilt, wobei in jedem Abschnitt der Zinssatz konstant bleibt. Die jährliche Rate beträgt 10000 EUR für die gesamte Laufzeit. Die Ratenzahlungen erfolgen nachschüssig:

Intervall	Intervall	Zinssatz
$(0, d_1)$	$(0, 4)$	5%
(d_1, d_2)	$(4, 7)$	6%
(d_2, T)	$(7, 12)$	7%

Es werdenm zunächst die Endwerte der 3 Teilrenten berechnet:

$$
\begin{aligned}
K_{(0,d_1)} &= R \cdot \frac{(1+i_{(0,d_1)})^{d_1}-1}{i_{(0,d_1)}} = 10000 \cdot \frac{1,05^4-1}{0,05} = 43101,25 \\
K_{(d_1,d_2)} &= R \cdot \frac{(1+i_{(d_1,d_2)})^{d_2-d_1}-1}{i_{(d_1,d_2)}} = 10000 \cdot \frac{1,06^3-1}{0,06} = 31836,00 \\
K_{(d_2,T)} &= R \cdot \frac{(1+i_{(d_2,T)})^{(T-d_2)}-1}{i_{(d_2,T)}} = 10000 \cdot \frac{1,07^5-1}{0,07} = 57507,39
\end{aligned}
$$

Die Endwerte der Teilrenten sind aufzuzinsen bis zum Laufzeitende:

$$
\begin{aligned}
K^*_{(0,d_1)} &= K_{(0,d_1)} \cdot (1 + i_{(d_1,d_2)})^{(d_2-d_1)} \cdot (1 + i_{(d_2,T)})^{(T-d_2)} = 43101,25 \cdot 1,06^3 \cdot 1,07^5 = 71998,98 \\
K^*_{(d_1,d_2)} &= K_{(d_1,d_2)} \cdot (1 + i_{(d_2,T)})^{(d_T-d_2)} = 31836,00 \cdot 1,07^5 = 80657,08 \\
K^*_{(d_2,d_T)} &= K_{(d_2,d_T)} = 57507,39
\end{aligned}
$$

Schließlich sind die aufgezinsten Endwerte der Teilrenten zu addieren:

$$K_T = K^*_{(0,d_1)} + K^*_{(d_1,d_2)} + K_{(d_2,d_T)} = 71998,98 + 80657,08 + 57507,39 = 210163,45$$

Damit beläuft sich der Endwert nach 12 Jahren auf 210163,45 EUR.

3.4.2 dynamische Renten mit veränderlicher Rate

Grundsätzlich kann bei veränderlichen Raten in ähnlicher Form vorgegangen werden, wie bei veränderlichen Zinssätzen. Es werden Teilrenten für jedes Intervall konstanter Ratenbeträge berechnet, diese zum Laufzeitende aufgezinst und addiert. In diesem Abschnitt betrachten wir eine andere Form der veränderlichen Raten betrachtet, nämlich arithmetisch oder geometrisch wachsende Raten.

Renten mit arithmetisch steigenden Raten

Die Bildungsgesetze einer arithmetisch steigenden Rate lässt sich wie folgt beschreiben:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= R \\
R_2 &= R + \Delta \\
R_t &= R + (t-1) \cdot \Delta
\end{aligned}
$$

Dabei bezeichnet Δ den konstanten Zuwachs in jeder Periode.

Betrachte wir den Fall einer nachschüssigen Rente. Jede Teilrente (Ratenzahlung) wird nun an Hand der Restlaufzeit verzinst :

$$
\begin{aligned}
B_1 &= R \cdot q^{T-1} \\
B_2 &= (R + \Delta) \cdot q^{T-2} \\
... &= ... \\
B_t &= (R + (t-1) \cdot \Delta) \cdot q^{T-t} \\
... &= ... \\
B_T &= (R + (T-1) \cdot \Delta)
\end{aligned}
$$

Die Teilrenten B_t sind zu addieren. Allein diese Darstellung reicht schon für praktische Berechnungen.

$$K_T = \sum_{t=1}^{T} B_t = \sum_{t=1}^{T} (R + (t-1) \cdot \Delta) \cdot q^{T-t}$$

Selbstverständlich kann eine allgemeine Formel zur Berechnung des kumulierten Kapitals angegeben werden. Der interessierte Leser findet die Herleitung in der Anlage Unterabschnitt 5.1.1. Für vorschüssige

Renten ist zu beachten, dass die Raten etwas modifiziert aufzuzinsen sind. Ist bereits der Endwert für die nachschüssige Rente bekannt, genügt es, den Endwert mit dem Aufzinsfaktor q zu multiplizieren.

Illustrieren wir die Berechnung einer arithmetisch steigenden Rente am **Beispiel:**

Ein Anleger möchte 5 Jahre lang jährlich ständig wachsende Ratenzahlung leisten. Die erste Rate beträgt 1000 EUR. Jährlich möge sich die Rate um 100 EUR erhöhen. Die Ratenzahlungen sollen nachschüssig erfolgen. Der Jahreszinssatz betrage 5%. Praktisch sind das folgende 5 Zahlungen:

$$\begin{aligned}
R_1 &= R = 1000 \\
R_2 &= R + \Delta = 1000 + 100 = 1100 \\
R_3 &= R + 2 \cdot \Delta = 10002 \cdot 100 = 1200 \\
R_4 &= R + 3 \cdot \Delta = 10003 \cdot 100 = 1300 \\
R_5 &= R + 4 \cdot \Delta = 10004 \cdot 100 = 1400
\end{aligned}$$

Jeder dieser Raten ist bis zum Ende der Laufzeit zu verzinsen:

$$\begin{aligned}
B_1 &= R_1 \cdot q^{T-1} = 1000 \cdot q^{5-1} = 1000 \cdot 1,05^4 = 1215,51 \\
B_2 &= R_2 \cdot q^{T-2} = 1100 \cdot q^{5-2} = 1100 \cdot 1,05^3 = 1273,39 \\
B_1 &= R_3 \cdot q^{T-1} = 1200 \cdot q^{5-3} = 1200 \cdot 1,05^2 = 1323,00 \\
B_1 &= R_4 \cdot q^{T-1} = 1300 \cdot q^{5-4} = 1300 \cdot 1,05 = 1365,00 \\
B_1 &= R_5 \cdot q^{T-1} = 1400 \cdot q^{5-5} = 1400 = 1400,00
\end{aligned}$$

Die Summe der aufgezinsten Raten ergeben in der Summe den Endwert der nachschüssigen Rente nach 5 Jahren K_5:

$$K_5 = \sum_{t=1}^{5} B_t = 6576,90$$

Zum gleichen Resultat kommt man, wenn man die Formel zur Bestimmung des Endwertes aus der Anlage Unterabschnitt 5.1.1 verwendet:

$$K_T = \frac{(q^T - 1)}{(q-1)} \cdot \Big(\frac{\Delta}{q-1} - \frac{T \cdot \Delta}{q^T - 1} + R \Big) \tag{3.10}$$

oder für das Beispiel:

$$\begin{aligned}
K_T &= \frac{(1,05^5 - 1)}{(1,05-1)} \cdot \Big(\frac{100}{1,05-1} - \frac{5 \cdot 100}{1,05^5 - 1} + R \Big) \\
K_T &= 5,5256 \cdot \Big(2000 - 1.809,75 + 1000 \Big) = 6576,90
\end{aligned}$$

Den Endwert der entsprechenden vorschüssigen Rente K_5^* erhält man, indem man den Endwert der nachschüssigen Rente mit dem Aufzinsfaktor $q = 1,05$ multipliziert:

$$K_5^* = K_5 \cdot q = 6576,90 \cdot 1,05 = 6905,75$$

Es lassen sich ebenfalls die Barwerte BW der Rente bestimmen:

$$
\begin{aligned}
BW &= K_T \cdot \frac{1}{q^T} \\
BW &= K_5 \cdot \frac{1}{q^5} = 6576,90 \cdot \frac{1}{1,05^5} = 5152,47 \\
BW^* &= K_5^* \cdot \frac{1}{q^5} = 6905,75 \cdot \frac{1}{1,05^5} = 5410,84
\end{aligned}
$$

Renten mit geometrisch steigenden Raten

Die Bildungsgesetze einer geometrisch steigenden Rate lässt sich wie folgt beschreiben. Dabei gehen wir davon aus, dass die Ratenzahlung mit einem konstanten Wachstumstempo β wächst. Man spricht auch von einem exponentiellen Wachstum. Die Raten werden nachschüssig gezahlt:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= R \\
R_2 &= R \cdot (1+\beta) \\
R_t &= R \cdot (1+\beta)^{t-1}
\end{aligned}
$$

Jede Teilrente (Ratenzahlung) wird nun an Hand der Restlaufzeit verzinst :

$$
\begin{aligned}
B_1 &= R \cdot q^{T-1} \\
B_2 &= R \cdot (1+\beta) \cdot q^{T-2} \\
... &= ... \\
B_t &= (R \cdot (1+\beta)^{t-1}) \cdot q^{T-t} \\
... &= ... \\
B_T &= \cdot (1+\beta)^{T-1}
\end{aligned}
$$

Die Teilrenten B_t sind zu addieren.

$$
K_T = \sum_{t=1}^{T} B_t = \sum_{t=1}^{T} (R \cdot (1+\beta)^{t-1}) \cdot q^{T-t}
$$

Im Abschnitt Unterabschnitt 5.1.2 wird die allgemeine Formel zur Berechneung des Endwertes einer dynamischen Rente mit steigende geometrischen Ratenzahlung hergeleitet.

Hier erfolgt ein **Beispiel**:

Wieder erfolgen 5 jährliche nachschüssige Ratenzahlungen. Nun wird ein jährliches Wachstumstempo von 10% angenommen: Der Jahreszinssatz betrage wieder 5%: Die ratenzahlung entwickeln sich nach exponentiellem Wachstum:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= R = 1000 \\
R_2 &= R \cdot (1+\beta) = 1000 \cdot (1+0,1) = 1100 \\
R_3 &= R \cdot (1+\beta)^2 = 1000 \cdot (1+0,1)^2 = 1210 \\
R_4 &= R \cdot (1+\beta)^3 = 1000 \cdot (1+0,1)^3 = 1331 \\
R_5 &= R \cdot (1+\beta)^4 = 1000 \cdot (1+0,1)^4 = 1461,10
\end{aligned}
$$

Jeder dieser Raten ist bis zum Ende der Laufzeit zu verzinsen:

$$
\begin{aligned}
B_1 &= R_1 \cdot q^{T-1} = 1000 \cdot q^{5-1} = 1000 \cdot 1,05^4 = 1215,51 \\
B_2 &= R_2 \cdot q^{T-2} = 1100 \cdot q^{5-2} = 1100 \cdot 1,05^3 = 1273,39 \\
B_1 &= R_3 \cdot q^{T-1} = 1210 \cdot q^{5-3} = 1210 \cdot 1,05^2 = 1334,03 \\
B_1 &= R_4 \cdot q^{T-1} = 1331 \cdot q^{5-4} = 1331 \cdot 1,05 = 1397,55 \\
B_1 &= R_5 \cdot q^{T-1} = 1461,10 \cdot q^{5-5} = 1461,10
\end{aligned}
$$

Die Summe der aufgezinsten Raten ergeben in der Summe den Endwert der nachschüssigen Rente nach 5 Jahren K_5:

$$
K_5 = \sum_{t=1}^{5} B_t = 6681,58
$$

Der Endwert der nachschüssigen dynamischen Rente mit geometrisch steigenden Raten beträgt ohne Rundungsfehker 6681,58.

Zum gleichen Ergebnis kommt man, wenn die allgemeine Formel zur Berechnung des Endwertes bei Renten mit geometrisch steigenden Raten verwendet wird (siehe Anhang Unterabschnitt 5.1.2):

$$
\begin{aligned}
K_T &= R \cdot q^{T-1} \cdot \frac{(\frac{1+\beta}{q})^T - 1}{\frac{1+\beta}{q} - 1} \quad wenn\ (1+\beta) \neq q \\
K_5 &= 1000 \cdot 1,05^4 \cdot \frac{(\frac{1+0,1}{1,05})^5 - 1}{\frac{1+0,1}{1,05} - 1} = 6684,57
\end{aligned}
$$

Um den Endwert einer vorschüssigen Rente zu erhalten multiplizieren wir den Endwert der nachschüssigen Rente mit dem Aufzinsfaktor $q = 1,05$. Man erhält: $K_5^* = 7015,66$ EUR.

Aus den Endwerten lassen sich leicht auch die Barwerte BW berechnen.

$$
\begin{aligned}
BW &= K_T \cdot \frac{1}{q^T} \\
BW &= K_5 \cdot \frac{1}{q^5} = 6681,58 \cdot \frac{1}{1,05^5} = 5235,19 \\
BW &= K_5^* \cdot \frac{1}{q^5} = 7015,66 \cdot \frac{1}{1,05^5} = 5496,95
\end{aligned}
$$

Der Barwert der nachschüssigen Rente mit steigende Raten beträgt 5235,19 EUR, der der vorschüssigen Rente 5496,95 EUR.

Kapitel 4

Tilgungsrechnung

In diesem Abschnitt geht es um die Tilgung einer Schuld. Grundsätzlich kann die Tilgung einer Schuld durch eine einmalige Zahlung am Ende des Überlassungszeitraumes (der Laufzeit) erfolgen. Zurückbezahlt wird der Darlehensbetrag plus die aufgelaufenen Zinsen. Aus der Sicht des Darlehensgeber stellt sich der Leihprozess als Kapitalbildungsprozess dar, wobei die einzige Zahlung am Ende der Laufzeit erfolgt. Solche Tilgungsprozesse können mi dem Instrumentarium der geometrischen Verzinsung abgebildet werden und sollen hier nicht zusätzlich betrachtet werden.

Der Rückzahlungsprozess kann durch regelmäßige oder unregelmäßige Teiltilgungen charakterisiert werden. Betrachten wir zunächst den Fall einer unregelmäßigen Rückzahlung. Um den Rückzahlungsprozess nicht weiter zu komplizieren nehmen wir an, dass die unregelmäßigen Tilgungen und die partiellen Zinszahlungen nur am Ende einer Zinsperiode stattfinden dürfen. Dann kann man sich auf die exponentielle Verzinsung beschränken. Grundsätzlich kann diese Einschränkung jedoch fallen gelassen werden.

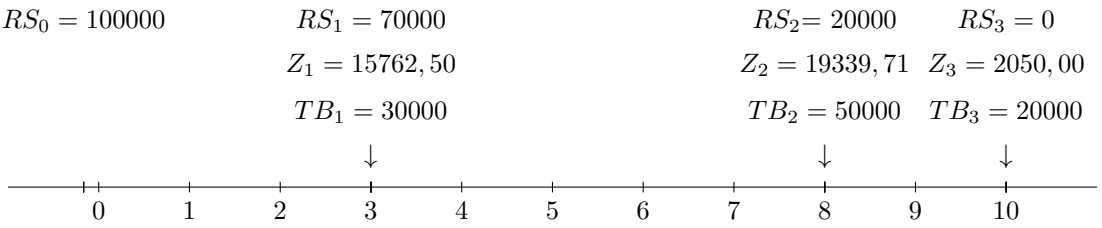
Beginnen wir mit einem **Beispiel:**

Eine Schuld von $RS_0 = 100000$ EUR soll in 10 Jahren getilgt werden. Die Bezeichnung der Anfangsschuld ist vielleicht etwas irreführen - RS_0 bedeutet die Restschuld zum Zeitpunkt $t = 0$, was allerdings auch korrekt ist. Es wird vereinbart, dass der erste Tilgungsbetrag nach 3 Jahren fällig wird und zwar in der Höhe von $TB_1 = 30000$ EUR (TB steht für Tilgungsbetrag), der zweite Tilgungsbetrag ($TB_2 = 50000$ EUR) nach 5 Jahren und der Rest ($TB_3 = 20000$ EUR) am Ende des Überlassungszeitraumes. Mit RS_1,RS_2 und RS_3 soll die Restschuld nach der Teiltilgung bezeichnet werden. Die Verzinsung erfolgt jährlich, gegeben ist ein Jahreszinssatz von 5%. Die aufgelaufenen Zinsen Z_1, Z_2, Z_3 bis zur jeweiligen Tilgung werden zum Tilgungstermin beglichen.

Die Zinszahlung werden entsprechend der exponentiellen Verzinsung berechnet:

$$Z_1 = 100000 \cdot [(1 + 0,05)^3 - 1] = 15762,50$$
$$Z_2 = 70000 \cdot [(1 + 0,05)^5 - 1] = 19339,71$$
$$Z_3 = 20000 \cdot [(1 + 0,05)^2 - 1] = 2050,00$$

Der Rückzahlungsprozess kann grafisch illustriert werden:



Auf die allgemeine Darstellung wird hier verzichtet.

In der Finanzmathematik wird der gesamte Zahlungsbetrag (Zinsen Z + Tilgungsrate TB) als **Annuität** AN bezeichnet.
In unserem Beispiel wären das 3 Annuitäten (AN_1,AN_2 und AN_3):

$$\begin{aligned} AN_i &= TB_i + Z_i, \quad i = 1, 2, 3 \\ AN_1 &= 30000 + 15762,50 = 45762,50 \\ AN_2 &= 50000 + 19339,71 = 69339,71 \\ AN_3 &= 20000 + 2050,00 = 22050,00 \end{aligned}$$

4.1 Tilgung einer Schuld in gleichen Tilgungsraten - Ratentilgung

Ausführlicher soll sich nun dem Tilgungsprozess mit **konstanten Tilgungsraten** in **gleichlangen Zinsperioden** gewidmet werden. Analog zu Zinsperioden kann die Tilgungsperiode als Zeitperiode zwischen zwei aufeinanderfolgende Tilgungen verstanden werden. Zinsberechnung, Zinszahlung und Tilgung können grundsätzlich zu unterschiedlichen Zeitpunkten stattfinden. Denkbar sind viele Kombinationen der drei Perioden. Wir konzentrieren wir uns aber auf folgende zwei Fälle:

1. Zinsperiode und Tilgungsperiode stimmen überein. Typisch wären Zinsperiode und die Tilgungsperiode von einem Jahr und gegebenen Jahreszinssatz. Eine andere Möglichkeit wäre, wenn Zinsperioden sowie die Tilgungsperiode unterjährig sind, Die Verzinsung erfolgt dann in unterjährigen Zinsperioden. Gegeben muss der periodenspezifische, unterjährige Zinssatz sein.

2. Zinsperiode unterscheiden sich von der Tilgungsperiode. Wir betrachten den Fall, dass die Zinsperiode ein Jahr beträgt, die Tilgungsperioden jedoch unterjährig sind, z.B. Monatliche Tilgungen.

4.1.1 Zinsperiode und Tilgungsperiode stimmen überein

Die Laufzeit einer Anfangsschuld sei in m Zinsperioden bzw. Zinszahlungen unterteilt. Am Ende jeder dieser Perioden erfolgt die Zinsberechnung und die Zahlung der Annuität $AN_j = TB_j + Z_j$, $j = 1, 2, ..., m$. Gegeben sei der periodenspezifische Zinssatz.

Der Tilgungsbetrag wird berechnet, in dem die Schuld (oder Restschuld im Moment $t = 0$) durch die Anzahl der Zinsperioden dividiert wird:

$$\begin{aligned} TB_i &= \frac{RS_0}{m} \quad i = 1, 2, ..., m \\ TB_i &= TB = \quad const. \end{aligned}$$

Die Restschuld RS_i berechnet sich aus Anfangsschuld RS_0 und den Tilgungsbeträgen TB:

$$\begin{aligned} RS_1 &= RS_0 - TB = RS_0 \cdot (1 - \frac{1}{m}) \\ RS_2 &= RS_0 - 2 \cdot TB = RS_0 \cdot (1 - \frac{2}{m}) \\ ... &= ... \\ RS_m &= RS_0 - m \cdot TB = RS_0 \cdot (1 - \frac{m}{m}) = 0 \end{aligned}$$

Die Zinsen werden rekursiv wie folgt berechnet:

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= RS_0 \cdot i \\
Z_2 &= RS_1 \cdot i = RS_0 \cdot (1 - \frac{1}{m}) \cdot i \\
... &= ... \\
Z_m &= RS_{m-1} \cdot i = RS_0 \cdot (1 - \frac{m-1}{m}) \cdot i
\end{aligned}
$$

Die Annuitäten ergeben sich aus den Tilgungsbeträgen und Den Zinsen:

$$
\begin{aligned}
AN_1 &= TB_1 + Z_1 = \frac{RS_0}{m} + RS_0 \cdot i \\
AN_2 &= TB_2 + Z_2 = \frac{RS_0}{m} + RS_0 \cdot (1 - \frac{1}{m}) \cdot i \\
... &= ... \\
AN_m &= TB_m + Z_m = \frac{RS_0}{m} + RS_0 \cdot (1 - \frac{m-1}{m}) \cdot i
\end{aligned}
$$

Oder zusammengefasst für die Zinsperiode j:

$$TB = \frac{RS_0}{m} \tag{4.1}$$

$$RS_j = RS_0 - j \cdot TB = RS_0 \cdot (1 - \frac{j}{m}) \tag{4.2}$$

$$Z_j = RS_{j-1} \cdot i = RS_0 \cdot (1 - \frac{j-1}{m}) \cdot i \tag{4.3}$$

$$AN_j = TB_j + Z_j = \frac{RS_0}{m} + RS_0 \cdot (1 - \frac{j-1}{m}) \cdot i \tag{4.4}$$

Die insgesamt gezahlten Zinsen Z betragen:

$$Z = \sum_{j=1}^{m} RS_0 \cdot (1 - \frac{j-1}{m}) \cdot i \tag{4.5}$$

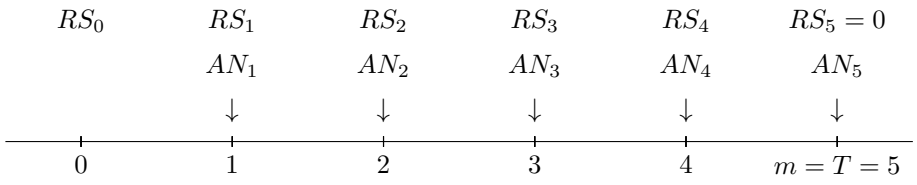
Beispiel

Eine Schuld von 100000 EUR soll durch gleiche Tilgungsraten in 5 Jahren getilgt werden. Die Verzinsung erfolgt jährlich bei einem gegebenen Jahreszinssatz von 5%. Die Zinsen werden am Ende jeder Zinsperiode fällig. Zu berechnen sind die jährlichen Annuitäten:
Der konstante Tilgungsbetrag für alle Zins(zahlungs)perioden beträgt $TB = \frac{100000}{5} = 20000$. Die Größen RS_j, Z_j und AN_j $\forall j$ sind tabellarisch aufgeführt:

j	RS_j	TB	Z_j	AN_j
0	100000			
1	80000	20000	5000	25000
2	60000	20000	4000	24000
3	40000	20000	3000	23000
4	20000	20000	2000	22000
5	0	20000	1000	21000

Insgesamt werden 15000 EUR Zinsen gezahlt.

Grafisch ergibt sich folgendes Bild:



Das Berechnungsschema kann ebenfalls angewendet werden, wenn die Zinsperioden und Zinszahlungsperioden unterjährig sind und ein periodenspezifischer unterjähriger Zinssatz gegeben ist. Ist der übliche Jahreszinssatz gegeben, muß der periodenspezifischer unterjähriger Zinssatz aus dem Jahreszinssatz abgeleitet werden, siehe Unterabschnitt 2.2.3.

Beispiel

Ein Konsumentenkredit von 2000 EUR wird monatlich verzinst. Die Annuitäten werden ebenfalls monatlich fällig (am Ende jedes Monats). Insgesamt sind 5 Ratenzahlungen vorgesehen. Der Monatszinssatz beträgt 1%.

Der konstante Tilgungsbetrag für alle Zins(zahlungs)perioden beträgt $TB = \frac{2000}{5} = 400$. Die Größen RS_j, Z_j und AN_j $\forall j$ sind tabellarisch aufgeführt:

j	RS_j	TB	Z_j	AN_j
0	2000			
1	1600	400	20	420
2	1200	400	16	416
3	800	400	12	412
4	400	400	8	408
5	0	400	4	404

Insgesamt werden 60 EUR Zinsengezahlt.

Die gesamten Zinsen können nach Formel (4.5) berechnet werden:

$$\begin{aligned} Z &= RS_0 \cdot i \cdot \left(1 + (1 - \frac{1}{m}) + (1 - \frac{2}{m}) + ... + (1 - \frac{m-1}{m})\right) = \\ &= RS_0 \cdot i \cdot \left(m - \frac{1}{m} \cdot (1 + 2 + ... + m - 1)\right) \\ &= RS_0 \cdot i \cdot \left(m - \frac{1}{m \cdot \frac{(m-1) \cdot m}{2}}\right) \end{aligned}$$

$$Z = RS_0 \cdot i \cdot \frac{1+m}{2} \tag{4.6}$$

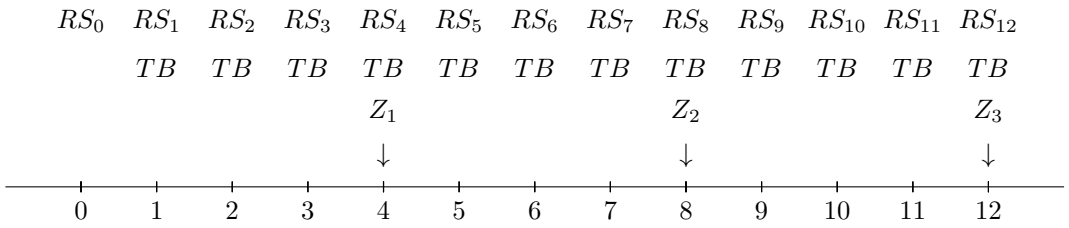
Die allgemeine Darstellung ist nützlich, wenn die Anzahl der Zinsperioden sehr groß ist und eine rekursive Lösung viel Rechen- und Schreibaufwand erfordert.

Man könnte für das Beispiel die Gesamtzinsen nach der oben angeführten Formel direkt berechnen:

$$Z = RS_0 \cdot i \cdot \frac{1+m}{2}$$
$$Z = 2000 \cdot 0,01 \cdot \frac{6}{2} = 60$$

4.1.2 Zinsperiode stimmen nicht mit der Tilgungsperiode überein

Im weiteren soll ein Fall betrachtet werden, der nicht unüblich ist. Die Zinsperiode ist ein Jahr, die Tilgungsraten und sind unterjährig zu zahlen, während die aufgelaufenen Zinsen am Ende jeder Zinsperiode bezahlt werden.Es wird unterstellt , dass der Jahreszinssatz $i = 8\%$ und damit der Vierteljahreszinssatz $i_{\frac{1}{4}} = 2\%$ betragen. Die Anfangsschuld sei $RS_0 = 24000$ EUR und die "day count convention:" 30/360 gilt. Der Tilgungszeitraum (Laufzeit) T ist in jeweils m unterjährige Zinsperioden unterteilt. Man erhält folgendes Bild, wenn wir eine Laufzeit von drei Jahren und vierteljährliche Zinsberechnungen und Zinszahlungen unterstellen. Die Anfangsschuld RS_0 wird in $T \cdot m = 3 \cdot 4 = 12$ Tilgungsperioden unterteilt, die Tilgungsraten werden nachschüssig gezahlt, d.h. am Ende der jeweiligen Tilgungsperiode. Der Tilgungsrate errechnet sich aus der Anfangsschuld und der Anzahl der Tilgungsperioden ($TB = \frac{RS_0}{12}$).



Die Restschuld berechnet sich folgendermaßen:

$$RS_1 = RS_0 - TB$$
$$RS_2 = RS_0 - 2 \cdot TB$$
$$.....$$
$$RS_{T \cdot m} = RS_0 - T \cdot m \cdot TB = 0$$

Die Zinsen der ersten Zinsperiode errechnen sich:

$$\begin{aligned} Z_1 &= RS_0 \cdot \frac{i}{4} + RS_1 \cdot \frac{i}{4} + RS_2 \cdot \frac{i}{4} + RS_3 \cdot \frac{i}{4} \\ &= \frac{i}{4} \cdot \Big(RS_0 + RS_1 + RS_2 + RS_3\Big) = \frac{i}{4} \cdot \Big(RS_0 + (RS_0 - TB) + (RS_0 - 2 \cdot TB) + (RS_0 - 3 \cdot TB)\Big) \\ &= \frac{i}{4} \cdot \Big(4 \cdot RS_0 - TB \cdot (1+2+3) = \frac{i}{4} \cdot \Big(4 \cdot RS_0 - 6 \cdot TB\Big) \\ &= 0,02 \cdot \Big(4 \cdot 24000 - 6 \cdot 2000\Big) = 1680 \end{aligned}$$

oder allgemein:

$$Z_1 = \frac{i}{m} \cdot \Big(m \cdot RS_0 - \frac{(m-1) \cdot m}{2} \cdot TB\Big)$$

Für die restlichen 2 Jahre werden die Zinsen analog berechnet. Es ist allerdings zu beachten, dass sich die Restschulden im Vergleich zur ersten Zinsperiode ändern:

$$
\begin{aligned}
Z_2 &= RS_4 \cdot \frac{i}{4} + RS_5 \cdot \frac{i}{4} + RS_6 \cdot \frac{i}{4} + RS_7 \cdot \frac{i}{4} \\
&= \frac{i}{4} \cdot \Big(RS_4 + RS_5 + RS_6 + RS_7 \Big) = \frac{i}{4} \cdot \Big((RS_0 - 4 \cdot TB) + (RS_0 - 5 \cdot TB) + (RS_0 - 6 \cdot TB) + (RS_0 - 7 \cdot TB) \Big) \\
&= \frac{i}{4} \cdot \Big(4 \cdot RS_0 - TB(4 + 5 + 6 + 7) \Big) \\
&= \frac{i}{4} \cdot \Big(4 \cdot RS_0 - 22 \cdot TB \Big) \\
&= 0,02 \cdot \Big(4 \cdot 24000 - 22 \cdot 2000 \Big) = 1040
\end{aligned}
$$

oder allgemein:

$$
\begin{aligned}
Z_2 &= \frac{i}{m} \cdot \Big(m \cdot RS_0 - TB \cdot [1 \cdot m + (1 \cdot m + 1) + ...(1 \cdot m + m - 1)] \Big) \\
Z_2 &= \frac{i}{m} \cdot \Big(m \cdot RS_0 - TB \cdot [1 \cdot m^2 + (1 + 2 + ... + m - 1)] \Big) \\
Z_2 &= \frac{i}{m} \cdot \Big(m \cdot RS_0 - TB \cdot [1 \cdot m^2 + (\frac{m \cdot (m-1)}{2})] \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_3 &= RS_8 \cdot \frac{i}{4} + RS_9 \cdot \frac{i}{4} + RS_{10} \cdot \frac{i}{4} + RS_{11} \cdot \frac{i}{4} \\
&= \frac{i}{4} \cdot \Big(RS_8 + RS_9 + RS_{10} + RS_{11} \Big) = \\
&= \frac{i}{4} \cdot \Big((RS_0 - 8 \cdot TB) + (RS_0 - 9 \cdot TB) + (RS_0 - 10 \cdot TB) + (RS_0 - 11 \cdot TB) \Big) \\
&= \frac{i}{4} \cdot \Big(4 \cdot RS_0 - TB \cdot (8 + 9 + 10 + 11) \Big) \\
&= 0,02 \cdot \Big(4 \cdot 24000 - 38 \cdot 2000 \Big) = 400
\end{aligned}
$$

oder allgemein:

$$
\begin{aligned}
Z_3 &= \frac{i}{m} \cdot \Big(m \cdot RS_0 - TB \cdot [2 \cdot m + (2 \cdot m + 1) + ...(2 \cdot m + m - 1)] \Big) \\
Z_3 &= \frac{i}{m} \cdot \Big(m \cdot RS_0 - TB \cdot [2 \cdot m^2 + (1 + 2 + ... + m - 1)] \Big) \\
Z_3 &= \frac{i}{m} \cdot \Big(m \cdot RS_0 - TB \cdot [2 \cdot m^2 + (\frac{m \cdot (m-1)}{2})] \Big)
\end{aligned}
$$

bzw. :

$$
\begin{aligned}
Z_T &= \frac{i}{m} \cdot \Big(m \cdot RS_0 - TB \cdot [(T-1) \cdot m + ((T-1) \cdot m + 1) + ...((T-1) \cdot m + m - 1)] \Big) \\
Z_T &= \frac{i}{m} \cdot \Big(m \cdot RS_0 - TB \cdot [(T-1) \cdot m^2 + (1 + 2 + ... + m - 1)] \Big) \\
Z_T &= \frac{i}{m} \cdot \Big(m \cdot RS_0 - TB \cdot [(T-1) \cdot m^2 + (\frac{m \cdot (m-1)}{2})] \Big)
\end{aligned}
$$

Für die gesamten Zinsen gilt:

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 = \frac{i}{4} \cdot \Big(4 \cdot 3 \cdot RS_0 - TB \cdot [1 + 2 + ... + 11]\Big)$$

$$Z = 0,02 \cdot \Big(4 \cdot 3 \cdot 24000 - 2000 \cdot [1 + 2 + ... + 11]\Big) = 0,02 \cdot \Big(12 \cdot 24000 - 2000 \cdot 66\Big) = 3120$$

bzw.

$$Z = Z_1 + Z_2 + ... + Z_T = \frac{i}{m} \cdot \Big(m \cdot T \cdot RS_0 - TB \cdot [1 + 2 + ... + (m \cdot T - 1)]\Big)$$

$$Z = \frac{i}{m} \cdot \Big(m \cdot T \cdot RS_0 - TB \cdot [\frac{(m \cdot T - 1) \cdot m \cdot T}{2}]\Big) \tag{4.7}$$

Es erfolgen damit folgende Zahlungen, wenn unterstellt wird, dass der Jahreszinssatz $i = 8\%$ und die Anfangsschuld $RS_0 = 24000$ EUR betragen und die "day count convention:" 30/360 gilt. . Die konstante Tilgungsrate beträgt $TB = \frac{24000}{12} = 2000$.

j	RS_j	TB	Z_j	AN_j
0	24000			
1	22000	2000	480	2000
2	20000	2000	440	2000
3	18000	2000	400	2000
4	16000	2000	360	3680
5	14000	2000	320	2000
6	12000	2000	280	2000
7	10000	2000	240	2000
8	8000	2000	200	3040
9	6000	2000	160	2000
10	4000	2000	120	2000
11	2000	2000	80	2000
12	0	2000	40	2400

Die Gesamtzinsen belaufen sich auf 3120 EUR ($Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 = 1680 + 1040 + 400 = 3120$).

4.2 Tilgung einer Schuld in gleichen Annuitäten - Annuitätentilgung

In den bisherigen Betrachtungen zur Tilgung von Schulden gingen wir davon aus, dass der Tilgungsbetrag TB eine konstante Größe ist. Das macht es einfach, die Restschuld zu einen beliebigen Zinszahlungs- oder Tilgungstermin zu berechnen. Ein Nachteil dabei ist, dass sich alle Zahlungen in der Form von Annuitäten voneinander unterscheiden. Werden die Zahlungen von einem Girokonto abgebucht, müsste jede Abbuchung einzeln ausgelöst werden. Eine Möglichkeit, dass zu umgehen ist die Verwendung von konstanten Annuitäten AN, die sich wie vorher aus Zinszahlung Z und Tilgungsbetrag TB zusammen setzen.

$$AN_j = TB_j + Z_j = \quad const.$$

Wenn die Annuität konstant bleibt, ändern sich ständig die Restschuld K_j und damit auch die Zinsen und der Tilgungsbetrag. Da die Restschuld abnimmt, werden sich auch die Zinsen verringern. Folglich steigt dann bei konstanter Annuität der Tilgungsbetrag.

Im ersten Schritt betrachten wir den Fall, wenn Tilgungsperiode und Zinsperiode gleich sind:

4.2.1 Zinsperiode und Tilgungsperiode stimmen überein

Eine Schuld RS_0 wird in m konstanten Annuitäten AN_j zurückgezahlt. Die Zinsperiode entspricht der Tilgungsperiode. Gegeben sei ein zinsperiodenspezifischer Zinssatz i. Die Zinsberechnung erfolgt am Ende

jeder Zinsperiode, die Zinszahlung Z_j für diese Periode ist wie auch der Tilgungsbetrag TB_j Bestandteil der konstanten Annuität AN.

Die Restschuld RS_j kann wie folgt berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
RS_1 &= RS_0 \cdot (1+i) - AN \\
RS_2 &= RS_1 \cdot (1+i) - AN = (RS_0 \cdot (1+i) - AN) \cdot (1+i) - AN = RS_0 \cdot (i+i)^2 - AN \cdot [(1+(1+i)] \\
&... = ... \\
RS_j &= RS_{j-1} \cdot (1+i) - AN = RS_0 \cdot (1+i)^j - AN \cdot [(1+(1+i)+(1+i)^2 + ... + (1+i)^{j-1}] \\
&... = ... \\
RS_m &= RS_{m-1} \cdot (1+i) - AN = RS_0 \cdot (1+i)^m - AN \cdot [(1+(1+i)+(1+i)^2 + ... + (1+i)^{m-1}] \\
RS_m &= RS_0 \cdot (1+i)^m - AN \cdot \frac{(1+i)^m - 1}{i}
\end{aligned}
$$

Für eine beliebige Zinsperiode ist die Restschuld:

$$
\begin{aligned}
RS_j &= RS_{j-1} \cdot (1+i) - AN = RS_0 \cdot (1+i)^j - AN \cdot [(1+(1+i)+(1+i)^2 + ... + (1+i)^{j-1}] \\
RS_j &= RS_0 \cdot (1+i)^j - AN \cdot \frac{(1+i)^j - 1}{i}
\end{aligned}
$$

Aus den Restschulden lassen sich einfach die Tilgungsbeträge berechnen:

$$
\begin{aligned}
TB_1 &= RS_0 - RS_1 \\
TB_2 &= RS_2 - RS_1 \\
&... = ... \\
TB_m &= RS_m - RS_{m-1}
\end{aligned}
$$

Ein anderer Weg zur Bestimmung der Tilgungs- und der Zinsbeträgeist die rekursive Berechnung. Zunächst wird der Tilgungsbetrag TB_1 für die erste Zinsperiode bestimmt. Der Tilgungsbetrag der Folgenden Perioden unterschneidet sich von der vorangegangenen Periode nur durch die Zinsersparnis aufgrund der Tilgung. Dem vorangegangenen Tilgungsbetrag ist die Zinsersparnis hinzuzufügen:

$$
\begin{aligned}
TB_1 &= AN - RS_0 \cdot i = AN - Z_1 \\
TB_2 &= TB_1 + TB_1 \cdot i = TB_1 \cdot (1+i) = AN - Z_2 \\
&... = ... \\
TB_m &= TB_{m-1} + TB_{m-1} \cdot i = TB_{m-1} \cdot (1+i) = TB_1 \cdot (1+i)^{m-1} = AN - Z_m \\
&\quad \textit{oder} \\
TB_m &= [AN - RS_0 \cdot i] \cdot (1+i)^{m-1}
\end{aligned}
$$

Die Zinsbeträge lassen sich aus Tilgungsbetrag und Annuität berechnen:

$$Z_j = AN - TB_j$$

Die Summe aller Tilgungsbeträge ergibt selbstverständlich die Restschuld:

$$\sum_{j=1}^{m} TB_j = n \cdot AN - \sum_{j=1}^{m} Z_j = RS_0$$

woraus sich der gesamte Zinsbetrag berechnen lässt:

$$\sum_{j=1}^{m} Z_j = n \cdot AN - \sum_{j=1}^{m} TB_j$$

Noch offen ist, wie die Höhe der konstanten Annuiät bestimmt werden kann. Sie kann berechnen werden, wenn die Restschuld nach der Zahlung der letzten Annuität gleich Null gesetzt wird: $RS_m = 0$. Die Schuld ist vollständig getilgt:

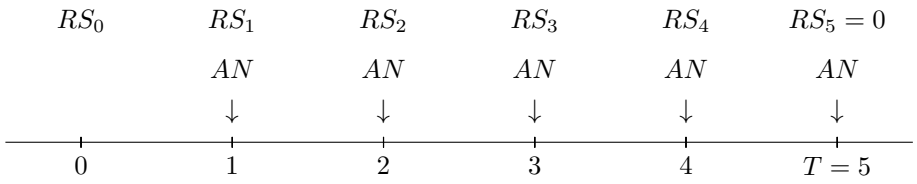
$$RS_0 \cdot (1+i)^m = AN \cdot \frac{(1+i)^m - 1}{i}$$
$$AN = RS_0 \cdot (1+i)^m \cdot \frac{i}{(1+i)^m - 1}$$

Beispiel 1 (aus dem Unterabschnitt 4.1.1)

Eine Schuld von 100000 EUR soll durch gleiche Annuitäten in 5 Jahren getilgt werden. Die Verzinsung erfolgt jährlich bei einem gegebenen Jahreszinssatz von 5%. Die Zinsen werden am Ende jeder Zinsperiode fällig. Zu berechnen ist die konstante jährliche Annuitäten:

$$AN = RS_0 \cdot (1+i)^m \cdot \frac{i}{(1+i)^m - 1}$$
$$= 100000 \cdot (1,05)^5 \cdot \frac{0,05}{(1,05)^5 - 1} = 23097,48$$

Grafisch ergibt sich für den Tilgungsprozess folgendes Bild:



Der konstante Annuität für alle Zins(zahlungs)perioden beträgt $AN = 23097,48$. Die Größen RS_j, Z_j und TB_j $\forall j$ können daraus berechnet werden und sind tabellarisch aufgeführt:

j	RS_j	TB	Z_j	AN_j
0	100000			
1	81902,52	18097,48	5000	23097,48
2	62900,17	19002,35	4095,12	23097,48
3	42947,70	19952,47	3145,01	23097,48
4	21997,60	20950,10	2147,38	23097,48
5	0	21997,60	1099,88	23097,48

Insgesamt werden 15.487,39 EUR Zinsengezahlt. Die Zinsen fallen von anfangs 5000,00 EUR auf 1099,88 EUR. Die Tilgungsbeträge steigen von 18097,48 EUR auf 21997,60 EUR

In diesem Beispiel betragen Zins- und Tilgungsperiode genau ein Jahr. Wie in der Tilgungsrechnung mit konstantem Tilgungsbetrag lässt sich das Berechnungsschema auch auf unterjährige Zins- und Tilgungsperioden anwenden. Voraussetzung ist ein periodenspezifischer Zinssatz. Betrachten wir das zweite Beispiel aus Unterabschnitt 4.1.1

Beispiel 2

Ein Konsumentenkredit von 2000 EUR wird monatlich verzinst. Die Annuitäten werden ebenfalls monatlich fällig (am Ende jedes Monats). Insgesamt sind 5 Zahlungen vorgesehen. Der Monatszinssatz beträgt 1%.

Die konstante Annuität für alle Zins(zahlungs)perioden beträgt $AN = 412,08$.

$$\begin{aligned} AN &= RS_0 \cdot (1+i)^m \cdot \frac{i}{(1+i)^m - 1} \\ &= 2000 \cdot (1,01)^5 \cdot \frac{0,01}{(1,01)^5 - 1} = 412,08 \end{aligned}$$

Die Größen RS_j, Z_j und AN_j $\forall j$ sind tabellarisch aufgeführt:

j	RS_j	TB	Z_j	AN_j
0	2000			
1	1607,92	392,08	20	412,08
2	1211,92	396,00	16,08	412,08
3	811,96	399,96	12,12	412,08
4	408,00	403,96	8,12	412,08
5	0	408,00	4,08	412,08

Insgesamt werden 64,28 EUR Zinsen gezahlt.

Eine häufige Fragestellung ist die Tilgungsdauer wenn eine gewünschte Annuität gegeben ist. Beispielsweise soll die Annuität für das obige Beispiel 300 EUR nicht überschreiten, weil die monatliche Belastung für den Kunden zu groß ist.

Die Formel zur Berechnung der konstanten Annuität ist nach m umzustellen.

$$\begin{aligned} AN &= RS_0 \cdot (1+i)^m \cdot \frac{i}{(1+i)^m - 1} \\ m &= \frac{-\ln\left(1 - \frac{i \cdot RS_0}{AN}\right)}{\ln(1+i)} \end{aligned}$$

Wird als Annuität 300 EUR festgelegt, erhält man;

$$m = \frac{-\ln\left(1 - \frac{0,01 \cdot 2000}{300}\right)}{\ln(1,01)} = 6,93$$

Formal wären 6,93 Monate Annuitäten zu zahlen. Praktisch werden 6 Monate Annuitäten n der Höhe von 300,00 EUR gezahlt und im 7. Monat muss eine korrigierte Annuität entrichtet werden. Um diese zu bestimmen muss zunächst die Restschuld nach 6 Monaten bestimmt werden. Tabellarisch ergibt sich folgendes Bild:

j	RS_j	TB	Z_j	AN_j
0	2000			
1	1720,00	280,00	20,00	300
2	1437,20	282,80	17,20	300
3	1151,57	285,63	14,38	300
4	863,08	288,48	11,52	300
5	571,71	291,37	8,63	300
6	277,43	294,28	5,71	300
7	0	277,43	2,77	280.03

Die Restschuld kann ebenfalls folgendermaßen berechnet werden:

$$\begin{aligned} &allgemein \\ RS_j &= RS_0 \cdot (1+i)^j - AN \cdot \frac{(1+i)^j - 1}{i} \\ &oder \;\; j = 6 \\ RS_6 &= 2000 \cdot (1,01)^6 - 300 \cdot \frac{(1,01)^6 - 1}{0,01} = 277,43 \end{aligned}$$

Die Restschuld nach 6 Monaten beträgt 277,43 EUR. Diese Restschuld muss noch zum Monatszinssatz von1% verzinst werden:

$$TB_7 = RS_6 + Z_7 = RS_6 \cdot (1+i) = 277,43 \cdot 1,01 = 280,20$$

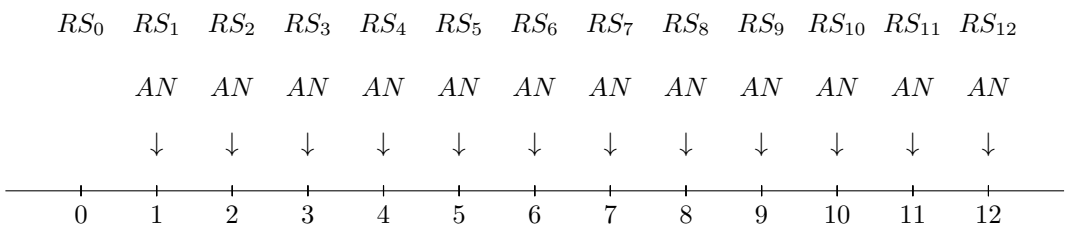
Am Ende des 7. Monats ist eine korrigierte Annuität von 280,20 EUR zu zahlen. Zusammen mit den 6 Annuitäten von 300,00 EUR ist damit Schuld von 2000,00 EUR getilgt.

4.2.2 Tilgungsperiode stimmen nicht mit der Zinsperiode überein

Es existieren viele Kombinationen, in denen Zinsperioden und Tilgungsperioden nicht übereinstimmen. Wir beschränken uns auf den Fall, dass die Annuitäten unterjährig bezahlt werden. Das bedeutet,dass sowohl Tilgungsbetrag und Zinsen unterjährig berechnet werden müssen. Die Verzinsung erfolgt jährlich, d.h. die Zinsperiode beträgt ein Jahr und unterscheidet sich damit von der Tilgungsperiode.

Wenn ähnlich wie im Unterabschnitt 4.1.2 bei einer Laufzeit T bis zu 3 (allgemein m) Jahren jedes Jahr in 4 Perioden (allgemein n Perioden) unterteilt werden, in denen die vierteljährige Annuität AN fällig wird. Die Annuitäten werden nachschüssig gezahlt. Die Verzinsung erfolgt jährlich bei gegebenen Jahreszinssatz von 4%. Die vierteljährige Annuität wird so berechnet, dass nach 12 Perioden (allgemein $m \cdot n$ Perioden) die gesamte Schuld getilgt ist. Da die Annuitäten vierteljährig gezahlt werden ist der Zins Z_j auch vierteljährig zu berechnen (anteilig für die entsprechende Restschuld). Das betrifft ebenfalls die Tilgungsbeträge TB_j. Insgesamt sind bis zu 12 Annuitäten zu zahlen, bestehend aus Tilgungsbeträgen und Zinsen.

Der Tilgungsprozess ist grafisch dargestellt:



Würden die Annuitäten nicht quartalsweise sonder jährlich gezahlt werden, müssten die Annuitäten verzinst am Ende der Laufzeit, der aufgezinsten Anfangsschuld entsprechen.Das bedeutet, dass gilt:

$$RS_0 \cdot (1+i)^m = AN_{p/a} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Daraus lässt sich die Höhe der ganzjährigen Annuität $AN_{p/a}$ berechnen:

$$\begin{aligned} AN_{p/a} &= \frac{RS_0 \cdot (1+i)^m}{\frac{(1+i)^m - 1}{i}} \\ AN_{p/a} &= \frac{24000 \cdot (1,04)^3}{\frac{(1,04)^3 - 1}{0,04}} \\ AN_{p/a} &= 8648,36 \end{aligned}$$

Für die Restschuld und die jährlichen Zinszahlungen gilt

$$\begin{aligned} RS_m &= RS_0 \cdot (1+i)^m - AN_{p/a} \cdot \frac{(1+i)^m - 1}{i} \\ Z_m &= AN_{p/a} - RS_m \end{aligned}$$

In der nachfolgenden Tabelle sind die Größen RS_j, Z_j und $A_{p/a}$ $\forall j = 1, 2, 3$ angeführt:

j	RS_j	TB	Z_j	$A_{p/a}$
0	24000			
1	16311,64	7688,36	960,00	8648,36
2	8315,75	7995,89	652,47	8648,36
3	0,02	8315,73	332,63	8648,36

Die ganzjährige Annuität $AN_{p/a}$ ist nun in unterjährige (vierteljährige) Annuitäten $AN_{\frac{1}{n}}$ umzurechnen. Das Problem wurde schon in der Rentenrechnung behandelt. siehe Abschnitt 3.3. Das dort berechnete Kapital K_1 nach dem ersten Jahr bei unterjährigen Ratenzahlungen R inklusive Zinsen Z_1 betrug:

$$\begin{aligned} K_1 = R \cdot n + Z_1 &= R \cdot n + R \cdot i \cdot (\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + ... + \frac{n-n}{n}) \\ &= R \cdot [n + i \cdot \frac{n-1}{2}] \end{aligned}$$

angewandt auf unsere Problematik:

$$\begin{aligned} AN_{p/a} &= AN_{\frac{1}{n}} \cdot n + Z_1 \\ &= AN_{\frac{1}{n}} \cdot [n + i \cdot \frac{n-1}{2}] \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$AN_{\frac{1}{n}} = \frac{AN_{p/a}}{[n + i \cdot \frac{n-1}{2}]}$$

$$AN_{\frac{1}{4}} = \frac{8.648,36}{[4 + 0,04 \cdot \frac{3}{2}]}$$

$$AN_{\frac{1}{4}} = 2130,14$$

Die vierteljährige Annuität beträgt 2130,14 EUR.

Nach m (3) Jahren und $m \cdot n$ (12) gezahlten Annuitäten ist die Schuld RS_0 von 24000 EUR vollständig getilgt. Mit den Annuitäten $AN_{\frac{1}{m}}$ ($A_{\frac{1}{4}}$) wird in $m \cdot n$ (3) Jahren folgendes Kapital K_n (K_3) erwirtschaftet:

$$K_m = AN_{\frac{1}{n}} \cdot \left[m + \frac{(m-1) \cdot i}{2}\right] \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$K_3 = AN_{\frac{1}{4}} \cdot \left[4 + \frac{(4-1) \cdot 0,04}{2}\right] \cdot \frac{(1+0,04)^3 - 1}{0,04}$$

$$K_3 = 2130,14 \cdot \left[4 + \frac{3 \cdot 0,04}{2}\right] \cdot \frac{1,04^3 - 1}{0,04}$$

$$K_3 = 26996,75$$

Die aufgezinste Schuld bei jährlicher Verzinsung beträgt $RS_m \cdot (1+i)^m$ oder im Speziellen:

$$RS_0 \cdot (1+i)^m = RS_0 \cdot (1+0,04)^3 = 26996,74$$

Bis auf einen Rundungsfehler von 1 cent ist die aufgezinste Schuld gleich dem akkumulierten Kapital durch die unterjährig gezahlten Annuitäten.

4.3 Aufschläge bei der Tilgung einer Schuld

In diesem Abschnitt betrachten wir nur eine der Möglichkeiten, die Auszahlung eines Kreditbetrages zu modifizieren. Häufig findet bei Hypothekendarlehen die Reduktion des Auszahlungsbetrages durch ein sogenanntes **Disagio** statt. Der Auszahlungsbetrag wird prozentual um $\alpha\%$ der vereinbarten Kreditsumme reduziert. Die Motivation kann unterschiedlicher Natur sein. Unter Umständen kann das Disagio als Werbungskosten im Rahmen der Steuererklärung gelten gemacht werden. Steuerliche Aspekte werden im Rahmen der Finanzmathematik nicht behandelt, sollten jedoch für den Kreditnehmer bei der Bewertung der Konditionen mit berücksichtigt werden. Hier interessiert ein anderer Aspekt. Kredite mit Disagio verfügen in der Regel über ein anderen Zinssatz, als Kredite ohne Disagio. Das erschwert den Vergleich von Rückzahlungsbedingungen. Bevor Kredite mit und ohne Disagio verglichen werden, soll kurz das Prozedere der Berechnung der Tilgung mit Disagio betrachtet werden:

Der vereinbarte Kreditbetrag wird wie bisher üblich mit RS_0 (Restschuld am Beginn der Laufzeit) bezeichnet. Der gesamte Kreditbetrag wird mit einem Zinssatz von $i\%$ verzinst. Der vereinbarte Kreditbetrag RS_0 (Restschuld am Beginn der Laufzeit) ist entsprechend der Vorgehensweise der vorangegangenen Abschnitten zu tilgen. Neben dem Kreditbetrag ist der sogenannte Auszahlungsbetrag (der um das Disagio reduzierte Kreditbetrag), der mit AZ_0 bezeichnet wird, zu berücksichtigen. Der Auszahlungsbetrag ist für den Tilgungsprozess unerheblich und muss dazu nicht berücksichtigt werden. Wir beschränken uns auf den Fall der nachschüssigen Annuitätentilgung, wobei die Zinsperiode ein Jahr beträgt. Die Tilgung des vereinbarten Kreditbetrages RS_0 erfolge in jährlichen Annuitäten AN_t , t=1,2,...,T. Der

Auszahlungsbetrag AZ_0 wird wie folgt berechnet:

$$AZ_0 = RS_0 \cdot (1 - \alpha) \tag{4.8}$$

Die Frage wäre nun, zu welchen Zinssatz ist der Auszahlungsbetrag AZ_0 verzinst, wenn laut Kreditvertrag die gesamte Kreditsumme RS_0 zu einem Zinssatz $i\%$ ausgeliehen wird. Dem Kreditnehmer interessiert, unter welchen Umständen erbringt die Tilgung des Auszahlungsbetrages AZ_0 das gleiche Resultat wie die Tilgung der Restschuld RS_0.

Betrachten wir folgendes einfache Beispiel:

Kreditsumme (RS_0)	100000
Disagio α	6%
Zinssatz i	5%
Laufzeit T	10 Jahre

Der Auszahlungsbetrag AZ_0 beträgt :

$$\begin{aligned} AZ_0 &= RS_0 \cdot (1 - \alpha) \\ AZ_0 &= 100000 \cdot (1 - 0,06) = 94000 \end{aligned}$$

Die Annuitäten berechnen sich auf der Basis der vereinbarten Kreditsumme unter Verwendung des vertraglich vereinbarten Zinssatzes i:

$$\begin{aligned} AN &= RS_0 \cdot (1+i)^T \cdot \frac{i}{(1+i)^T - 1} \\ &= 100000 \cdot (1,05)^{10} \cdot \frac{0,05}{(1,05)^{10} - 1} = 12950,46 \end{aligned}$$

Es werden 10 Annuitäten in der Höhe von 12950,46 EUR gezahlt, die einer zu tilgenden Schuld von 100000,00 EUR entsprechen. Ausgezahlt werden jedoch nur 94000,00 EUR. Würde man die gleiche Annuität zur Tilgung der realen Schuld von 94000 EUR nutzen, entspräche das etwa einem Zinssatz von 0,0629463:

$$\begin{aligned} AN &= AZ_0 \cdot (1+i)^T \cdot \frac{i}{(1+i)^T - 1} \\ &= 94000 \cdot (1,0629463)^{10} \cdot \frac{0,0629463}{(1,0629463)^{10} - 1} = 12950,46 \end{aligned}$$

Unabhängig von der möglichen Steuerersparnis verwendet der Darlehnsgeber effektiv einen Sollzins von $6,29463\%$, deutlich mehr als die angegeben 5%. Das kann aber immer noch günstiger sein, beispielsweise als ein Kredit in Höhe von 100000 EUR zu $6,5\%$ ohne Disagio.

Es gibt eine Reihe weiterer Möglichkeiten, den Zinssatz durch Anwendung von Auf- und Abschlägen von der Kreditsumme zu modifizieren. Einige solcher Modifikationen sind im Buch [Bos91] zu finden. Es empfiehlt sich, immer den effektiven Zinssatz zu berechnen, der alle Modifikationen der Kreditbedingungen berücksichtigt. Damit ist es möglich, verschiedene Kredite mit unterschiedlichen Kreditbedingungen zu vergleichen.

4.4 Änderung der Rückzahlungsbedingungen bei der Tilgung einer Schuld

Langfristige Kreditverträge werden in der Regel zunächst für eine Teilperiode abgeschlossen und danach in Abhängigkeit von den Marktbedingungen neu verhandelt. Ein wesentliches Argument sind die Änderung der Zinsen. Um neue Bedingungen für die Fortführung des Kredites abzusprechen, muss man den Zeitwert des Kredites zum Zeitpunkt der Vertragsänderungen kennen. Das bedeutet, eine Bestandsaufnahme durchzuführen, und anzugeben, welches Volumen wurde bereits getilgt, welche Schulden liegen noch vor und welche zusätzlichen Schulden sind noch aufzunehmen. Wichtig ist es auch einen neuen Tilgungsplan aufzustellen.

Im Abschnitt 3.2 wurde die Berechnung des Barwertes für Rentenzahlungen BW_t bereits besprochen. Der Endwert der noch ausstehenden Zahlungen (K_{T-t}) ist mit dem Abzinsfaktor $\frac{1}{q^{T-t}}$ auf den Zeitpunkt t der Berechnung des Barwertes BW_t abzuzinsen.

Der Barwert einer Rente zum Zeitpunkt t kann folgendermaßen interpretiert werden: Würde man den Barwert im Moment t als Einmalzahlung unter den gleichen Bedingungen wie die Rente (gleicher Zinssatz) investieren, würde die Einmalanlage den Endwert aller noch ausstehenden Ratenzahlung erwirtschaften. D.h. Rentenbarwert BW_t ist identisch mit dem möglichen Ablösebetrag für die Rente im Zeitpunkt t.

Auch für Tilgungsprozesse können Barwerte bestimmt werden. Ein Tilgungsprozess kann als Folge von Ratenzahlungen, in variabler oder konstanter Höhe verstanden werden, wobei die Ratenzahlungen (Annuitäten) immer zwei Bestandteile haben: die Zinsen und die Tilgung. Aus den Tilgungsbeträgen lässt sich die Restschuld zu jeden beliebigen Zeitpunkt bestimmen, aus den Zinszahlungen die aufgelaufen und zukünftigen Zinsen berechnen.

Auch hier stellt sich die Frage, mit welcher Einmalzahlung kann im Moment t ein unterbrochener Tilgungsprozess ersetzt werden. Dabei geht es nicht nur um die verbleibende Restschuld, sondern ebenfalls um die entgangenen Zinsen. Der Darlehnsgeber kann die Tilgung einer Schuld ebenfalls als Kapitalbildungsprozess auffassen. Sein berechtigtes Interesse besteht darin, den gleichen Betrag zu erwirtschaften, wie er es im Tilgungsprozess realisieren würde. Mit anderen Worten, mit welcher Geldsumme, kann der unterbrochene Kreditvertrag abgelöst werden.

Der Tilgungsprozess stellt sich als Folge von konstanten oder variablen Ratenzahlungen dar. Damit kann er ebenfalls als Rente mit variablen oder konstanten Zahlungen aufgefasst werden. Der Effekt der Ratenzahlungen am Ende der Laufzeit ist gleich der aufgezinsten Schuld, immer mit dem gleichen Zinssatz i. Betrachten wir den Prozess der Annuitätentilgung. Die Annuitäten AN können als konstante Ratenzahlungen aufgefasst werden. Zins- und Tilgungsperioden sind ein Jahr, die Annuitäten werden nachschüssig gezahlt. Am Ende der Laufzeit T ergibt sich folgendes Bild:

$$K_T = RS_0 \cdot (1+i)^T = AN \cdot \frac{(1+i)^T - 1}{i}$$

Zu jeden beliebigen Zeitpunkt t gilt:

$$\begin{aligned} K_t &= RS_0 \cdot (1+i)^t \\ RS_t &= RS_0 \cdot (1+i)^t - AN \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i} \\ Z_t &= AN - RS_t \end{aligned}$$

Der Barwert des Tilgungsprozesses zum Zeitpunkt t berechnet sich aus den ausstehenden Annuitätenzahlungen AN_j (j = t+1,t+2,...,T und dem Abzinsfaktor $\frac{1}{q^{T-t}}$:

$$BW_t = AN \cdot \frac{(1+i)^{T-t} - 1}{i} \cdot \frac{1}{q^{T-t}} \tag{4.9}$$

mit

$$\frac{1}{q^{T-t}} = \frac{1}{(1+i)^{T-t}}$$

Beispiel (aus dem Unterabschnitt 4.1.1)

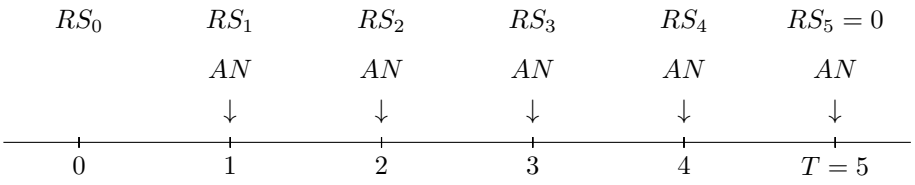
Eine Schuld von 100000 EUR soll durch gleiche Annuitäten in 5 Jahren getilgt werden. Die Verzinsung erfolgt jährlich bei einem gegebenen Jahreszinssatz von 5%. Die Zinsen werden am Ende jeder Zinsperiode fällig. Die konstante jährliche Annuitäten beträgt 23907,48 EUR:

$$\begin{aligned} AN &= RS_0 \cdot (1+i)^m \cdot \frac{i}{(1+i)^m - 1} \\ &= 100000 \cdot (1,05)^5 \cdot \frac{0,05}{(1,05)^5 - 1} = 23097,48 \end{aligned}$$

Es wird dabei der Endwert $K_T = 127628,16$ EUR erwirtschaftet. Der daraus abgeleitete Barwert zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt 100000 EUR.

$$\begin{aligned} K_T &= RS_0 \cdot (1+i)^T = 100000 \cdot 1,05^5 = 127628,16 \\ BW_0 &= \frac{K_T}{(1+i)^T} = \frac{127628,16}{1,05^5} = 100000 \end{aligned}$$

Grafisch ergibt sich für die Zahlungsflüsse folgendes Bild:



Es ist die Restschuld im Zeitpunkt $t = 3$ (nach erfolgter Zahlung der Annuität zum Zinszahlungs- und Tilgungstermin $t = 3$) zu berechnen:

$$\begin{aligned} RS_3 &= RS_0 \cdot (1+i)^3 - AN \cdot \frac{(1+i)^3 - 1}{i} \\ RS_3 &= 100000 \cdot (1,05)^3 - 23097,48 \cdot \frac{(1,05)^3 - 1}{0,05} \\ RS_3 &= 115762,50 - 72814,81 = 42947,69 \end{aligned}$$

Die Restschuld zum Zeitpunkt $t = 3$ beträgt 42947,69 EUR.

Der akkumulierte Betrag der noch ausstehenden Zahlungen (2 Mal die Annuität $AN = 23097,48$) beläuft sich auf:

$$K_{3+2} = RS_3 \cdot (1+i)^2 = 42947,69 \cdot 1,05^2 = 47349,83$$
$$= AN \cdot \frac{(1+i)^T - 1}{i} = 23097,48 \cdot \frac{(1,05)^2 - 1}{0,05} = 47349,83$$

Der daraus abgleitete Barwert ist, wie nicht anders zu erwarten, gleich der Restschuld RS_3:

$$BW_3 = K_{3+2} \cdot \frac{1}{(1+i)(5-3)} = AN \cdot \frac{(1+i)^{5-3} - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^{5-3}}$$
$$BW_3 = 47349,83 \cdot \frac{1}{(1,05)^2} = 23097,48 \cdot \frac{(1,05)^2 - 1}{0,05} \cdot \frac{1}{(1,05)^2} = 42947,69$$

Die Restschuld und der Barwert zum Zeitpunkt $t = 3$ betragen 42947,69 EUR. Den Barwert kann man folgendermaßen interpretieren. Soll der Vertrag durch Auszahlung der Restschuld und der entgangenen Zinsen im Zeitpunkt $t = 3$ abgelöst werden, sind 42947,69 zu entrichten.

Wir betrachten nun zwei Varianten der Vertragsmodifizierung:

(a) Änderung des Zinssatzes

Der Tilgungsprozess dauert in unserem Beispiel insgesamt 5 Jahre, der Zinssatz ist dabei während der gesamten Laufzeit festgeschrieben. Das bedeutet aber nicht dass die Marktbedingungen unverändert geblieben sind. Es wird nun angenommen, dass nach 3 Jahren eine Anpassung an die Marktbedingungen vorgenommen werden soll (der neue Zinssatz beträgt nun $i_{neu} = 5,5\%$ an Stelle von $i = 5,0\%$). Es ergeben sich zwei Möglichkeiten unter neuen Marktbedingungen: entweder den Vertrag mit einem modifizierten Zinssatz fortzusetzen, oder ihn aufzulösen und das Geld auf eine andere Art und Weise zu erwirtschaften. Selbstverständlich wird der Darlehnsgeber abwägen, welche Anlageform für ihn die günstigste ist. Steigen die Marktzinsen, wäre es für ihn günstiger, das Kapital nicht weiter in Form eines Tilgungsprozesses zu bilden, sondern zu den besseren Zinsbedingungen anzulegen.

Ausgangspunkt bildet die Restschuld RS_3 nach drei Jahren. Zur Tilgung der Restschuld sind nun die neuen Annuitäten zu berechnen:

$$AN_{neu} = RS_3 \cdot (1+i_{neu})^{(5-3)} \cdot \frac{i_{neu}}{(1+i_{neu})^{(5-3)} - 1}$$
$$= 42947,69 \cdot (1,055)^2 \cdot \frac{0,055}{(1,055)^2 - 1} = 23261,25$$

Es ergibt sich folgender Endwert:

$$K_{3+2} = RS_3 \cdot (1+i_{neu})^2 = 42947,69 \cdot 1,055^2 = 47801,85$$
$$= AN_{neu} \cdot \frac{(1+i_{neu})^{(5-3)} - 1}{i_{neu}} = 23261,25 \cdot \frac{(1,055)^2 - 1}{0,055} = 47801,86$$

Der Barwert zum Zeitpunkt $t = 3$, der sich durch Multiplikation mit dem Abzinsfaktor $\frac{1}{(1+i_{neu})^2} = \frac{1}{1,055^2} = 0,8985$ ergibt, ist selbstverständlich gleich der Restschuld $RS_3 = 42947,69$. Die Endwerte nach alten und neuen Bedingungen unterscheiden sich, sind aber diskontiert zum Zeitpunkt $t = 3$ gleich.

Eine Alternative zur Fortsetzung des Vertrages besteht darin, sich Restschuld mit einer Einmalzahlung zu begleichen. Der Darlehnsgeber könnte dann diesen Betrag zu Marktbedingungen anlegen (d.h. mit einem

Zinssatz von $i_{neu} = 5,5\%$). Dabei werden - wie im modifizierten Vertrag - 47801,85 EUR erwirtschaftet.

(b) Vertragsverlängerung

Eine andere Möglichkeit, den Vertrag vor Ablauf der Laufzeit zu verändern, ist eine Vertragsverlängerung, um die jährliche Belastung der Kredittilgung zu reduzieren. Möchte man beispielsweise zum Zeitpunkt $t = 3$ die Vertragsbedingungen im gegenseitigen Einvernehmen so ändern, dass der Vertrag über die ursprüngliche Laufzeit verlängert wird, bildet die Restschuld die Grundlage der Neuberechnung der Annuitäten. Angenommen der Tilgungszeitraum soll um 1 Jahr verlängert werden und die Zinsen werden auf dem gleichen Niveau von 5% festgelegt. Dann ergibt sich folgende Annuität, die dreimal jährlich zu zahlen ist:

$$\begin{aligned} AN_{neu} &= RS_3 \cdot (1+i)^3 \cdot \frac{i_{neu}}{(1+i)^3 - 1} \\ &= 42947,69 \cdot (1,05)^3 \cdot \frac{0,05}{(1,05)^3 - 1} = 15770,76 \end{aligned}$$

Die neue Annuität beträgt nun 15770,76 EUR.

Die neue Annuität von 15770,76 EUR erwirtschaftet in den folgenden 3 Jahren den Betrag von 49717,32 EUR.

$$\begin{aligned} K_{3+3} &= AN_{neu} \cdot \frac{(1+i)^{6-3} - 1}{i} \\ K_{3+3} &= 15770,76 \cdot \frac{(1,05)^3 - 1}{0,05} = 49717,32 \\ &\quad \textit{oder} \\ K_{3+3} &= RS_3 \cdot (1+i)^3 \\ K_{3+3} &= 42947,69 \cdot (1,05)^3 = 49717,32 \end{aligned}$$

Der Barwert zum Zeitpunkt $t = 3$, der sich durch Multiplikation mit dem Abzinsfaktor $\frac{1}{(1+i)^3} = \frac{1}{1,05^3} = 0,8638$ ergibt, ist selbstverständlich gleich der Restschuld $RS_3 = 42947,69$.

Kapitel 5

Anhang

5.1 Dynamische Renten

5.1.1 arithmetisch steigende Renten

Die Bildungsgesetze einer arithmetisch steigenden Rate lässt sich wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned} R_1 &= R \\ R_2 &= R + \Delta \\ R_t &= R + (t-1) \cdot \Delta \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet Δ den konstanten Zuwachs in jeder Periode.

Betrachte wir den Fall einer nachschüssigen Rente. Jede Teilrente (Ratenzahlung) wird nun an Hand der Restlaufzeit verzinst :

$$\begin{aligned} B_1 &= R \cdot q^{T-1} \\ B_2 &= (R + \Delta) \cdot q^{T-2} \\ ... &= ... \\ B_t &= (R + (t-1) \cdot \Delta) \cdot q^{T-t} \\ ... &= ... \\ B_T &= (R + (T-1) \cdot \Delta) \end{aligned}$$

Die Teilrenten B_t sind zu addieren:

$$\begin{aligned} K_T &= \sum_{t=1}^{T} B_t = \sum_{t=1}^{T} (R + (t-1) \cdot \Delta) \cdot q^{T-t} \\ &= R \cdot q^{T-1} + (R + \Delta) \cdot q^{T-2} + ... + (R + (T-1) \cdot) q^0 \\ &= R \cdot (q^{T-1} + q^{T-2} + ... + q^0) + \Delta (q^{T-2} + 2 \cdot q^{T-3} + ... + (T-1) \cdot q^0) \\ &= S_1 + S_2 \end{aligned}$$

Die Teilsummen S_1 und S_1 werden getrennt behandelt:

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \Delta(q^{T-2} + 2 \cdot q^{T-3} + ... + (T-1) \cdot q^0) \\
S_2 \cdot q &= \Delta(q^{T-1} + 2 \cdot q^{T-2} + ... + (T-1) \cdot q^1) \\
S_2 \cdot q - S_2 &= \Delta(q^{T-1} + q^{T-2} + ... + q^1 + q^0) - T \cdot \Delta \\
S_2 \cdot q - S_2 = S_2 \cdot (q-1) &= \frac{\Delta \cdot (q^T - 1)}{q-1} - T \cdot \Delta \\
S_2 &= \frac{\Delta \cdot (q^T - 1)}{(q-1)^2} - \frac{T \cdot \Delta}{q-1}
\end{aligned}
$$

$$
S_1 = R \cdot \frac{(q^T - 1)}{q-1}
$$

Die beiden Teilsummen werden zusammengefasst:

$$
\begin{aligned}
K_T = S_2 + S_2 &= \frac{\Delta \cdot (q^T - 1)}{(q-1)^2} - \frac{T \cdot \Delta}{q-1} + R \cdot \frac{(q^T - 1)}{q-1} \\
K_T &= \frac{(q^T - 1)}{(q-1)} \cdot \Big(\frac{\Delta}{q-1} - \frac{T \cdot \Delta}{q^T - 1} + R \Big)
\end{aligned}
$$

Für vorschüssige Renten erhält man:

$$
K_T = q \cdot \frac{(q^T - 1)}{(q-1)} \cdot \Big(\frac{\Delta}{q-1} - \frac{T \cdot \Delta}{q^T - 1} + R \Big)
$$

5.1.2 geometrisch steigende Renten

Die Raten werden nachschüssig gezahlt:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= R \\
R_2 &= R \cdot (1+\beta) \\
... &= ... \\
R_t &= R \cdot (1+\beta)^{t-1} \\
... &= ... \\
R_T &= R \cdot (1+\beta)^{T-1}
\end{aligned}
$$

Jede Teilrente (Ratenzahlung) wird nun an Hand der Restlaufzeit verzinst :

$$
\begin{aligned}
B_1 &= R \cdot q^{T-1} \\
B_2 &= R \cdot (1+\beta) \cdot q^{T-2} \\
... &= ... \\
B_t &= (R \cdot (1+\beta)^{t-1}) \cdot q^{T-t} \\
... &= ... \\
B_T &= \cdot (1+\beta)^{T-1}
\end{aligned}
$$

Die Teilrenten B_t sind zu addieren.

$$K_T = \sum_{t=1}^{T} B_t = \sum_{t=1}^{T} (R \cdot (1+\beta)^{t-1}) \cdot q^{T-t}$$

$$K_T = R \cdot q^{T-1} + R \cdot (1+\beta) \cdot q^{T-2} + ... + (R \cdot (1+\beta)^{t-1}) \cdot q^{T-t} + ... + R \cdot (1+\beta)^{T-1}$$

$$K_T = R \cdot q^{T-1} \cdot \left(1 + (\frac{1+\beta}{q})^1 + ... + (\frac{1+\beta}{q})^{T-t} + ... + (\frac{1+\beta}{q})^{T-1}\right)$$

$$K_T = R \cdot q^{T-1} \cdot \frac{(\frac{1+\beta}{q})^T - 1}{\frac{1+\beta}{q} - 1} \quad wenn\ \beta \neq q$$

$$K_T = R \cdot q^{T-1} \cdot n \cdot T \quad wenn\ \beta = q$$

Literaturverzeichnis

[Böh21] Böhme, Wolfgang: *Finanzmathematik*. Skript, März 2021.

[Bos91] Bosch, Karl: *Finanzmathematik*. Oldenbourg Verlag, München, 1991.

[Hul01] Hull, John C.: *Optionen, Futures und andere Derivate*. Pearson Studium / Oldenbourg Verlag, München, 2001.

[Bun21a] Deutsche Bundesbank: *Liquiditätsrisiko*. Website, 2021. https://www.bundesbank.de/de/aufgaben/bankenaufsicht/einzelaspekte/eigrisiko/liquiditaetsrisiko. Abgerufen am 03.07.2021.

[Inv21] Investing.com: *EUR 5 Years IRS Interest Rate Swap*. Website, 2021. https://www.investing.com/rates-bonds/eur5-years-irs-interest-rate-swap-historical-data. Abgerufen am 10.06.2021.

[Wie18] Wiedemann, Arnd: *Financial Engineering – Bewertung von Finanzinstrumenten*. efiport GmbH, 2018.

[Bun21b] Deutsche Bundesbank: *Operationelles Risiko*. Website, 2021. https://www.bundesbank.de/de/aufgaben/bankenaufsicht/einzelaspekte/eigrisiko/operationelles-risiko-598534. Abgerufen am 03.07.2021.

[Kru10] Kruschwitz, Lutz: *Finanzmathematik. Lehrbuch der Zins-, Renten-, Tilgungs-, Kurs- und Renditerechnung*. 5. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, 2010.

[Lud24] Luderer, Bernd: *Starthilfe Finanzmathematik – Zinsen, Kurse, Renditen*. 5. Auflage, Springer Vieweg, Wiesbaden, 2024.

[Lud19] Luderer, Bernd: *Klassische Finanzmathematik – Grundideen, zentrale Formeln und Begriffe im Überblick*. Springer Gabler, Wiesbaden, 2019.

[Pfe09] Pfeifer, Andreas: *Praktische Finanzmathematik. Mit Futures, Optionen, Swaps und anderen Derivaten*. 5. überarbeitete Auflage, Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 2009.

[Tie15] Tietze, Jürgen: *Einführung in die Finanzmathematik. Klassische Verfahren und neuere Entwicklungen*. 12. Auflage, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2015.

[TieÜ] Tietze, Jürgen: *Übungsbuch zur Finanzmathematik. Aufgaben, Testklausuren und Lösungen*. Springer Vieweg, Wiesbaden.

[HeiSch17] Heidorn, Thomas; Schäffler, Christian: *Finanzmathematik in der Bankpraxis – Vom Zins zur Option*. 7. Auflage, Springer Gabler, Wiesbaden, 2017. (Behandelt: Effektivzinsberechnung, Forward Rate Agreements, Zinsswaps, Zinsstrukturkurven, Anleihen, Optionspreistheorie, Kreditderivate.)

[Rei11] Reitz, Stefan: *Mathematik in der modernen Finanzwelt – Derivate, Portfoliomodelle und Ratingverfahren*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2011. (Behandelt: Bewertung von Derivaten, Zinsprodukte und Zinsmodelle, Kreditderivate, Markt- und Kreditrisikomodelle.)

[GruLud09] Grundmann, Wolfgang; Luderer, Bernd: *Finanzmathematik, Versicherungsmathematik, Wertpapieranalyse. Formeln und Begriffe*. 3. Auflage, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009.

[Wie09] Wiedemann, Arnd: *Risikotriade Zins-, Kredit- und operationelle Risiken*. 3. Auflage, Frankfurt School Verlag, Frankfurt am Main, 2009. (Behandelt: Zinsrisiko, Kreditrisiko, operationelles Risiko, Value-at-Risk-Konzepte.)

[Schu] Schulte-Mattler, Hermann; Traber, Uwe: *Marktrisiko – Messung und Eigenkapitalunterlegung*. Gabler Verlag, Wiesbaden. (Behandelt: Varianz-Kovarianz-Methode, historische Simulation, Monte-Carlo-Simulation, VaR-Berechnung für Zinsinstrumente.)

[Cha17] Chan, Wai-Sum; Tse, Yiu-Kuen: *Financial Mathematics for Actuaries*. 2. Auflage, World Scientific, Singapur, 2017.

[Has22] Hastings, Kevin J.: *Introduction to Financial Mathematics*. 2. Auflage, Routledge/CRC Press, New York, 2022.

[Kam10] Kaminsky, Kenneth: *Financial Literacy – Introduction to the Mathematics of Interest, Annuities, and Insurance*. 2. Auflage, University Press of America, Lanham, 2010.

[Hul18] Hull, John C.: *Options, Futures, and Other Derivatives*. 10. Auflage, Pearson Education, Hoboken, 2018. (Behandelt: Forward Rate Agreements, Zinsswaps, Währungsswaps, Zinsstrukturkurven, festverzinsliche Anleihen, Floater.)

[Fab12] Fabozzi, Frank J.: *Bond Markets, Analysis, and Strategies*. 8. Auflage, Pearson Education, Boston, 2012. (Behandelt: Anleihen, Zinskurven, Floater, Durationskonzept, Bewertung festverzinslicher Wertpapiere.)

[BriMer06] Brigo, Damiano; Mercurio, Fabio: *Interest Rate Models – Theory and Practice*. 2. Auflage, Springer, Berlin/Heidelberg, 2006. (Behandelt: Nullkupon-Zinskurven, Zinsstrukturmodelle, Zinsswaps, Forward Rate Agreements.)

[JoR07] Jorion, Philippe: *Value at Risk – The New Benchmark for Managing Financial Risk*. 3. Auflage, McGraw-Hill, New York, 2007. (Standardwerk zu VaR; behandelt: Varianz-Kovarianz-Methode, historische Simulation, Monte-Carlo-Simulation, Backtesting.)

[McN05] McNeil, Alexander J.; Frey, Rüdiger; Embrechts, Paul: *Quantitative Risk Management – Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press, Princeton, 2005. (Behandelt: Marktrisiko, Kreditrisiko, Kovarianzmatrizen, Normalverteilungsannahme, Extremwerttheorie.)