Statisches Leontief-Modell

Benutzerhandbuch

mit Erweiterungen und Sensitivitätsanalyse

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

3. November 2026

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **2**
- 1.1 Hauptfunktionen . . . 2
- 1.2 Matrixgrößen . . . 2

2 Theoretische Grundlagen **2**
- 2.1 Basis-Modell . . . 2
- 2.2 Endverwendung . . . 2
- 2.3 Importanalyse . . . 3
- 2.4 Kostenstruktur und Wertschöpfung . . . 3
- 2.5 Preismodell (dual) . . . 3
- 2.6 Satellitenkonten: Umwelt und Beschäftigung . . . 4

3 Daten **4**
- 3.1 Datenbox . . . 4
- 3.2 Beispieldatensätze . . . 4

4 Bedienungsanleitung **4**
- 4.1 Tab: Eingabe . . . 4
- 4.2 Tab: Berechnung . . . 5
- 4.3 Tab: Neumann-Reihe . . . 5
- 4.4 Tab: Erweiterungen . . . 5
  - 4.4.1 Schritt 1: Aufsplittung der Endverwendung . . . 5
  - 4.4.2 Schritt 2: Importe . . . 5
  - 4.4.3 Schritt 3: Wertschöpfung und Kostenstruktur . . . 6
  - 4.4.4 Schritt 4: Preismodell . . . 6
  - 4.4.5 Schritt 5: Satellitenkonten . . . 6
- 4.5 Tab: Sensitivität . . . 6
- 4.6 Tab: Export . . . 6

5 Interpretationshilfen **7**
- 5.1 Produktionsmultiplikatoren . . . 7
- 5.2 Importquote . . . 7
- 5.3 Wertschöpfungsquote . . . 7
- 5.4 Intensität der Satellitenkonten . . . 7

6 Workflow-Beispiel **7**

7 Grenzen **8**

8 Troubleshooting **8**
- 8.1 „Summe stimmt nicht überein“ (Schritt 1) . . . 8
- 8.2 Warnung „Summe der Koeffizienten weicht von 1 ab“ (Schritt 3) . . . 8
- 8.3 Datenbox leer oder Beispiele fehlen . . . 8
- 8.4 Export funktioniert nicht . . . 8

9 Best Practices **8**

1 Einführung

Dieses Tool implementiert das erweiterte statische Leontief-Modell mit umfangreichen Analysemöglichkeiten: Aufspaltung der Endverwendung, Importanalyse, Kostenstruktur und Wertschöpfung, Preismodell, Satellitenkonten (Umwelt und Beschäftigung) sowie Sensitivitätsanalysen.

1.1 Hauptfunktionen

- Basis-Leontief-Modell $\mathbf{X} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{Y}$
- Endverwendung: $\mathbf{Y} = \mathbf{C} + \mathbf{I} + \mathbf{V} + \mathbf{E}$
- Importanalyse (bis zu drei Importgruppen)
- Kostenstruktur und Wertschöpfung (Löhne, Gewinne, Steuern, Importe)
- Duales Preismodell
- Satellitenkonten: CO_2, Energie, Beschäftigung
- Sensitivitätsanalysen mit Tornado-Diagramm
- Export vollständiger IO-Tabellen

1.2 Matrixgrößen

- Inversion von $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ direkt im Browser bis 150×150 (z. B. Deutschland 72×72).
- Darüber: vorberechnete Inverse als CSV hochladen.
- Sensitivitätsanalysen: bis 30×30.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Basis-Modell

$$\mathbf{X} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Y} \tag{1}$$

mit der Leontief-Inversen $\mathbf{L} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$. Die Neumann-Reihe $\mathbf{L} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots$ zeigt die Produktionsrunden.

2.2 Endverwendung

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} + \mathbf{I} + \mathbf{V} + \mathbf{E} \tag{2}$$

- $\mathbf{C}$: Konsum (private Haushalte und Staat)
- $\mathbf{I}$: Bruttoanlageinvestitionen
- $\mathbf{V}$: Vorratsveränderung (kann negativ sein)
- $\mathbf{E}$: Exporte

Enthält ein Datensatz kein $\mathbf{E}$, wird es als Restgröße berechnet:

$$\mathbf{E} = \mathbf{Y} - \mathbf{C} - \mathbf{I} - \mathbf{V} \tag{3}$$

Wegen der Linearität gilt für die Produktionseffekte $\mathbf{X} = \mathbf{LC} + \mathbf{LI} + \mathbf{LV} + \mathbf{LE}$.

2.3 Importanalyse

Importanteile je Gütergruppe g und Sektor j (Anteil am Produktionswert):

$$Im_{g,j} = m_{g,j} \cdot X_j, \qquad Im_j = \sum_{g=1}^{G} Im_{g,j} \tag{4}$$

- $m_{g,j}$: Importe der Gruppe g je Output-Einheit von Sektor j (0–1)
- $G \leq 3$ Gruppen; Beispieldaten: Rohstoffe, Vorprodukte, Dienstleistungen; Destatis: importierte Vorleistungen

2.4 Kostenstruktur und Wertschöpfung

Die Spalte j der Input-Output-Tabelle beschreibt die Kosten des Sektors j:

$$X_j = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_j}_{\text{Vorleistungen}} + \underbrace{M_j}_{\text{Importe}} + \underbrace{L_j + G_j + T_j}_{\text{Wertschöpfung}} \tag{5}$$

In Koeffizienten (Anteile am Produktionswert):

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} + m_j + l_j + g_j + t_j = 1 \tag{6}$$

- Vorleistungen: Spaltensumme von $\mathbf{A}$ mal X_j
- m_j: Importanteil (Summe der Importgruppen)
- l_j: Löhne (Arbeitnehmerentgelt)
- g_j: Gewinne (Bruttobetriebsüberschuss einschließlich Abschreibungen)
- t_j: Steuern abzüglich Subventionen (kann negativ sein)

$$BWS_j = L_j + G_j + T_j \tag{7}$$

Hinweis Destatis: t_j enthält neben den sonstigen Produktionsabgaben auch die Gütersteuern. $L_j + G_j + T_j$ ist daher etwas größer als die Bruttowertschöpfung der VGR.

2.5 Preismodell (dual)

$$\mathbf{p}^T = \mathbf{p}^T \mathbf{A} + \mathbf{v}^T \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}^T = \mathbf{v}^T (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \tag{8}$$

- $\mathbf{p}$: Preisindex je Sektor (Basis 1)
- $\mathbf{v}$: Primärinputkosten je Output-Einheit

Aus der Datenbox wird $\mathbf{v}$ = Bruttowertschöpfungsanteil übernommen. Da importierte Vorleistungen darin nicht enthalten sind, gilt $\sum_i a_{ij} + v_j < 1$ und damit $p_j < 1$. Mit v_j = Wertschöpfungs- plus Importanteil ergibt sich $p_j = 1$. Für Kostenänderungen gilt

$$\Delta \mathbf{p}^T = \Delta \mathbf{v}^T (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \tag{9}$$

(z. B. Lohnerhöhung in einem Sektor). Der Preismultiplikator p_j / v_j zeigt die Bedeutung vorgelagerter Kosten.

2.6 Satellitenkonten: Umwelt und Beschäftigung

$f_{k,j}$ ist Indikator k je Output-Einheit von Sektor j:

$$D_{k,j} = f_{k,j} \cdot X_j \qquad \text{(direkt)} \tag{10}$$

$$I_{k,j} = \sum_{i=1}^{n} f_{k,i}\, a_{ij}\, X_j \qquad \text{(indirekt, erste Lieferstufe)} \tag{11}$$

$$T_{k,j} = D_{k,j} + I_{k,j} \qquad \text{(total)} \tag{12}$$

Gesamtintensität über alle Lieferstufen: $\mathbf{f}_k^T(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$.

- Beispieldaten: CO_2 (t), Energie (MWh) und Beschäftigung (Erwerbstätige) je Output-Einheit
- Destatis: Erwerbstätige je Mio. € Produktionswert
- Höchstens drei Indikatoren gleichzeitig

3 Daten

3.1 Datenbox

Alle IO-Tools greifen auf eine gemeinsame Datenbox zu. Sie liegt im Speicher des Browsers (localStorage) und ist für jeden Browser getrennt. Beim ersten Öffnen werden die Beispieldatensätze automatisch eingetragen. Über die Datenbox-Verwaltung lassen sich Datensätze exportieren (JSON, CSV, Excel) und importieren.

3.2 Beispieldatensätze

Datensatz	Endverwendung	Zusatzvektoren
5×5 offene Volkswirtschaft	C, I, V, E	alle (fiktiv)
3×3 bis 10×10 (ZIP)	C, I; V = E = 0	alle (fiktiv)
Deutschland 2022: 72×72, 20×20, 15×15	C, I, V, E	Destatis

Fiktive Zusatzvektoren (5×5 und ZIP-Beispiele): Importanteile in drei Gruppen (Rohstoffe, Vorprodukte, Dienstleistungen), Bruttowertschöpfung, Löhne, Gewinne und Steuern als Anteile am Produktionswert, CO_2-, Energie- und Beschäftigungskoeffizienten. Die Anteile erfüllen Spaltensumme $\mathbf{A}$ + Importe + Löhne + Gewinne + Steuern = 1.

Das Beispiel *5×5 offene Volkswirtschaft* hat benannte Sektoren (Landwirtschaft, Industrie, Energie, Bau, Dienstleistungen) und erlaubt alle Erweiterungen. Die ZIP-Beispiele beschreiben eine geschlossene Volkswirtschaft ($\mathbf{Y} = \mathbf{C} + \mathbf{I}$), weil das dynamische Modell darauf aufbaut.

Destatis-Daten: Statistisches Bundesamt, Input-Output-Rechnung 2022 (Tabellen 81511-03 und 81511-07), Datenlizenz Deutschland – Namensnennung – Version 2.0. Zusatzvektoren: Bruttowertschöpfung, Löhne, Gewinne, Steuern, Importe (Anteile), Erwerbstätige je Mio. €, Produktionswert; dazu eine illustrative Kapitalmatrix für das dynamische Modell.

4 Bedienungsanleitung

4.1 Tab: Eingabe

Eingabemethode (Auswahlfeld):

- **Datenbox** (Standard): Button `Daten aus Datenbox laden` öffnet eine Liste der Beispiele und eigenen Datensätze. Nach der Auswahl schließt sich die Liste.
- **Manuelle Eingabe**: Matrixgröße 3×3 bis 6×6, Felder für $\mathbf{A}$ und $\mathbf{Y}$.
- **CSV-Upload**: Matrix $\mathbf{A}$, Vektor $\mathbf{Y}$ und optional die Inverse. Komma, Semikolon oder Tabulator; Dezimalkomma, Kopfzeile und Sektornamen sind erlaubt.

Anzeige eines geladenen Datensatzes:

- Name, Quelle, Summe $\mathbf{Y}$, Skalare (z. B. B_I), Hinweis auf eine Kapitalmatrix
- Matrix $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{Y}$ (ab 10 Sektoren als Ausschnitt 10×10)
- Tabelle *Endverwendung und Zusatzvektoren je Sektor*: $\mathbf{Y}$, C, I, V, E und alle Zusatzvektoren mit Summenzeile; ein fehlendes E wird berechnet und gekennzeichnet
- `Vollständig anzeigen` zeigt alle Zeilen und Spalten

Danach `Berechnen` klicken.

4.2 Tab: Berechnung

Zeigt die Leontief-Inverse, den Outputvektor $\mathbf{X}$ und die Produktionsmultiplikatoren.

4.3 Tab: Neumann-Reihe

Näherung $\mathbf{L} \approx \mathbf{E}+\mathbf{A}+\ldots+\mathbf{A}^k$ mit Konvergenzdiagramm (Toleranz 10^{-4}, höchstens 50 Glieder).

4.4 Tab: Erweiterungen

In jedem Schritt lädt der Button `Werte laden` die passenden Vektoren aus dem geladenen Datensatz. Enthält er keine, werden Beispielwerte eingesetzt. Die Werte stehen in einer Tabelle (Zeile = Sektor, Spalte = Vektor) und können geändert werden. Voraussetzung ist eine Berechnung im Tab Eingabe.

Alternativ lassen sich einzelne Vektoren über `CSV importieren` laden (Schritte 1–3): n Werte in einer Zeile oder untereinander; Komma, Semikolon oder Tabulator; Dezimalkomma nur mit Semikolon oder Tabulator. Die Werte überschreiben die entsprechende Spalte der Tabelle; die Anzahl muss der Dimension entsprechen.

4.4.1 Schritt 1: Aufsplittung der Endverwendung

Eingabe: Spalten C, I, V und E; zum Vergleich wird $\mathbf{Y}$ angezeigt. Fehlt E im Datensatz, steht in der Spalte der berechnete Wert $\mathbf{Y}-\mathbf{C}-\mathbf{I}-\mathbf{V}$. Ohne Datensatzwerte: Beispielaufteilung 60 % Konsum, 20 % Investitionen, 2 % Vorräte, Rest Export. CSV-Import für C, I, V und E.

Prüfung: $\mathbf{C}+\mathbf{I}+\mathbf{V}+\mathbf{E}=\mathbf{Y}$; eine Abweichung wird angezeigt.

Ausgabe: Tabelle je Sektor mit Summen und Anteilen an $\mathbf{Y}$.

4.4.2 Schritt 2: Importe

Eingabe: Anzahl der Importgruppen (1–3) und die Importanteile $m_{g,j}$. Aus der Datenbox werden alle Vektoren übernommen, deren Name „Import“ enthält.

Ausgabe: Output, Vorleistungen, Importe je Gruppe und Summe je Sektor; gestapeltes Balkendiagramm.

4.4.3 Schritt 3: Wertschöpfung und Kostenstruktur

Voraussetzung: Schritt 1 ist berechnet.

Eingabe: Koeffizienten für Löhne, Gewinne, Steuern und Importe (Anteile am Produktionswert). Aus der Datenbox: Vektoren mit „Löhne“, „Gewinne“, „Steuern“ im Namen; Importe = Summe aller Importvektoren. CSV-Import für Importe, Löhne, Gewinne und Steuern.

Prüfung: Spaltensumme $\mathbf{A}$ + Löhne + Gewinne + Steuern + Importe ≈ 1 je Sektor (Toleranz 0,1); bei Abweichung fragt das Tool nach.

Ausgabe: Output, Vorleistungen, Löhne, Gewinne, Steuern, Importe und BWS je Sektor; Diagramm.

4.4.4 Schritt 4: Preismodell

Eingabe: Vektor $\mathbf{v}$; aus der Datenbox der Bruttowertschöpfungsanteil.

Berechnung: $\mathbf{p}^T = \mathbf{v}^T(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$.

Ausgabe: v_j, p_j und Preismultiplikator p_j/v_j je Sektor; Diagramm.

Interpretation: Ein hoher Multiplikator zeigt starke Vorleistungsverflechtung. Zu $p < 1$ siehe Abschnitt 2.5.

4.4.5 Schritt 5: Satellitenkonten

Eingabe: Anzahl der Indikatoren (1–3) und Koeffizienten $f_{k,j}$. Aus der Datenbox werden Vektoren mit „CO2“, „Emission“, „Energie“, „Umwelt“, „Beschäftigung“ oder „Erwerbstätige“ im Namen übernommen; die Spaltenköpfe zeigen deren Namen.

Ausgabe: direkte, indirekte und totale Werte je Sektor, durchschnittliche Intensität; gestapeltes Balkendiagramm.

4.5 Tab: Sensitivität

Jede Analyse variiert einen Parameter um $\pm\Delta\,\%$ (Standard 10 %, höchstens 50 %) und zeigt die Wirkung. `Alle ... analysieren` wertet alle Parameter einer Art aus; `Tornado-Diagramm erstellen` ordnet sie nach Wirkung. Verfügbar bis 30×30.

Analyse	Variierter Parameter	Voraussetzung
A-Matrix	Koeffizient a_{ij}; Elastizität $\varepsilon = \frac{\Delta X/X}{\Delta a/a}$	Basisberechnung
Endverwendung	C, I oder E eines Sektors	Schritt 1
Importe	Importanteil einer Gruppe und eines Sektors	Schritt 2
Preise	v_j eines Sektors	Schritt 4
Umwelt	Koeffizient $f_{k,j}$	Schritt 5

4.6 Tab: Export

- `Alle Ergebnisse exportieren`: Basis-IO-Tabelle, Tabelle mit aufgeschlüsselter Endverwendung ($\mathbf{Y} = \mathbf{C} + \mathbf{I} + \mathbf{V} + \mathbf{E}$), Importgruppen, Wertschöpfungskomponenten, Preis- und Umweltergebnisse; eine CSV-Datei mit Abschnitten.
- `Nur IO-Tabellen exportieren`: nur die IO-Tabellen.
- `Sensitivitätsergebnisse exportieren` (Tab Sensitivität).

5 Interpretationshilfen

5.1 Produktionsmultiplikatoren

Spaltensummen von $\mathbf{L}$: Gesamtproduktion je Einheit Endnachfrage eines Sektors.

Multiplikator	Interpretation	Beispiel
$< 1{,}2$	Geringe Verflechtung	Dienstleistungen
$1{,}2 - 1{,}8$	Mittlere Verflechtung	Verarbeitendes Gewerbe
$> 1{,}8$	Starke Verflechtung	Automobilindustrie

5.2 Importquote

$$q_{Im,j} = \frac{\sum_g Im_{g,j}}{X_j} \tag{13}$$

$< 0{,}2$: geringe, $0{,}2 - 0{,}5$: mittlere, $> 0{,}5$: hohe Importabhängigkeit.

5.3 Wertschöpfungsquote

$$q_{BWS,j} = \frac{BWS_j}{X_j} \tag{14}$$

Typische Werte: Dienstleistungen 0,6–0,8; Verarbeitendes Gewerbe 0,3–0,5; Rohstoffgewinnung 0,2–0,4.

5.4 Intensität der Satellitenkonten

$$\varepsilon_k = \frac{\sum_j T_{k,j}}{\sum_j X_j} \tag{15}$$

Identifikation von Hotspots, z. B. für Klimapolitik oder Beschäftigungswirkungen.

6 Workflow-Beispiel

Komplettanalyse mit dem Beispiel *5×5 offene Volkswirtschaft*:

1. **Eingabe:** `Daten aus Datenbox laden`, Beispiel 5×5 wählen, Daten prüfen, `Berechnen`.
2. **Schritt 1:** `Werte laden` → C, I, V, E übernommen → `Berechnen`; Prüfung Summe = Y.
3. **Schritt 2:** `Werte laden` → drei Importgruppen → `Berechnen`; importintensive Sektoren erkennen.
4. **Schritt 3:** `Werte laden` → Löhne, Gewinne, Steuern, Importe → `Berechnen`; Kostenstruktur je Sektor.
5. **Schritt 4:** `Werte laden` → $\mathbf{v}$ → `Berechnen`; Preismultiplikatoren vergleichen.
6. **Schritt 5:** `Werte laden` → CO_2, Energie, Beschäftigung → `Berechnen`.
7. **Sensitivität:** kritische Koeffizienten mit dem Tornado-Diagramm bestimmen.
8. **Export:** `Alle Ergebnisse exportieren`.

Mit den Destatis-Daten (15×15 oder 20×20) funktionieren die Schritte 1–5 ebenso; Schritt 2 hat dann eine Importgruppe, Schritt 5 den Indikator Erwerbstätige.

7 Grenzen

- Inversion im Browser bis 150×150; darüber vorberechnete Inverse hochladen.
- Sensitivitätsanalysen bis 30×30.
- Sensitivitäten sind lokal und linear; bei großen Änderungen neu berechnen.
- Die fiktiven Zusatzvektoren der Beispiele dienen der Veranschaulichung, nicht der Analyse realer Volkswirtschaften.

8 Troubleshooting

8.1 „Summe stimmt nicht überein“ (Schritt 1)

Problem: $\mathbf{C} + \mathbf{I} + \mathbf{V} + \mathbf{E} \neq \mathbf{Y}$.

Lösungen: Rundungsfehler, Dimensionen und CSV-Formate prüfen; E als Restgröße setzen.

8.2 Warnung „Summe der Koeffizienten weicht von 1 ab“ (Schritt 3)

Die Kostenanteile eines Sektors addieren sich nicht zu 1. Prüfen, ob Importe fehlen oder Anteile in Prozent statt als Dezimalzahl eingegeben wurden.

8.3 Datenbox leer oder Beispiele fehlen

Die Datenbox ist je Browser getrennt; in privaten Fenstern wird sie nicht gespeichert. Beispiele lassen sich in der Datenbox-Verwaltung wieder einspielen.

8.4 Export funktioniert nicht

1. Browser-Einstellungen prüfen (Download- und Pop-up-Blocker).
2. Sicherstellen, dass die gewünschten Schritte berechnet wurden.
3. Entwicklerkonsole öffnen (F12).

9 Best Practices

1. **Validierung:** Nach jedem Schritt die Konsistenzprüfungen beachten.
2. **Dokumentation:** Datenquellen und Annahmen notieren.
3. **Plausibilität:** Mit Literaturwerten vergleichen.
4. **Sensitivität:** Robustheit testen.
5. **Sicherung:** Datenbox regelmäßig exportieren (JSON oder Excel).