Dynamisches Input-Output-Modell

Drei dynamische Leontief-Modelle, Partitionierung und Stabilität

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

4. November 2026

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **2**

2 Daten und Datenbox **2**
2.1 Datensatz laden . . . 2
2.2 Beispieldatensätze . . . 2
2.3 Woher $\mathbf{B}^I$ kommt . . . 3

3 Vorgegebene Nachfrage **3**
3.1 C oder C + V + E . . . 3
3.2 Zeitpfad . . . 3
3.3 Vorschlag aus Y . . . 3

4 Modell 1: Vorgegebener Investitionspfad **4**

5 Modell 2: Rekursives Modell ohne Partitionierung **4**

6 Modell 3: Partitionierung **4**
6.1 Sektoren . . . 4
6.2 Matrizen $\mathbf{B}^I$, $\mathbf{B}^d$ und $\mathbf{T}$ . . . 4
6.3 Rekursion . . . 4
6.4 Startwerte . . . 5

7 Stabilität **5**
7.1 Eigenschaft des Modells . . . 5
7.2 Einfluss der Kapitalkoeffizienten . . . 5
7.3 Empfehlungen . . . 5

8 Beispielrechnung **5**
8.1 Gegeben . . . 5
8.2 Matrizen . . . 6
8.3 Simulation (konstanter Konsum) . . . 6

9 Bedienung **6**

10 Validierungen **7**

11 Export **7**

12 Zusammenfassung **7**

1 Einführung

Das dynamische Leontief-Modell erweitert das statische Input-Output-Modell um die Zeit: Investitionen erhöhen den Kapitalstock, der Kapitalstock bestimmt die künftige Produktion. Das Tool enthält drei Varianten:

Modell	**Ansatz**	**Benötigt**
Modell 1	Statisches Modell mit vorgegebenem Investitionspfad: $\mathbf{x}(t{+}1) = \mathbf{L}\,[\mathbf{y} + \mathbf{B}\,\Delta\mathbf{k}(t)]$	$\mathbf{A}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{B}$ $(n \times n)$
Modell 2	Rekursives Modell ohne Partitionierung: $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{B}^{-1}[(\mathbf{E} + \mathbf{B} - \mathbf{A})\mathbf{x}_t - \mathbf{c}_t]$	$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ $(n \times n)$, $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{c}$
Modell 3	Rekursives Modell mit Partitionierung in Investitions- und Konsumgütersektoren	$\mathbf{A}$, r, $\mathbf{B}^I$ $(r \times r)$, $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{c}$

Dabei ist $\mathbf{L} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ die Leontief-Inverse und $\mathbf{E}$ die Einheitsmatrix. Alle Modelle setzen das statische Modell voraus; dessen Ergebnis $\mathbf{x}_0 = \mathbf{L}\mathbf{y}$ ist der übliche Startwert.

2 Daten und Datenbox

2.1 Datensatz laden

Im Reiter *Eingabe* ist die Eingabemethode „Datenbox“ voreingestellt. Der Button **„Daten aus Datenbox laden“** öffnet eine Liste; oben stehen die Datensätze für das dynamische Modell, die übrigen eingeklappt darunter. Nach der Auswahl

1. wird das statische Modell berechnet ($\mathbf{L}$, $\mathbf{x}_0$),
2. werden die Werte für alle drei Modelle übernommen: $\mathbf{B}$, r, $\mathbf{B}^I$, $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{i}_0$,
3. zeigt die Anzeige Matrix $\mathbf{A}$, die Vektoren je Sektor, $\mathbf{B}^I$, $\mathbf{B}$ und je Modell, was übernommen wurde oder fehlt.

In jedem Modell stellt **„Werte aus geladenem Datensatz übernehmen“** die Werte nach eigenen Änderungen wieder her. Manuelle Eingabe und CSV-Upload bleiben möglich.

2.2 Beispieldatensätze

Datensatz	**Endnachfrage**	r	$\mathbf{B}^I$	**B**
Dynamik 3×3 Gleichgewicht	$\mathbf{y} = \mathbf{c}$	1	1×1	ja
Dynamik 3×3 Wachstum	$\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{i}$	1	1×1	ja
Dynamik 4×4, 6×6, 8×8 Gleichgewicht	$\mathbf{y} = \mathbf{c}$	2, 3, 4	$r \times r$	–
Dynamik 10×10 Wachstum	$\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{i}$	1	$B_I = 5{,}5$	ja
Beispiel 3×3 bis 10×10 (ZIP)	$\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{i}$	1 bzw. 2	$B_I = 5{,}5$	$B_I\,\mathbf{E}$
Deutschland 2022 (Destatis)	$\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{i} + \mathbf{v} + \mathbf{e}$	wählbar	Block von $\mathbf{B}$	illustrativ
Destatis, Investitionsg. zuerst	umsortiert	3	Block von $\mathbf{B}$	illustrativ
dto., $\mathbf{B}$ skaliert	umsortiert	3	Block von $\mathbf{B}$	hochskaliert

Die Dynamik-Beispiele sind fiktiv und stammen aus den Testdaten; ihr Startwert ist $\mathbf{x}_0 = \mathbf{L}\mathbf{y}$. Datensätze ohne volle Matrix $\mathbf{B}$ (4×4 bis 8×8) sind für Modell 3 gedacht.

Destatis-Daten: Sie sind für die dynamischen Modelle nur bedingt geeignet. Die Kapitalmatrix ist illustrativ und hat kleine Koeffizienten (Diagonale etwa 0,4–0,75); die Simulation wird daher nach wenigen Perioden negativ. Modell 3 behandelt die Sektoren 1 bis r als Investitionsgütersektoren – in der Destatis-Reihenfolge sind das Landwirtschaft, Rohstoffe usw. Das Tool zeigt dazu einen Hinweis.

Destatis, Investitionsgüter zuerst: Für Modell 3 gibt es die Datensätze 20×20 und 15×15 zusätzlich umsortiert: Vorn stehen die drei Bereiche mit den größten Bruttoanlageinvestitionen (20×20: Bauwesen, Forschung und Entwicklung, Maschinen- und Fahrzeugbau, zusammen 69 %; 15×15: Gruppen 7, 11 und 5, zusammen 81 %), $r = 3$ ist voreingestellt. Damit ist die Wahl von r ökonomisch sinnvoll. Je eine Variante hat eine hochskalierte Kapitalmatrix (Faktor etwa 1,7, mittlere Spaltensumme 3). **Diese Koeffizienten sind illustrativ und entsprechen nicht der realen Datenlage.** Sie zeigen nur, dass größere Kapitalkoeffizienten den Pfad verlängern; die Simulation bricht dennoch nach wenigen Perioden ab (Modell 2: 3–5, Modell 3: 4–7 Perioden).

2.3 Woher $\mathbf{B}^I$ kommt

Für Modell 3 bildet das Tool $\mathbf{B}^I$ $(r \times r)$ in dieser Reihenfolge:

1. eigene Matrix $\mathbf{B}^I$ des Datensatzes,
2. linker oberer $r \times r$-Block der Kapitalmatrix $\mathbf{B}$,
3. $B_I \cdot \mathbf{E}$ mit dem skalaren Kapitalkoeffizienten B_I.

Enthält der Datensatz kein r, wird r gewählt; $\mathbf{B}^I$ wird dann sofort gebildet. Ein selbst gewähltes r bleibt beim Übernehmen erhalten.

3 Vorgegebene Nachfrage

3.1 C oder C + V + E

Die Modelle 2 und 3 brauchen die *vorgegebene* (exogene) Nachfrage $\mathbf{c}_t$. Was nicht vorgegeben ist, behandelt das Modell als Investitionsnachfrage. Wählbar ist:

- $\mathbf{c} = \mathbf{C} + \mathbf{V} + \mathbf{E}$ (Konsum, Vorratsveränderung, Exporte) – richtig für offene Volkswirtschaften wie die Destatis-Daten; dort voreingestellt,
- $\mathbf{c} = \mathbf{C}$ (nur Konsum).

Bei geschlossenen Beispielen ($\mathbf{V} = \mathbf{E} = \mathbf{0}$) sind beide Varianten gleich.

3.2 Zeitpfad

Variante	Formel	Hinweis
Konstant	$\mathbf{c}_t = \mathbf{c}_0$	Gleichgewichtstest
Linear	$\mathbf{c}_t = \mathbf{c}_0 + \Delta \cdot t$	Δ je Periode, z. B. 2
Exponentiell	$\mathbf{c}_t = \mathbf{c}_0(1+g)^t$	g in %, wird schneller instabil
CSV	eigene Werte	

3.3 Vorschlag aus Y

Enthält der Datensatz kein $\mathbf{C}$, setzt „Vorschlag aus Y“ $\mathbf{c}_0 = 0{,}85\,\mathbf{y}$. In Modell 3 wird zugleich $\mathbf{i}_0 = \mathbf{y} - \mathbf{c}_0$ gesetzt, sodass $\mathbf{y} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{i}_0$ erhalten bleibt. Bei den Datenbox-Beispielen ist der Vorschlag nicht nötig.

4 Modell 1: Vorgegebener Investitionspfad

$$\mathbf{x}(t+1) = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \left[\mathbf{y} + \mathbf{B}\,\Delta\mathbf{k}(t)\right] \tag{1}$$

$\mathbf{B}$ $(n \times n)$ ist die Kapitalkoeffizientenmatrix, $\Delta\mathbf{k}(t)$ der vorgegebene Investitionsvektor. Investitionsszenarien: konstant, wachsend (Rate in %), abnehmend (Rate in %) oder benutzerdefiniert je Periode. Das Modell zeigt, welche Produktion eine vorgegebene Kapitalbildung zusätzlich erfordert; es ist stabil, solange $\mathbf{L}$ existiert.

Aus der Datenbox wird $\mathbf{B}$ übernommen; ohne volle Matrix $\mathbf{B} = B_I\,\mathbf{E}$.

5 Modell 2: Rekursives Modell ohne Partitionierung

Die Produktion deckt Vorleistungen, Investitionen und vorgegebene Nachfrage:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}(\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{x}_t) + \mathbf{c}_t \tag{2}$$

Aufgelöst nach $\mathbf{x}_{t+1}$:

$$\boxed{\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{B}^{-1}\left[(\mathbf{E} + \mathbf{B} - \mathbf{A})\,\mathbf{x}_t - \mathbf{c}_t\right] = \mathbf{x}_t + \mathbf{B}^{-1}[(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x}_t - \mathbf{c}_t]} \tag{3}$$

Der Überschuss $(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x}_t - \mathbf{c}_t$ ist die Investition; sie erhöht über $\mathbf{B}^{-1}$ die Produktion der nächsten Periode. $\mathbf{B}$ muss invertierbar sein.

6 Modell 3: Partitionierung

6.1 Sektoren

Bei n Sektoren produzieren die Sektoren 1 bis r Investitionsgüter $(1 \le r < n)$, die Sektoren $r+1$ bis n Konsumgüter. Die Sektoren müssen so sortiert sein. Partitionierung von $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{11} & \mathbf{A}^{12} \\ \mathbf{A}^{21} & \mathbf{A}^{22} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{11} : r \times r, \quad \mathbf{A}^{22} : (n-r) \times (n-r).$$

6.2 Matrizen $\mathbf{B}^I$, $\mathbf{B}^d$ und $\mathbf{T}$

$\mathbf{B}^I$ $(r \times r)$ enthält die Kapitalkoeffizienten der Investitionsgütersektoren: b^I_{ij} = Kapitalgut i, das Sektor j je zusätzlicher Outputeinheit benötigt. Daraus bildet das Tool

$$\mathbf{B}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^I & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^{21} & -(\mathbf{E}^{22} - \mathbf{A}^{22}) \end{bmatrix} \tag{4}$$

Die unteren $n - r$ Zeilen sind die Zeilen von $-(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ der Konsumgütersektoren. Die Übergangsmatrix ist

$$\mathbf{T} = \mathbf{E} + (\mathbf{B}^d)^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{A}). \tag{5}$$

$\mathbf{B}^I$ und $\mathbf{B}^d$ müssen invertierbar sein.

6.3 Rekursion

$$\boxed{\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{T}\,\mathbf{x}_t - (\mathbf{B}^d)^{-1}\,\mathbf{c}_t} \tag{6}$$

gleichbedeutend mit $\mathbf{B}^d(\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{x}_t) = (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x}_t - \mathbf{c}_t$:

- **Investitionsgütersektoren:** Der Überschuss an Investitionsgütern bestimmt über $\mathbf{B}^I$ den Kapazitätszuwachs.
- **Konsumgütersektoren:** Ihre Nettoproduktion in $t+1$ deckt genau die vorgegebene Nachfrage, $[(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x}_{t+1}]^{II} = \mathbf{c}_t^{II}$.

6.4 Startwerte

$\mathbf{x}_0 = \mathbf{L}\mathbf{y}$ aus dem statischen Modell, Nachfrage $\mathbf{c}_0$ und Investition $\mathbf{i}_0$ mit $\mathbf{y} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{i}_0$. Das Tool prüft diese Bedingung (Toleranz 1 %) und fragt bei Abweichung nach. $\mathbf{i}_0$ dient nur der Prüfung; die Rekursion verwendet $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{c}_t$.

- **Gleichgewicht** ($\mathbf{y} = \mathbf{c}$, $\mathbf{i}_0 = \mathbf{0}$): bei konstantem $\mathbf{c}$ bleibt $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0$ theoretisch konstant.
- **Wachstum** ($\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{i}$, $\mathbf{i} > \mathbf{0}$): der Investitionsüberschuss lässt den Output wachsen.

7 Stabilität

7.1 Eigenschaft des Modells

Vorwärts gerechnet ist das dynamische Leontief-Modell in der Regel instabil: $\mathbf{T}$ hat mindestens einen Eigenwert mit Betrag größer als 1. Abweichungen vom Gleichgewichtspfad – auch Rundungsfehler im Startwert – wachsen mit dem Spektralradius $\rho(\mathbf{T}) = \max_i |\lambda_i(\mathbf{T})|$ an, bis ein Sektor negativen Output hat. Die Simulation bricht dann ab und meldet Periode und Sektoren. Wie viele Perioden berechnet werden, hängt daher von den Daten ab.

7.2 Einfluss der Kapitalkoeffizienten

Größere Kapitalkoeffizienten machen das Modell *stabiler*: Ein Überschuss wird auf mehr Kapitalbedarf verteilt und erhöht die Produktion weniger stark. Beispiel 3×3, $r = 1$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{L}\mathbf{y}$ mit $\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{i}$:

$\mathbf{B}^I$	$\rho(\mathbf{T})$	$x_1(3)$	Verhalten
0,1	8,7	26 612	explosiv
0,5	2,54	908	stark wachsend
5,5	1,14	276	moderat wachsend

7.3 Empfehlungen

- Kapitalkoeffizienten nicht zu klein wählen; Werte von etwa 1 bis 6 auf der Diagonale verzögern den Abbruch deutlich.
- Konstante oder lineare Nachfrage statt exponentieller.
- Startwert ungerundet aus dem statischen Modell übernehmen.
- Bei offenen Daten $\mathbf{c} = \mathbf{C} + \mathbf{V} + \mathbf{E}$ verwenden.

8 Beispielrechnung

8.1 Gegeben

Datensatz *Dynamik 3×3 Wachstum*, $r = 1$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}15 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}25 & 0{,}10 & 0{,}15 \\ 0{,}10 & 0{,}15 & 0{,}20 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^I = [0{,}5], \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 120 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_0 = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 130 \\ 170 \\ 135 \end{bmatrix}$$

Statisches Modell: $\mathbf{x}_0 = \mathbf{L}\mathbf{y} = [254{,}36;\ 302{,}42;\ 257{,}25]^\top$.

8.2 Matrizen

$$\mathbf{B}^d = \begin{bmatrix} 0{,}50 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & -0{,}90 & 0{,}15 \\ 0{,}10 & 0{,}15 & -0{,}80 \end{bmatrix}, \qquad (\mathbf{B}^d)^{-1} \approx \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0{,}6165 & -1{,}1470 & -0{,}2151 \\ 0{,}3656 & -0{,}2151 & -1{,}2903 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} \approx \begin{bmatrix} 2{,}7000 & -0{,}4000 & -0{,}2000 \\ 0{,}8323 & -0{,}1233 & -0{,}0616 \\ 0{,}4935 & -0{,}0731 & -0{,}0366 \end{bmatrix}, \qquad \rho(\mathbf{T}) = 2{,}54$$

8.3 Simulation (konstanter Konsum)

Periode	Sektor 1	Sektor 2	Sektor 3
0	254,36	302,42	257,25
1	314,36	294,75	244,56
2	481,97	346,41	275,20
3	907,71	477,65	353,02
4	1 989,16	811,00	550,71

Die Wachstumsrate des Investitionsgütersektors steigt von Periode zu Periode (Faktor 1,24; 1,53; 1,88; 2,19) und nähert sich $\rho(\mathbf{T}) = 2{,}54$.

Gleichgewicht zum Vergleich (*Dynamik 3×3 Gleichgewicht*, $\mathbf{y} = \mathbf{c}$): Der Startwert

$$\mathbf{x}_0 = [205{,}54;\ 261{,}21;\ 224{,}67]^\top$$

bleibt über alle Perioden konstant. Bei den größeren Beispielen (4×4 bis 8×8, $\rho(\mathbf{T}) \approx 7$–$8$) kippt das Gleichgewicht durch Rundungsfehler nach 18 bis 20 Perioden ins Negative, mit auf zwei Stellen gerundetem Startwert schon nach etwa 7.

Modell 2 mit derselben Endnachfrage und der Kapitalmatrix $\mathbf{B}$ des Datensatzes (Diagonale 36–44): $\mathbf{x}_1 = [255{,}14;\ 302{,}79;\ 257{,}53]^\top$, $\mathbf{x}_2 = [255{,}93;\ 303{,}15;\ 257{,}81]^\top$ – langsames, stabiles Wachstum.

9 Bedienung

1. **Eingabe:** „Daten aus Datenbox laden“ → Datensatz wählen. Das statische Modell wird berechnet, die Werte werden übernommen.
2. **Modell 1:** Investitionsszenario und Perioden wählen → „Simulation starten“.
3. **Modell 2:** vorgegebene Nachfrage (C oder C + V + E) und Zeitpfad prüfen → „DynModell2-Simulation starten“.
4. **Modell 3:** r prüfen bzw. wählen, $\mathbf{B}^I$, Nachfrage und $\mathbf{i}_0$ prüfen; die Statusliste zeigt, was fehlt → „DynModell3-Simulation starten“.
5. **Ergebnisse:** Zeitreihen als Diagramm und Tabelle; Abbruch bei negativem Output mit Angabe der Periode.
6. **Export:** Reiter Export.

10 Validierungen

- Statisches Modell berechnet; $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ invertierbar; Warnung bei Spaltensumme von $\mathbf{A} \geq 1$.
- Modell 2: Kapitalmatrix $\mathbf{B}$ $(n \times n)$ vorhanden und invertierbar.
- Modell 3: $1 \leq r < n$; $\mathbf{B}^I$ hat $r \times r$; $\det(\mathbf{B}^I) \neq 0$ und $\mathbf{B}^d$ invertierbar; $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{c}$ haben n Werte; $\mathbf{y} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{i}_0$ (Toleranz 1 %, sonst Rückfrage).
- Höchstens 500 Perioden; Abbruch bei negativem Output.

11 Export

- **Statisches Modell:** Leontief-Inverse, Outputvektor.
- **Modell 1:** Simulationsergebnisse, Investitionspfad, Matrix $\mathbf{B}$.
- **Modell 2:** Output $\mathbf{x}(t)$, Nachfrage $\mathbf{c}(t)$, Matrix $\mathbf{B}$, Komplett-Export.
- **Modell 3:** $\mathbf{B}^I$, $\mathbf{B}^d$, $(\mathbf{B}^d)^{-1}$, $\mathbf{T}$, Output $\mathbf{x}(t)$, Nachfrage $\mathbf{c}(t)$, Endnachfrage $\mathbf{y}$, alle Simulationsdaten.
- Diagramme als PNG.

12 Zusammenfassung

- Drei Modelle: vorgegebener Investitionspfad (1), Rekursion mit voller Kapitalmatrix (2), Rekursion mit Partitionierung (3).
- Daten kommen aus der Datenbox und werden für alle Modelle übernommen.
- Das dynamische Leontief-Modell ist vorwärts gerechnet instabil; größere Kapitalkoeffizienten und konstante oder lineare Nachfrage verlängern den Pfad.
- Bei offenen Volkswirtschaften gehört $\mathbf{C} + \mathbf{V} + \mathbf{E}$ zur vorgegebenen Nachfrage.

Literatur

- Leontief, W. (1970): The Dynamic Inverse. In: Carter, A. P., Bródy, A. (Hrsg.): *Contributions to Input-Output Analysis*, North-Holland.
- Miller, R. E., Blair, P. D. (2009): *Input-Output Analysis: Foundations and Extensions*, 2. Aufl., Cambridge University Press.
- Ten Raa, T. (2005): *The Economics of Input-Output Analysis*, Cambridge University Press.