Vierdimensionaler Input-Output-Rechner

Mathematische Beschreibung, Rechenschritte und Bedienung

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

4. November 2026

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Überblick **2**
1.1 Beispieldatensätze . . . 2
1.2 Notation und Reihenfolge . . . 2

2 Reiter 1 — Allgemeines vierdimensionales Modell **4**
2.1 Grundgleichungen . . . 4
2.2 Rechenschritte für Beispiel 1 . . . 4

3 Reiter 2 — Hierarchische Struktur (Modelle M1–M9) **7**
3.1 Klassifikationsprinzip . . . 7
3.2 Aggregationsregeln . . . 7
3.3 Rechenschritte für Beispiel 1 . . . 7

4 Reiter 3 — Teil-Input-Output-Tabellen **9**
4.1 Aufspaltung in zwei Gütergruppen . . . 9
4.2 Rechenschritte für Beispiel 1 mit $N_1 = \{1, 2, 3\}$, $N_2 = \{4, 5\}$ . . . 9

5 Reiter 4 — Make-Use-Matrizen **11**
5.1 Grundmatrizen . . . 11
5.2 Technologie-Annahmen . . . 11

6 Reiter 5 — Ableitung der Naturalwert-Verflechtungsbilanz **13**
6.1 Grundidee . . . 13
6.2 Rechenschritte für Beispiel 1 mit $N_1 = \{1, 2, 3\}$, Preise $p_{ik} = 1$ . . . 13

7 Datenbox **15**

A Glossar der Koeffizienten und Größen **16**

Literatur **16**

1 Einleitung und Überblick

Dieses Dokument beschreibt die mathematischen Grundlagen und die Bedienung des webbasierten vierdimensionalen Input-Output-Rechners und rechnet Beispiel 1 Schritt für Schritt durch. Das Tool gliedert sich in fünf Reiter:

- **Reiter 1** — Allgemeines vierdimensionales Modell (Grundlage für Reiter 2 und 3)
- **Reiter 2** — Hierarchische Struktur: Ableitung der Modelle M1–M9
- **Reiter 3** — Teil-Input-Output-Tabellen (Aufspaltung in zwei Gütergruppen)
- **Reiter 4** — Make-Use-Matrizen (eigenständige Datenbasis)
- **Reiter 5** — Ableitung der Naturalwert-Verflechtungsbilanz (eigene Dateneingabe, optional aus Reiter 1)

Hinweis zur Bedienung

Reiter 1 wird zuerst bearbeitet (Daten laden oder eingeben, *Berechnen*). Die Reiter 2 und 3 verwenden die dort berechnete Vorleistungsmatrix X_{ijkl} und den Bruttoproduktionsvektor X_{ik}. Reiter 4 arbeitet mit Use- und Make-Matrix, Reiter 5 mit einer eigenen Tabelle (die aus Reiter 1 übernommen werden kann).

1.1 Beispieldatensätze

Die Beispiele liegen in der zentralen Datenbox (Kennzeichen „Vierdimensional“) und werden in jedem Reiter über *Daten aus Datenbox laden* geladen.

Name im Tool	Inhalt	Reiter
Beispiel 1 (5 Güter, 2 Bereiche)	Zahlenbeispiel; $N_1 = \{1, 2, 3\}$	1, 2, 3, 5
Beispiel 2 (5 Güter, 2 Bereiche)	eigenes, konsistentes Beispiel; $N_1 = \{1, 2, 3\}$	1, 2, 3, 5
Beispiel 3 (3 Güter, 2 Bereiche)	verkleinertes Beispiel mit 3 Gütern	1, 2, 3, 5
Beispiel 4 (3 Güter, 2 Bereiche)	zweites eigenes Beispiel	1, 2, 3, 5
Make-Use Beispiel 1 (3 Güter, 3 Bereiche)	Zahlenbeispiel (große Werte)	4
Make-Use Beispiel 2 (3 Güter, 3 Bereiche)	eigenes, konsistentes Beispiel	4

Als durchgehendes Rechenbeispiel dient **Beispiel 1** (Reiter 1, 2, 3, 5), für Reiter 4 **Make-Use Beispiel 2**.

1.2 Notation und Reihenfolge

Symbol	Bedeutung
i, j	Güterindizes, $i, j = 1, \ldots, n$
k, l	Wirtschaftsbereichsindizes, $k, l = 1, \ldots, m$
(i, k)	kombinierter Index: Gut i, hergestellt in Bereich k (im Tool Gi-Bk)
X_{ijkl}	Lieferung des Gutes i aus Bereich k zur Produktion von Gut j in Bereich l
X_{ik}	Bruttoproduktion des Gutes i in Bereich k
Y_{ik}	Endnachfrage nach Gut i aus Bereich k

Die kombinierten Indizes sind **nach Bereichen** geordnet: G1-B1, G2-B1, …, Gn-B1, G1-B2, …. Eine CSV-Datei hat die Form

```
n=5;m=2
;G1-B1;G2-B1;...;G5-B2
G1-B1;20;20;...
...
Y;20;20;...
```

Ist eine Datei nach Gütern geordnet (G1-B1, G1-B2, G2-B1, …), sortiert das Tool sie anhand der Beschriftungen um und weist darauf hin.

2 Reiter 1 — Allgemeines vierdimensionales Modell

2.1 Grundgleichungen

Bilanzgleichung (Modell M1) für jedes Gut i aus Bereich k:

$$X_{ik} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} X_{ijkl} + Y_{ik}, \qquad i = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,m. \tag{1}$$

Inputkoeffizient:

$$a_{ijkl} = \frac{X_{ijkl}}{X_{jl}}. \tag{2}$$

Lineares Gleichungssystem und Leontief-Inverse:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{Y} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{X} = (\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{Y} = \mathbf{L}\mathbf{Y}, \tag{3}$$

mit der $(nm)\times(nm)$-Matrix $\mathbf{A}$. Gewichtsmatrix (Anteil des liefernden Bereichs k an allen Lieferungen des Gutes i in die Verwendung (j,l)):

$$w_{ijkl} = \frac{X_{ijkl}}{\sum_{k'} X_{ijk'l}}, \qquad \sum_{k} w_{ijkl} = 1. \tag{4}$$

Preisbewertung mit einem Preis p_{ik} je Gut und Bereich (bei n Gütern und m Bereichen $n\cdot m$ Preise, z. B. 6 bei 3 Gütern und 2 Bereichen, 10 bei 5 Gütern und 2 Bereichen); dasselbe Gut kann in verschiedenen Bereichen einen anderen Preis haben:

$$X^{p}_{ik} = p_{ik}\,X_{ik}, \qquad X^{p}_{ijkl} = p_{ik}\,X_{ijkl}, \qquad a^{p}_{ijkl} = a_{ijkl}\,\frac{p_{ik}}{p_{jl}}, \qquad \mathbf{A}^{p} = \langle p\rangle\mathbf{A}\langle p\rangle^{-1}. \tag{5}$$

2.2 Rechenschritte für Beispiel 1

Schritt 1 — Daten. Vorleistungsmatrix $Z = (X_{ijkl})$, Endnachfrage Y und (in Schritt 2 berechnet) Bruttoproduktion X:

	G1-B1	G2-B1	G3-B1	G4-B1	G5-B1	G1-B2	G2-B2	G3-B2	G4-B2	G5-B2	Y	X
G1-B1	20	20	0	1	4	30	20	0	0	0	20	115
G2-B1	0	14	0	0	0	0	6	10	2	0,5	20	52,5
G3-B1	0	0	20	0	0	0	0	20	5	0	50	95
G4-B1	4	0	0	0	2	0	0	10	10	10	5	41
G5-B1	3	0	0	3	1	0	5	0	5	5	5	27
G1-B2	0	20	0	0	0	100	40	0	0	0	25	185
G2-B2	0	0	0	0	0	0	10	10	0	0	27,5	47,5
G3-B2	0	0	25	25	0	0	0	25	3	2	45	125
G4-B2	10	0	4	4	0	8	2	5	0	0	20	53
G5-B2	0	5	3	3	5	1	4	5	0	0	5	31

Schritt 2 — Bruttoproduktion nach Gl. (1) als Zeilensumme plus Endnachfrage, z. B.

$$\begin{aligned} X_{1,1} &= 20+20+0+1+4+30+20+0+0+0+20 = 115,\\ X_{2,1} &= 0+14+0+0+0+0+6+10+2+0{,}5+20 = 52{,}5,\\ X_{3,2} &= 0+0+25+25+0+0+0+25+3+2+45 = 125. \end{aligned}$$

Insgesamt $X = (115;\ 52{,}5;\ 95;\ 41;\ 27;\ 185;\ 47{,}5;\ 125;\ 53;\ 31)^{\top}$.

Schritt 3 — Koeffizientenmatrix nach Gl. (2): jede Spalte von Z durch den Produktionswert der empfangenden Zeile teilen, z. B.

$$a_{1,2,1,1} = \frac{X_{1,2,1,1}}{X_{2,1}} = \frac{20}{52{,}5} = 0{,}381, \qquad a_{2,2,1,2} = \frac{6}{47{,}5} = 0{,}126, \qquad a_{3,4,2,1} = \frac{25}{41} = 0{,}610.$$

	G1-B1	G2-B1	G3-B1	G4-B1	G5-B1	G1-B2	G2-B2	G3-B2	G4-B2	G5-B2
G1-B1	0,174	0,381	0	0,024	0,148	0,162	0,421	0	0	0
G2-B1	0	0,267	0	0	0	0	0,126	0,08	0,038	0,016
G3-B1	0	0	0,211	0	0	0	0	0,16	0,094	0
G4-B1	0,035	0	0	0	0,074	0	0	0,08	0,189	0,323
G5-B1	0,026	0	0	0,073	0,037	0	0,105	0	0,094	0,161
G1-B2	0	0,381	0	0	0	0,541	0,842	0	0	0
G2-B2	0	0	0	0	0	0	0,211	0,08	0	0
G3-B2	0	0	0,263	0,61	0	0	0	0,2	0,057	0,065
G4-B2	0,087	0	0,042	0,098	0	0,043	0,042	0,04	0	0
G5-B2	0	0,095	0,032	0,073	0,185	0,005	0,084	0,04	0	0

Spaltensummen über 1 (G2-B1: 1,124, G2-B2: 1,832) sind hier zulässig: Die Tabelle ist in Natureinheiten aufgestellt, Mengen verschiedener Güter lassen sich nicht addieren. Maßgeblich für die Lösbarkeit ist der Spektralradius $\rho(\mathbf{A}) = 0{,}665 < 1$; damit existiert $\mathbf{L}$ und ist nichtnegativ.

Schritt 4 — Leontief-Inverse $\mathbf{L} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$:

	G1-B1	G2-B1	G3-B1	G4-B1	G5-B1	G1-B2	G2-B2	G3-B2	G4-B2	G5-B2
G1-B1	1,242	0,9	0,108	0,245	0,239	0,452	1,343	0,284	0,129	0,15
G2-B1	0,018	1,393	0,077	0,144	0,031	0,017	0,269	0,206	0,102	0,087
G3-B1	0,032	0,046	1,391	0,232	0,043	0,031	0,085	0,33	0,2	0,104
G4-B1	0,085	0,132	0,102	1,203	0,189	0,061	0,217	0,211	0,271	0,434
G5-B1	0,057	0,079	0,043	0,162	1,105	0,037	0,263	0,078	0,146	0,237
G1-B2	0,031	1,181	0,167	0,31	0,059	2,203	2,588	0,457	0,15	0,158
G2-B2	0,009	0,014	0,056	0,104	0,018	0,007	1,29	0,156	0,036	0,047
G3-B2	0,086	0,141	0,551	1,023	0,181	0,069	0,234	1,541	0,355	0,461
G4-B2	0,123	0,15	0,11	0,207	0,052	0,145	0,317	0,147	1,068	0,087
G5-B2	0,024	0,172	0,094	0,19	0,232	0,029	0,225	0,137	0,081	1,11

Rückrechnungsprobe: $\mathbf{L}\,Y = X$ reproduziert exakt

$$X = (115;\ 52{,}5;\ 95;\ 41;\ 27;\ 185;\ 47{,}5;\ 125;\ 53;\ 31)^{\top}.$$

Schritt 5 — Gewichtsmatrix nach Gl. (4). Beispiel Spalte G2-B1, Gut 1: Gut 1 wird an (G2,B1) aus Bereich 1 mit 20 und aus Bereich 2 mit 20 geliefert, also $w_{1,2,1,1} = w_{1,2,2,1} = 20/40 = 0{,}5$. Spalte G1-B1, Gut 4: 10 aus Bereich 2 und 4 aus Bereich 1, also $w_{4,1,1,1} = 4/14 = 0{,}286$, $w_{4,1,2,1} = 10/14 = 0{,}714$. Liefert kein Bereich, ist $w = 0$.

	G1-B1	G2-B1	G3-B1	G4-B1	G5-B1	G1-B2	G2-B2	G3-B2	G4-B2	G5-B2
G1-B1	1	0,5	0	1	1	0,231	0,333	0	0	0
G2-B1	0	1	0	0	0	0	0,375	0,5	1	1
G3-B1	0	0	0,444	0	0	0	0	0,444	0,625	0
G4-B1	0,286	0	0	0	1	0	0	0,667	1	1
G5-B1	1	0	0	0,5	0,167	0	0,556	0	1	1
G1-B2	0	0,5	0	0	0	0,769	0,667	0	0	0
G2-B2	0	0	0	0	0	0	0,625	0,5	0	0
G3-B2	0	0	0,556	1	0	0	0	0,556	0,375	1
G4-B2	0,714	0	1	1	0	1	1	0,333	0	0
G5-B2	0	1	1	0,5	0,833	1	0,444	1	0	0

Preisbewertung. Voreingestellt ist $p_{ik} = 1$ für alle Güter und Bereiche; dann sind wertmäßige und mengenmäßige Darstellung gleich. Mit anderen Preisen gilt Gl. (5), z. B. mit $p_{1,1} = 2$ (Gut 1 aus Bereich 1) und sonst $p_{ik} = 1$: $X^{p}_{1,1} = 2 \cdot 115 = 230$, Zeile G1-B1 von A^{p} verdoppelt, Spalte G1-B1 halbiert (das Diagonalelement $a_{1,1,1,1}$ bleibt gleich).

Hinweis zur Bedienung

Bedienung Reiter 1: (1) *Daten aus Datenbox laden* → Beispiel wählen; die Tabelle wird gefüllt und sofort berechnet. Alternativ Struktur festlegen, *Tabellen erzeugen* und eingeben bzw. CSV laden, dann (2) *Berechnen* — liefert X, A, L, W. Beim Laden neuer Daten werden alle früheren Ergebnisse verworfen. (3) Optional: *Prognose berechnen* mit geänderter Endnachfrage; Preise je Gut und Bereich (Felder G1-B1, G2-B1, ...) eingeben und *Preise anwenden*. (4) Export einzeln oder als Gesamt-CSV. (5) *Aktuelles Ergebnis in Datenbox*

speichern legt n, m, Z, Y sowie A und Y in der Datenbox ab. Statische Datensätze lassen sich unter „Weitere“ als n Güter mit einem Bereich laden.

3 Reiter 2 — Hierarchische Struktur (Modelle M1–M9)

3.1 Klassifikationsprinzip

Aus M1 lassen sich acht weitere Modelle ableiten, je nachdem, ob auf Input- bzw. Outputseite beide Merkmale (Gut *und* Bereich), nur das Gut oder nur der Bereich beibehalten werden:

	Output: j,l	Output: j	Output: l
Input: i,k	M1 $i,k \to j,l$	M2 $i,k \to j$	M3 $i,k \to l$
Input: i	M4 $i \to j,l$	M5 $i \to j$	M6 $i \to l$
Input: k	M7 $k \to j,l$	M8 $k \to j$	M9 $k \to l$

Nur M1, M5 und M9 sind quadratische, eindeutig lösbare Leontief-Systeme; die übrigen sechs sind rechteckig.

3.2 Aggregationsregeln

Zähler und Nenner von Gl. (2) werden über die entfallenden Indizes summiert. M4 (Input nur Gut):

$$a_{i,jl} = \frac{\sum_k X_{ijkl}}{X_{jl}} = \sum_k a_{ijkl}. \tag{6}$$

M5 (Input und Output nur Gut), mit $X_{j\cdot} = \sum_l X_{jl}$:

$$a_{ij} = \frac{\sum_k \sum_l X_{ijkl}}{X_{j\cdot}} = \sum_l a_{i,jl}\, d_{jl}, \qquad d_{jl} = \frac{X_{jl}}{X_{j\cdot}}. \tag{7}$$

M9 (Input und Output nur Bereich), mit $X_{\cdot l} = \sum_j X_{jl}$:

$$a_{kl} = \frac{\sum_i \sum_j X_{ijkl}}{X_{\cdot l}}. \tag{8}$$

3.3 Rechenschritte für Beispiel 1

M4 — Zeilen über die Bereiche k summieren (z. B. Gut 1 an G2-B1: $20 + 20 = 40$), dann durch X_{jl} teilen ($40/52{,}5 = 0{,}762$). Vorleistungen:

	G1-B1	G2-B1	G3-B1	G4-B1	G5-B1	G1-B2	G2-B2	G3-B2	G4-B2	G5-B2
G1	20	40	0	1	4	130	60	0	0	0
G2	0	14	0	0	0	0	16	20	2	0,5
G3	0	0	45	25	0	0	0	45	8	2
G4	14	0	4	4	2	8	2	15	10	10
G5	3	5	3	6	6	1	9	5	5	5

Koeffizienten:

	G1-B1	G2-B1	G3-B1	G4-B1	G5-B1	G1-B2	G2-B2	G3-B2	G4-B2	G5-B2
G1	0,174	0,762	0	0,024	0,148	0,703	1,263	0	0	0
G2	0	0,267	0	0	0	0	0,337	0,16	0,038	0,016
G3	0	0	0,474	0,61	0	0	0	0,36	0,151	0,065
G4	0,122	0	0,042	0,098	0,074	0,043	0,042	0,12	0,189	0,323
G5	0,026	0,095	0,032	0,146	0,222	0,005	0,189	0,04	0,094	0,161

M5 — zusätzlich die Spalten über l summieren. Güter-Produktion (z. B. $X_{1\cdot} = 115{+}185 = 300$) und Endnachfrage je Gut:

$$X_{M5} = (300;\ 100;\ 220;\ 94;\ 58)^\top, \qquad Y_{M5} = (45;\ 47{,}5;\ 95;\ 25;\ 10)^\top,$$

$$Z_{M5} = \begin{pmatrix} 150 & 100 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 30 & 20 & 2 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 90 & 33 & 2 \\ 22 & 2 & 19 & 14 & 12 \\ 4 & 14 & 8 & 11 & 11 \end{pmatrix},$$

$$A_{M5} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 & 0 & 0{,}0106 & 0{,}069 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}0909 & 0{,}0213 & 0{,}0086 \\ 0 & 0 & 0{,}4091 & 0{,}3511 & 0{,}0345 \\ 0{,}0733 & 0{,}02 & 0{,}0864 & 0{,}1489 & 0{,}2069 \\ 0{,}0133 & 0{,}14 & 0{,}0364 & 0{,}117 & 0{,}1897 \end{pmatrix},$$

$$L_{M5} = \begin{pmatrix} 2{,}0627 & 3{,}0221 & 0{,}5387 & 0{,}3682 & 0{,}3246 \\ 0{,}024 & 1{,}4806 & 0{,}254 & 0{,}1514 & 0{,}0672 \\ 0{,}1287 & 0{,}2681 & 1{,}8724 & 0{,}8224 & 0{,}3035 \\ 0{,}2094 & 0{,}4141 & 0{,}2857 & 1{,}3582 & 0{,}3812 \\ 0{,}0741 & 0{,}3774 & 0{,}178 & 0{,}2653 & 1{,}3197 \end{pmatrix}.$$

Probe: $L_{M5}\,Y_{M5} = (300;\ 100;\ 220;\ 94;\ 58)^{\top}$.

M9 — Zeilen und Spalten je Bereich summieren. Bereichsproduktion $X_{\cdot l} = (330{,}5;\ 441{,}5)^{\top}$, Endnachfrage je Bereich $(100;\ 122{,}5)^{\top}$:

$$Z_{M9} = \begin{pmatrix} 92 & 138{,}5 \\ 104 & 215 \end{pmatrix}, \quad A_{M9} = \begin{pmatrix} 0{,}2784 & 0{,}3137 \\ 0{,}3147 & 0{,}487 \end{pmatrix}, \quad L_{M9} = \begin{pmatrix} 1{,}8896 & 1{,}1554 \\ 1{,}159 & 2{,}6579 \end{pmatrix}.$$

Probe: $L_{M9}\,Y_{M9} = (330{,}5;\ 441{,}5)^{\top}$. Die Summen über verschiedene Güter sind bei Natureinheiten nur rechnerisch, nicht ökonomisch interpretierbar (wertmäßig sinnvoll mit Preisen).

Hinweis zur Bedienung

Bedienung Reiter 2: Nach *Berechnen* in Reiter 1: *Alle Modelle M2–M9 ableiten.* Angezeigt werden Vorleistungsschema und Koeffizientenmatrix je Modell, bei M5/M9 zusätzlich die Leontief-Inverse. Export einzeln oder gesamt.

4 Reiter 3 — Teil-Input-Output-Tabellen

4.1 Aufspaltung in zwei Gütergruppen

Die Güter werden in $N_1 \cup N_2 = \{1, \dots, n\}$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ zerlegt. Lieferungen an die andere Gruppe werden der Endnachfrage zugerechnet:

$$Y^*_{ik} = Y_{ik} + \sum_{l} \sum_{j \in N_2} X_{ijkl}, \qquad i \in N_1, \tag{9}$$

Bezüge aus der anderen Gruppe werden als Primärinput ausgewiesen:

$$P^*_{jl} = \sum_{k} \sum_{i \in N_2} X_{ijkl}, \qquad j \in N_1. \tag{10}$$

Die Teiltabelle für N_1 ist ein eigenständiges Leontief-System:

$$X_{ik} = \sum_{j \in N_1} \sum_{l} a_{ijkl}\, X_{jl} + Y^*_{ik}, \qquad i \in N_1. \tag{11}$$

Für N_2 gilt dasselbe mit vertauschten Rollen.

4.2 Rechenschritte für Beispiel 1 mit $N_1 = \{1,2,3\}$, $N_2 = \{4,5\}$

Schritt 1 — modifizierte Endnachfrage. Zeile G1-B1: Lieferungen an N_2 sind $X_{1,4,1,1} = 1$, $X_{1,5,1,1} = 4$, $X_{1,4,1,2} = X_{1,5,1,2} = 0$, also $Y^* = 20+1+4 = 25$. Zeile G3-B2: $45+25+0+3+2 = 75$. Reihenfolge G1-B1, G2-B1, G3-B1, G1-B2, G2-B2, G3-B2:

$$Y^* = (25;\ 22{,}5;\ 55;\ 25;\ 27{,}5;\ 75)^\top, \qquad X = (115;\ 52{,}5;\ 95;\ 185;\ 47{,}5;\ 125)^\top.$$

Schritt 2 — Primärinput (Bezüge aus N_2), z. B. Spalte G1-B1: $4+3+10+0 = 17$:

$$P^* = (17;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11;\ 20)^\top.$$

Schritt 3 — Koeffizienten und Inverse (Ausschnitt $N_1 \times N_1$ aus $\mathbf{A}$):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0{,}1739 & 0{,}381 & 0 & 0{,}1622 & 0{,}4211 & 0 \\ 0 & 0{,}2667 & 0 & 0 & 0{,}1263 & 0{,}08 \\ 0 & 0 & 0{,}2105 & 0 & 0 & 0{,}16 \\ 0 & 0{,}381 & 0 & 0{,}5405 & 0{,}8421 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2105 & 0{,}08 \\ 0 & 0 & 0{,}2632 & 0 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix},$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1{,}2105 & 0{,}8508 & 0{,}0746 & 0{,}4272 & 1{,}2375 & 0{,}2237 \\ 0 & 1{,}3636 & 0{,}0565 & 0 & 0{,}2182 & 0{,}1695 \\ 0 & 0 & 1{,}3571 & 0 & 0 & 0{,}2714 \\ 0 & 1{,}1306 & 0{,}1298 & 2{,}1765 & 2{,}5025 & 0{,}3893 \\ 0 & 0 & 0{,}0452 & 0 & 1{,}2667 & 0{,}1357 \\ 0 & 0 & 0{,}4464 & 0 & 0 & 1{,}3393 \end{pmatrix}.$$

Probe: $L_1\, Y^* = (115;\ 52{,}5;\ 95;\ 185;\ 47{,}5;\ 125)^\top$ — identisch mit X aus Reiter 1.

Teiltabelle N_2 (G4-B1, G5-B1, G4-B2, G5-B2):

$$Y^* = (19;\ 13;\ 49;\ 23)^\top, \qquad P^* = (26;\ 4;\ 10;\ 2{,}5)^\top,$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}0741 & 0{,}1887 & 0{,}3226 \\ 0{,}0732 & 0{,}037 & 0{,}0943 & 0{,}1613 \\ 0{,}0976 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0732 & 0{,}1852 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1{,}0588 & 0{,}1518 & 0{,}2141 & 0{,}366 \\ 0{,}1069 & 1{,}087 & 0{,}1227 & 0{,}2098 \\ 0{,}1033 & 0{,}0148 & 1{,}0209 & 0{,}0357 \\ 0{,}0973 & 0{,}2124 & 0{,}0384 & 1{,}0656 \end{pmatrix},$$

Probe: $L_2\, Y^* = (41;\ 27;\ 53;\ 31)^\top$.

Hinweis zur Bedienung

Bedienung Reiter 3: *Daten aus Datenbox laden* (setzt bei Beispiel 1 und 2 $N_1 = \{1, 2, 3\}$) oder Daten aus Reiter 1 verwenden. Nach dem Laden aus der Datenbox wird in Reiter 1 automatisch berechnet; sonst zuerst *Berechnen* in Reiter 1. Güter per Kontrollkästchen N_1 zuordnen (Rest bildet N_2), *Teiltabellen bilden*. In der wertmäßigen Darstellung wird jede Zeile (i, k) mit p_{ik} aus Reiter 1 multipliziert.

5 Reiter 4 — Make-Use-Matrizen

5.1 Grundmatrizen

Use-Matrix U (Gut × Bereich) und Make-Matrix V (Bereich × Gut); Güter- und Bereichsoutput:

$$x_i = \sum_k V_{ki}, \qquad g_k = \sum_i V_{ki}. \tag{12}$$

Koeffizientenmatrizen:

$$D_{ki} = V_{ki}/x_i \quad \text{(Marktanteilsmatrix)} \tag{13}$$
$$B_{il} = U_{il}/g_l \quad \text{(Verwendungskoeffizienten)} \tag{14}$$
$$C_{il} = V_{li}/g_l \quad \text{(Produktionsstruktur)} \tag{15}$$

5.2 Technologie-Annahmen

Industrie-Technologie (einheitliche Inputstruktur je Bereich):

$$A_{ii} = B\,D \quad \text{(Güter × Güter)}, \qquad A_{ll} = D\,B \quad \text{(Bereich × Bereich)}. \tag{16}$$

Güter-Technologie (einheitliche Inputstruktur je Gut, erfordert $n = m$):

$$A_{ii} = B\,C^{-1}, \qquad A_{ll} = C^{-1}B. \tag{17}$$

Make-Use Beispiel 2 (3 Güter, 3 Bereiche)

Grunddaten.

$$V = \begin{pmatrix} 80 & 4 & 2 \\ 3 & 95 & 5 \\ 2 & 6 & 70 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 20 & 8 & 4 \\ 6 & 35 & 7 \\ 3 & 5 & 25 \end{pmatrix}, \quad y = (53,\ 57,\ 44)^\top.$$

Nach Gl. (12): $x = (85,\ 105,\ 77)$, $g = (86,\ 103,\ 78)$. Probe: U-Zeilensumme $+\,y = x$, z. B. $20 + 8 + 4 + 53 = 85$.

Koeffizienten (Gl. (13)–(15)), z. B. $D_{11} = 80/85 = 0{,}9412$, $B_{11} = 20/86 = 0{,}2326$, $C_{11} = 80/86 = 0{,}9302$:

$$D = \begin{pmatrix} 0{,}9412 & 0{,}0381 & 0{,}0260 \\ 0{,}0353 & 0{,}9048 & 0{,}0649 \\ 0{,}0235 & 0{,}0571 & 0{,}9091 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}2326 & 0{,}0777 & 0{,}0513 \\ 0{,}0698 & 0{,}3398 & 0{,}0897 \\ 0{,}0349 & 0{,}0485 & 0{,}3205 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}9302 & 0{,}0291 & 0{,}0256 \\ 0{,}0465 & 0{,}9223 & 0{,}0769 \\ 0{,}0233 & 0{,}0485 & 0{,}8974 \end{pmatrix}.$$

Industrie-Technologie (Gl. (16)):

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 0{,}2228 & 0{,}0821 & 0{,}0577 \\ 0{,}0798 & 0{,}3152 & 0{,}1055 \\ 0{,}0421 & 0{,}0636 & 0{,}2954 \end{pmatrix}, \quad A_{ll} = \begin{pmatrix} 0{,}2224 & 0{,}0873 & 0{,}0600 \\ 0{,}0736 & 0{,}3133 & 0{,}1038 \\ 0{,}0412 & 0{,}0654 & 0{,}2977 \end{pmatrix},$$

$$L_{pp} = \begin{pmatrix} 1{,}3113 & 0{,}1695 & 0{,}1328 \\ 0{,}1671 & 1{,}5025 & 0{,}2386 \\ 0{,}0934 & 0{,}1457 & 1{,}4488 \end{pmatrix}, \quad L_{ll} = \begin{pmatrix} 1{,}3104 & 0{,}1798 & 0{,}1386 \\ 0{,}1542 & 1{,}4983 & 0{,}2347 \\ 0{,}0912 & 0{,}1500 & 1{,}4539 \end{pmatrix}.$$

Bereichsseitige Endnachfrage $y' = D\,y = (53{,}197;\ 56{,}299;\ 44{,}504)^\top$. Es gilt exakt $L_{pp}\,y = x$ und $L_{ll}\,y' = g$.

Güter-Technologie (Gl. (17)):

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}0773 & -0{,}0325 & -0{,}0280 \\ -0{,}0522 & 1{,}0907 & -0{,}0920 \\ -0{,}0251 & -0{,}0582 & 1{,}1200 \end{pmatrix},$$

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 0{,}2452 & 0{,}0742 & 0{,}0438 \\ 0{,}0552 & 0{,}3631 & 0{,}0673 \\ 0{,}0270 & 0{,}0332 & 0{,}3535 \end{pmatrix}, \quad A_{ll} = \begin{pmatrix} 0{,}2473 & 0{,}0713 & 0{,}0434 \\ 0{,}0607 & 0{,}3621 & 0{,}0657 \\ 0{,}0292 & 0{,}0327 & 0{,}3525 \end{pmatrix},$$

$$L_{pp} = \begin{pmatrix} 1{,}3405 & 0{,}1617 & 0{,}1076 \\ 0{,}1227 & 1{,}5936 & 0{,}1742 \\ 0{,}0623 & 0{,}0885 & 1{,}5603 \end{pmatrix}, \quad L_{ll} = \begin{pmatrix} 1{,}3452 & 0{,}1557 & 0{,}1059 \\ 0{,}1350 & 1{,}5915 & 0{,}1706 \\ 0{,}0674 & 0{,}0873 & 1{,}5577 \end{pmatrix}.$$

$L_{pp}\, y = x$ exakt; $L_{ll}\, y' = (85{,}037;\ 104{,}372;\ 77{,}824)^\top \approx g$.
Institutionelle/funktionelle Tabellen $Z = A \cdot \mathrm{diag}(x)$, Güter × Güter:

$$Z^{\text{Industrie}} = \begin{pmatrix} 18{,}9 & 8{,}6 & 4{,}4 \\ 6{,}8 & 33{,}1 & 8{,}1 \\ 3{,}6 & 6{,}7 & 22{,}7 \end{pmatrix}, \qquad Z^{\text{Güter-Tech}} = \begin{pmatrix} 20{,}8 & 7{,}8 & 3{,}4 \\ 4{,}7 & 38{,}1 & 5{,}2 \\ 2{,}3 & 3{,}5 & 27{,}2 \end{pmatrix};$$

Zeilensumme $+\,y$ ergibt jeweils $x = (85,\ 105,\ 77)$.

Asymmetrie unter Güter-Technologie

Güterseitig reproduziert L_{pp} den Vektor x stets exakt. Bereichsseitig wird $y' = D\, y$ aus der Marktanteilsmatrix gebildet und mit der aus C^{-1} abgeleiteten Matrix A_{ll} zurückgerechnet; beide Schritte passen unter Güter-Technologie nicht exakt zusammen. Die Abweichung zu g (hier etwa ± 1) ist eine strukturelle Eigenschaft, keine Rechenungenauigkeit.

Hinweis zur Bedienung

Bedienung Reiter 4: *Daten aus Datenbox laden* (Make-Use Beispiel 1 oder 2) oder Struktur festlegen und U, V, y eingeben bzw. als CSV laden. Technologie-Annahme wählen, *Berechnen*. Ergebnis: D, B, C, A_{ii}, A_{ll}, Leontief-Inversen, institutionelle/funktionelle Tabellen.

6 Reiter 5 — Ableitung der Naturalwert-Verflechtungsbilanz

6.1 Grundidee

Wie in Reiter 3 wird in N_1 (detailliert) und N_2 (als *Restproduktion*) zerlegt. Die Bereichsgliederung bleibt für N_1 erhalten; N_2 wird je Bereich zu einer Restproduktionsspalte verdichtet.

Tabelle A (Input-Output-Schema Variante 1): N_1-Zeilen je Bereich k vollständig aus Natureinheiten, dazu je Bereich l

$$\text{Restpro.}_{ikl} = \sum_{j \in N_2} X_{ijkl}. \tag{18}$$

Tabelle B (Naturalwert-Verflechtungsbilanz): dieselben N_1-Zeilen über die Bereiche k summiert (Prinzip M4):

$$X_{i,jl} = \sum_k X_{ijkl}, \qquad \text{Restpro.}_{il} = \sum_k \text{Restpro.}_{ikl}, \qquad X_i = \sum_k X_{ik}. \tag{19}$$

Bereichszeilen (wertmäßig, Summe über *alle* Güter mit Preisen p_{ik}):

$$\text{Bereich}_k[j,l] = \sum_{i=1}^{n} p_{ik}\, X_{ijkl}. \tag{20}$$

6.2 Rechenschritte für Beispiel 1 mit $N_1 = \{1,2,3\}$, Preise $p_{ik} = 1$

Schritt 1 — Tabelle A. Zeile G1-B1: Lieferungen an G1–G3 in Bereich 1 und 2 unverändert (20, 20, 0 | 30, 20, 0); Restproduktion Bereich $1 = X_{1,4,1,1} + X_{1,5,1,1} = 1 + 4 = 5$, Bereich $2 = 0$. Zeile G2-B1: Restproduktion Bereich $2 = 2 + 0{,}5 = 2{,}5$. Zeile G3-B2: Restproduktion Bereich $1 = 25 + 0 = 25$, Bereich $2 = 3 + 2 = 5$. Bereichszeile 1, Spalte G1-B1 nach Gl. (20): $1 \cdot 20 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 27$.

	G1B1	G2B1	G3B1	G1B2	G2B2	G3B2	R.B1	R.B2	Y	X
G1-B1	20	20	0	30	20	0	5	0	20	115
G2-B1	0	14	0	0	6	10	0	2,5	20	52,5
G3-B1	0	0	20	0	0	20	0	5	50	95
G1-B2	0	20	0	100	40	0	0	0	25	185
G2-B2	0	0	0	0	10	10	0	0	27,5	47,5
G3-B2	0	0	25	0	0	25	25	5	45	125
Bereich 1	27	34	20	30	31	40	11	37,5	100	330,5
Bereich 2	10	25	32	109	56	45	37	5	122,5	441,5

Schritt 2 — Tabelle B (Zeilen über die Bereiche summiert), z. B. Gut 1 an G2-B1: $20 + 20 = 40$, an G1-B2: $30 + 100 = 130$, $X_1 = 115 + 185 = 300$:

	G1B1	G2B1	G3B1	G1B2	G2B2	G3B2	R.B1	R.B2	Y	X
G1	20	40	0	130	60	0	5	0	45	300
G2	0	14	0	0	16	20	0	2,5	47,5	100
G3	0	0	45	0	0	45	25	10	95	220
Bereich 1	27	34	20	30	31	40	11	37,5	100	330,5
Bereich 2	10	25	32	109	56	45	37	5	122,5	441,5

Mit $p_{ik} = 1$ ergeben sich als Summen der Bereichszeilen 330,5 und 441,5 (= Bereichsproduktion aus M9).

Hinweis zur Bedienung

Bedienung Reiter 5: *Daten aus Datenbox laden* (setzt bei Beispiel 1 und 2 $N_1 = \{1,2,3\}$), *Daten aus Reiter 1 übernehmen* oder eigene Daten/CSV. Preise p_{ik} je Gut und Bereich eingeben oder als CSV laden (Standard 1; Vorlage mit Kopfzeile G1-B1; G2-B1; …; die Spalten werden anhand der Beschriftung zugeordnet, ältere Dateien mit einem Preis je Gut gelten

für alle Bereiche), *Berechnen*, N_1 prüfen, *Tabellen erzeugen* — liefert Tabelle A, Tabelle A (wertmäßig), Tabelle B sowie Koeffizientenmatrizen und Vektoren.

7 Datenbox

- **Laden:** In den Reitern 1, 3, 4 und 5 öffnet *Daten aus Datenbox laden* eine Liste der passenden Datensätze — Verflechtungstabellen für Reiter 1, 3 und 5, Make-Use-Datensätze für Reiter 4. Statische Datensätze stehen unter „Weitere“ und werden als n Güter mit einem Bereich geladen ($Z = A\,\mathrm{diag}(X)$, $X = (I - A)^{-1}Y$).
- **Speichern** (Reiter 1): mit vollständiger Struktur (n, m, Z, Y) im Feld `io4d`, dazu A und Y der Dimension nm; Kennzeichen „Vierdimensional“.
- **Export** (Datenbox-Verwaltung): CSV im Format des IO-Rechners (wieder einlesbar), Excel mit den Blättern Z bzw. U/V.

A Glossar der Koeffizienten und Größen

Symbol	Bedeutung
X_{ijkl}	Lieferung des Gutes i aus Bereich k zur Produktion von Gut j in Bereich l
X_{ik}	Bruttoproduktion des Gutes i in Bereich k
Y_{ik}	Endnachfrage nach Gut i aus Bereich k
a_{ijkl}	Inputkoeffizient, $= X_{ijkl}/X_{jl}$ (Gl. 2)
A, L	Koeffizientenmatrix bzw. Leontief-Inverse des vierdimensionalen Modells
$\rho(A)$	Spektralradius; $\rho < 1$ sichert die Lösbarkeit auch bei Spaltensummen über 1 (Natureinheiten)
w_{ijkl}	Gewichtsmatrix: Anteil des liefernden Bereichs k an der Lieferung von Gut i in Verwendung (j, l)
p_{ik}	Preis des Gutes i aus Bereich k
A^p, X^p	preisbewertete Koeffizientenmatrix bzw. Bruttoproduktion
M1–M9	Modellvarianten je nach beibehaltenem Klassifikationsmerkmal (Reiter 2)
d_{jl}	Anteil des Bereichs l an der Produktion des Gutes j, $= X_{jl}/X_{j\cdot}$
N_1, N_2	disjunkte Teilmengen der Güter (Reiter 3 und 5)
Y^*_{ik}	modifizierte Endnachfrage der Teiltabelle (Gl. 9)
P^*_{jl}	Primärinput der Teiltabelle aus der anderen Gruppe (Gl. 10)
U_{il}, V_{ki}	Use- bzw. Make-Matrix (Reiter 4)
x_i, g_k	Güter- bzw. Bereichsoutput (Gl. 12)
D, B, C	Marktanteils-, Verwendungs- und Produktionsstrukturmatrix (Reiter 4)
A_{ii}, A_{ll}	Koeffizientenmatrix Güter×Güter bzw. Bereich×Bereich unter Industrie- oder Güter-Technologie
Tabelle A	Input-Output-Schema Variante 1: N_1-Zeilen je Bereich plus Restproduktion (Reiter 5)
Tabelle B	Naturalwert-Verflechtungsbilanz: Tabelle A über die Bereiche summiert (Reiter 5)
Restpro.$_{ikl}$	Lieferung von $(i, k) \in N_1$ an N_2 in Bereich l (Gl. 18)
Bereich$_k$	wertmäßige Bereichszeile, Summe über alle Güter mit Preisgewichtung (Gl. 20)

Literatur

P. Fleissner, W. Böhme, H.-U. Brautzsch, J. Höhne, J. Siassi, K. Stark: *Input-Output-Analyse. Eine Einführung in Theorie und Anwendungen.* Springer-Verlag, Wien, New York 1993.