Aufgabensammlung

Entscheidungsbaum – Rollback und Erwartungswerte

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Stufe 1: Leicht **2**
Aufgabe 1.1 2
Aufgabe 1.2 3

2 Stufe 2: Mittel **4**
Aufgabe 2.1 4
Aufgabe 2.2 5

3 Stufe 3: Schwer **7**
Aufgabe 3.1 7
Aufgabe 3.2 8

1 Stufe 1: Leicht

Aufgabe 1.1 – Einstufiger Entscheidungsbaum

Aufgabe 1.1

Ein Unternehmen entscheidet, ob es in ein neues Projekt investiert. Bei Investition hängt der Gewinn (Tsd. Euro) von der Marktentwicklung ab:

Szenario	Wahrscheinlichkeit	Gewinn
Gute Konjunktur	0,5	200
Mittlere Konjunktur	0,3	80
Schlechte Konjunktur	0,2	−60

Bei Nicht-Investition ist der Gewinn sicher 0.

(a) Zeichne den Entscheidungsbaum.

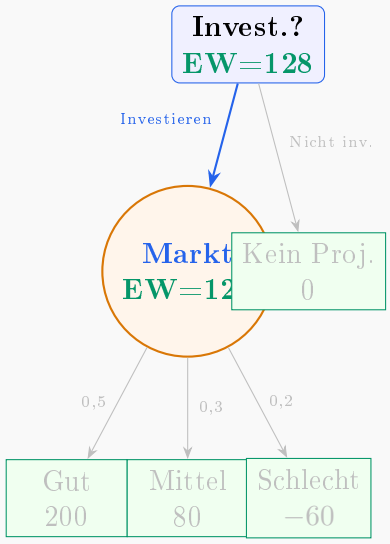
(b) Berechne den Erwartungswert des Zufallsknotens.

(c) Welche Entscheidung empfiehlt das Rollback-Verfahren?

(d) Ab welchem sicheren Alternativgewinn wäre Nicht-Investieren besser?

Lösung: Aufgabe 1.1

(a) Entscheidungsbaum:



(b) Erwartungswert:

$$\mathrm{EW}_{\text{Markt}} = 0{,}5 \cdot 200 + 0{,}3 \cdot 80 + 0{,}2 \cdot (-60) = 100 + 24 - 12 = \mathbf{112}$$

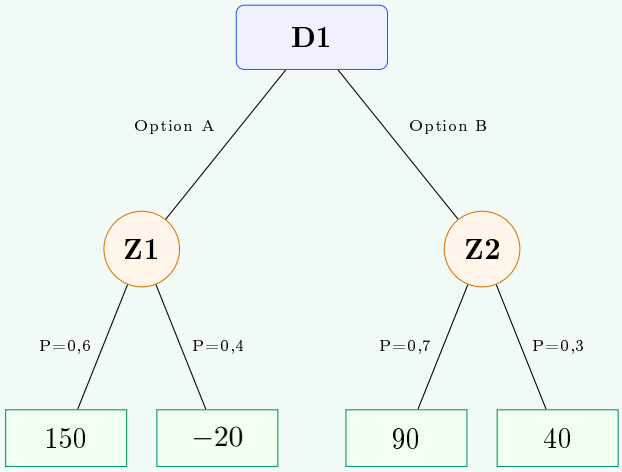
Hinweis: EW = 112, nicht 128. Das Baumdiagramm zeigt bereits den korrekten Wert.

(c) Rollback: $\text{EW}_{\text{Wurzel}} = \max(112,\ 0) = 112 \Rightarrow$ **Investieren**.
(d) Schwellenwert: Nicht-Investieren ist besser, wenn der sichere Alternativgewinn $g > 112$ Tsd. Euro.
Optimale Entscheidung: Investieren, EW = 112 Tsd. Euro

Aufgabe 1.2 – Rollback: Berechnung und Interpretation

Aufgabe 1.2

Gegeben ist folgender Entscheidungsbaum (Auszahlungen in Tsd. Euro):



(a) Berechne EW(Z1) und EW(Z2).

(b) Welche Option wählt Entscheidungsknoten D1?

(c) Wie groß ist der Vorteil der optimalen Option (in Tsd. Euro)?

Lösung: Aufgabe 1.2

(a) Erwartungswerte:

$$\text{EW}(Z_1) = 0{,}6 \cdot 150 + 0{,}4 \cdot (-20) = 90 - 8 = \mathbf{82}$$

$$\text{EW}(Z_2) = 0{,}7 \cdot 90 + 0{,}3 \cdot 40 = 63 + 12 = \mathbf{75}$$

(b) Entscheidung: $\text{EW}(D_1) = \max(82,\ 75) = 82 \Rightarrow$ **Option A**.
(c) Vorteil: $82 - 75 = \mathbf{7}$ Tsd. Euro.

2 Stufe 2: Mittel

Aufgabe 2.1 – Zweistufiger Baum mit Folgentscheidung

Aufgabe 2.1

Ein Pharmaunternehmen prüft die Zulassung eines Medikaments.
Stufe 1: Klinische Studie durchführen (Kosten 100) oder abbrechen (Auszahlung 0).
Stufe 2 (nach Studie):

- Studienerfolg ($P = 0{,}7$): Entscheidung – Markteinführung oder Lizenzverkauf.
- Studienfehlschlag ($P = 0{,}3$): Auszahlung -100.

Stufe 3 (nach Erfolg):

- **Markteinführung** (netto nach Kosten): Großer Erfolg ($P = 0{,}5$, $+400$), Kleiner Erfolg ($P = 0{,}3$, $+150$), Misserfolg ($P = 0{,}2$, -80).
- **Lizenzverkauf**: sicherer Erlös $+120$.

(a) Führe das Rollback-Verfahren vollständig durch.

(b) Welche Strategie ist optimal?

(c) Wie verändert sich die Entscheidung, wenn die Erfolgswahrscheinlichkeit der Studie auf $P = 0{,}5$ sinkt?

Lösung: Aufgabe 2.1

(a) Rollback:
Zufallsknoten Markteinführung:

$$\text{EW}_{\text{Markt}} = 0{,}5 \cdot 400 + 0{,}3 \cdot 150 + 0{,}2 \cdot (-80) = 200 + 45 - 16 = \mathbf{229}$$

Entscheidungsknoten Stufe 3:

$$\text{EW}_{\text{Stufe3}} = \max(229,\ 120) = \mathbf{229} \quad \Rightarrow \text{Markteinführung}$$

Zufallsknoten Studie:

$$\text{EW}_{\text{Studie}} = 0{,}7 \cdot 229 + 0{,}3 \cdot (-100) = 160{,}3 - 30 = \mathbf{130{,}3}$$

Entscheidungsknoten Stufe 1:

$$\text{EW}_{\text{Wurzel}} = \max(130{,}3,\ 0) = \mathbf{130{,}3} \quad \Rightarrow \text{Studie durchführen}$$

(b) Optimale Strategie:

1. Studie durchführen.
2. Bei Erfolg: Markeinführung wählen (EW=229 > Lizenz=120).

3. Bei Fehlschlag: Verlust von 100.

Gesamter EW: **130,3 Tsd. Euro**.
(c) Sensitivity bei $P(\textbf{Erfolg}) = 0{,}5$:

$$\mathrm{EW}'_{\text{Studie}} = 0{,}5 \cdot 229 + 0{,}5 \cdot (-100) = 114{,}5 - 50 = \mathbf{64{,}5}$$

Noch immer $> 0 \Rightarrow$ Studie bleibt empfehlenswert, aber deutlich weniger attraktiv.
Schwellenwert: EW $= 0$ bei p^*: $p \cdot 229 + (1-p) \cdot (-100) = 0 \Rightarrow 329p = 100 \Rightarrow p^* \approx 0{,}304$. Erst bei Erfolgswahrscheinlichkeit unter 30% sollte die Studie abgebrochen werden.

Aufgabe 2.2 – Vergleich zweier Strategiepfade

Aufgabe 2.2

Ein Logistikunternehmen wählt zwischen zwei Expansionsstrategien.
Strategie A – Eigener Fuhrpark: Hohe Nachfrage ($P = 0{,}6$, Gewinn 300), Niedrige Nachfrage ($P = 0{,}4$, Verlust -80).
Strategie B – Outsourcing: Erster Vertrag verfügbar ($P = 0{,}8$):

- Vertrag A: Guter Partner ($P = 0{,}6$, Gewinn 200), Schlechter Partner ($P = 0{,}4$, Gewinn 60).
- Vertrag B (Alternative): Gewinn sicher 100.

Kein Vertrag verfügbar ($P = 0{,}2$): Gewinn -20.

(a) Zeichne den vollständigen Entscheidungsbaum.

(b) Führe Rollback durch.

(c) Welche Strategie ist optimal?

Lösung: Aufgabe 2.2

(a) Baum:
Strategie A ist ein einfacher Zufallsknoten. Strategie B hat einen äußeren Zufallsknoten (Vertrag verfügbar?) und – falls ja – einen Entscheidungsknoten (Vertrag A oder B), gefolgt von einem weiteren Zufallsknoten bei Vertrag A.
(b) Rollback:
Strategie A:

$$\mathrm{EW}_A = 0{,}6 \cdot 300 + 0{,}4 \cdot (-80) = 180 - 32 = \mathbf{148}$$

Strategie B – Vertrag A (Zufallsknoten):

$$\mathrm{EW}_{\text{VtrA}} = 0{,}6 \cdot 200 + 0{,}4 \cdot 60 = 120 + 24 = \mathbf{144}$$

Strategie B – Entscheidungsknoten (Vertrag A vs. B):

$$\mathrm{EW}_{\text{Wahl}} = \max(144,\ 100) = \mathbf{144} \quad \Rightarrow \text{Vertrag A}$$

Strategie B – Äußerer Zufallsknoten:

$$\mathrm{EW}_B = 0{,}8 \cdot 144 + 0{,}2 \cdot (-20) = 115{,}2 - 4 = \mathbf{111{,}2}$$

(c) Entscheidung: $\max(\mathrm{EW}_A, \mathrm{EW}_B) = \max(148,\ 111{,}2) = 148 \Rightarrow$ **Strategie A (eigener Fuhrpark)**.

3 Stufe 3: Schwer

Aufgabe 3.1 – Dreistufiger Baum mit Sensitivitätsanalyse

Aufgabe 3.1

Ein Technologieunternehmen plant die Entwicklung einer neuen KI-Plattform.
Stufe 1: Forschungsphase starten (Kosten 200) oder Projekt einstellen (0).
Stufe 2 (nach Forschung): Technologischer Durchbruch ($P = 0{,}5$) oder Teilerfolg ($P = 0{,}5$).
Stufe 3a (Durchbruch): Entscheidung Markt:

- Eigene Plattform: Marktführerschaft ($P = 0{,}4$, $+800$), Marktanteil ($P = 0{,}4$, $+300$), Flop ($P = 0{,}2$, -150).
- Kooperation mit Großkonzern: Sicher $+350$.

Stufe 3b (Teilerfolg): Entscheidung:

- Weiterentwickeln (Kosten 100): Erneuter Durchbruch ($P = 0{,}6$, $+400$), Scheitern ($P = 0{,}4$, -100).
- Lizenzieren: Sicher $+80$.

(a) Führe den vollständigen Rollback durch.

(b) Identifiziere die optimale Strategie.

(c) Welchen Wert muss der sichere Kooperationsgewinn annehmen, damit Kooperation statt eigener Plattform gewählt wird?

(d) Bei welcher Durchbruchswahrscheinlichkeit p (Stufe 2) ist die Forschungsphase gerade noch empfehlenswert?

Lösung: Aufgabe 3.1

(a) Rollback:
Stufe 3a – Eigene Plattform:

$$\text{EW}_{\text{eigen}} = 0{,}4 \cdot 800 + 0{,}4 \cdot 300 + 0{,}2 \cdot (-150) = 320 + 120 - 30 = \mathbf{410}$$

Stufe 3a – Entscheidung bei Durchbruch:

$$\text{EW}_{3a} = \max(410,\ 350) = \mathbf{410} \quad \Rightarrow \text{Eigene Plattform}$$

Stufe 3b – Weiterentwickeln (netto nach Kosten 100):

$$\text{EW}_{\text{WE}} = 0{,}6 \cdot 400 + 0{,}4 \cdot (-100) - 100 = 240 - 40 - 100 = \mathbf{100}$$

Stufe 3b – Entscheidung bei Teilerfolg:

$$\text{EW}_{3b} = \max(100,\ 80) = \mathbf{100} \quad \Rightarrow \text{Weiterentwickeln}$$

Stufe 2 – Zufallsknoten (netto nach Forschungskosten 200):

$$\mathrm{EW}_{\mathrm{F}} = 0{,}5 \cdot 410 + 0{,}5 \cdot 100 - 200 = 205 + 50 - 200 = \mathbf{55}$$

Stufe 1 – Entscheidungsknoten:

$$\mathrm{EW}_{\mathrm{Wurzel}} = \max(55,\ 0) = \mathbf{55} \quad \Rightarrow \text{Forschen}$$

(b) Optimale Strategie:

1. Forschungsphase starten.
2. Bei Durchbruch: Eigene Plattform entwickeln.
3. Bei Teilerfolg: Weiterentwickeln (nicht lizenzieren).

Gesamt-EW: **55 Mio. Euro**.
(c) Schwellenwert für Kooperation: Kooperation besser als Eigenentwicklung, wenn $g_{\mathrm{Koop}} > 410$. Antwort: Der Kooperationsgewinn müsste **mehr als 410** Mio. Euro betragen.
(d) Schwellenwert für p: Mit allgemeiner Durchbruchswahrscheinlichkeit p:

$$\mathrm{EW}_F(p) = p \cdot 410 + (1-p) \cdot 100 - 200 = 310p + 100 - 200 = 310p - 100$$

$\mathrm{EW}_F \geq 0 \Leftrightarrow 310p \geq 100 \Leftrightarrow p \geq \frac{100}{310} \approx \mathbf{0{,}323}$
Die Forschung lohnt sich ab einer Durchbruchswahrscheinlichkeit von ca. **32 %**.

Aufgabe 3.2 – Sequenzielle Entscheidung mit Informationswert

Aufgabe 3.2

Ein Immobilienentwickler überlegt, ob er ein Grundstück kaufen soll (Kosten 500). Danach entscheidet er über die Art der Bebauung.
Nach dem Kauf – Bebauungsrecht (Zufallsknoten):

- Gewerbe erlaubt ($P = 0{,}6$): Entscheidung Gewerbe oder Wohnen.
- Nur Wohnen ($P = 0{,}4$): Nur Wohnbebauung möglich.

Bei Gewerbe erlaubt:

- **Gewerbe:** Guter Markt ($P = 0{,}5$, $+1200$), Schlechter Markt ($P = 0{,}5$, $+200$).
- **Wohnen:** Guter Markt ($P = 0{,}7$, $+900$), Schlechter Markt ($P = 0{,}3$, $+400$).

Nur Wohnen möglich: Guter Markt ($P = 0{,}7$, $+900$), Schlechter Markt ($P = 0{,}3$, $+400$).
Alle Beträge in Tsd. Euro, netto nach Kaufpreis.

(a) Führe den vollständigen Rollback durch.

(b) Soll das Grundstück gekauft werden?

(c) **Informationswert:** Ein Gutachter kann das Bebauungsrecht vorab klären (Kosten: X). Berechne den maximalen Preis X, den das Gutachten wert ist.

(d) Wie verändert sich die Entscheidung, wenn der gute Markt für Gewerbe nur mit $P = 0{,}3$ eintritt?

Lösung: Aufgabe 3.2

(a) Rollback:
Wohnbebauung (beide Fälle identisch):

$$\text{EW}_{\text{Wohn}} = 0{,}7 \cdot 900 + 0{,}3 \cdot 400 = 630 + 120 = \mathbf{750}$$

Gewerbebebauung:

$$\text{EW}_{\text{Gew}} = 0{,}5 \cdot 1200 + 0{,}5 \cdot 200 = 600 + 100 = \mathbf{700}$$

Entscheidung bei Gewerbe erlaubt:

$$\text{EW}_{\text{Gew-erl}} = \max(700,\ 750) = \mathbf{750} \quad \Rightarrow \text{Wohnen}$$

Hinweis: Selbst wenn Gewerbe erlaubt ist, ist Wohnen rentabler!
Zufallsknoten Bebauungsrecht:

$$\text{EW}_{\text{Beb}} = 0{,}6 \cdot 750 + 0{,}4 \cdot 750 = \mathbf{750}$$

(Da beide Fälle denselben EW liefern.)
Entscheidungsknoten Kauf: $\text{EW}_{\text{Kauf}} = 750 - 500 = 250$ (Kaufpreis bereits abgezogen). $\max(250,\ 0) = \mathbf{250} \Rightarrow$ **Kaufen!**
(b) Kaufempfehlung: Ja, EW = **250 Tsd. Euro**.
(c) Informationswert des Gutachtens:
Mit perfekter Information (Gutachter klärt Bebauungsrecht vorab):

- Falls Gewerbe erlaubt ($P = 0{,}6$): Wohnen wählen (EW=750).
- Falls nur Wohnen ($P = 0{,}4$): Wohnen (EW=750).

Da beide Fälle denselben EW haben, bringt die Information *keinen Mehrwert* bezüglich der Bebauungsentscheidung. EW mit Information = 750.
Jedoch: Ohne Information kauft man für 500 und erhält EW=750, also Nettogewinn 250. Mit Information könnte man im Fall "Nur Wohnen" anders entscheiden – da aber ohnehin immer Wohnen gewählt wird, ist der Wert des Gutachtens:
EVPI = EW mit Info − EW ohne Info = 750 − 750 = **0**
Das Gutachten hat in diesem Fall **keinen Mehrwert** – die Bebauungsentscheidung fällt unabhängig vom Bebauungsrecht.
(d) Sensitivität: P(**Gut. Markt Gewerbe**) = 0,3**:**

$$\text{EW}'_{\text{Gew}} = 0{,}3 \cdot 1200 + 0{,}7 \cdot 200 = 360 + 140 = \mathbf{500}$$

Entscheidung bei Gewerbe erlaubt: $\max(500,\ 750) = 750 \Rightarrow$ weiterhin Wohnen.
Die Gesamtentscheidung ändert sich nicht – Wohnen dominiert noch stärker.