Mehrzieloptimierung

Pareto-Front, Gewichtungsmethode und ε-Constraint

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Dieses Dokument führt in die Mehrzieloptimierung ein. Voraussetzung: Grundkenntnisse der linearen Programmierung.

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung und Motivation **2**

2 Grundbegriffe der Mehrzieloptimierung **2**
2.1 Das allgemeine Mehrzieloptimierungsproblem 2
2.2 Ideal- und Nadir-Punkt 3
2.3 Geometrische Interpretation 4

3 Lösungsmethoden **4**
3.1 Überblick 4
3.2 Gewichtungsmethode (Weighted Sum) 4
3.2.1 Abtastung des Gewichtsraums 5
3.3 ε-Constraint-Methode 5
3.3.1 Algorithmus: Abtastung mit ε-Constraint 5
3.4 Vergleich der Methoden 6

4 Vollständiges Beispiel **6**
4.1 Problemstellung 6
4.2 Ideal- und Nadir-Punkt 6
4.3 Gewichtungsmethode: Ausgewählte Lösungen 7
4.4 Pareto-Front: Grafische Darstellung 7
4.5 ε-Constraint: Berechnung 7

5 Mehrzieloptimierung mit $k > 2$ Zielen **8**
5.1 Herausforderungen bei vielen Zielen 8
5.2 Visualisierungsansätze für $k > 2$ 8
5.3 Beispiel: 3 Zielfunktionen 8

6 Entscheidungsunterstützung: Auswahl einer Lösung **9**
6.1 Methoden zur Lösungsauswahl 9
6.2 Normalisierung 9

7 Komplexität und praktische Hinweise **9**
7.1 Komplexität 9
7.2 Praktische Software 10

8 Zusammenfassung **10**

1 Einführung und Motivation

In der Praxis müssen Entscheidungen häufig mehrere, oft **konkurrierende Ziele** gleichzeitig berücksichtigen. Klassische Beispiele:

Typische Mehrzielprobleme

- **Portfoliooptimierung:** Maximierung der Rendite *und* Minimierung des Risikos
- **Produktionsplanung:** Maximierung des Gewinns *und* Minimierung der Umweltbelastung
- **Fahrzeugentwicklung:** Minimierung des Kraftstoffverbrauchs *und* Maximierung der Leistung
- **Logistik:** Minimierung der Transportkosten *und* Minimierung der Lieferzeit
- **Medizin:** Maximierung der Wirksamkeit *und* Minimierung der Nebenwirkungen

Das Kernproblem: Mehrere Ziele können in der Regel **nicht gleichzeitig optimiert** werden. Eine Verbesserung eines Ziels geht oft auf Kosten eines anderen (**Trade-off**). Statt einer einzigen Optimallösung suchen wir daher nach der Menge aller *effizienten* Kompromisslösungen – der **Pareto-Front**.

2 Grundbegriffe der Mehrzieloptimierung

2.1 Das allgemeine Mehrzieloptimierungsproblem

Definition: Mehrzieloptimierungsproblem (MOP)

Ein **Mehrzieloptimierungsproblem** (englisch: *Multi-Objective Optimization Problem*, MOP) lautet:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{F}} \mathbf{z}(\mathbf{x}) = \big(z_1(\mathbf{x}),\, z_2(\mathbf{x}),\, \ldots,\, z_k(\mathbf{x})\big)^\top$$

wobei $\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ der **Entscheidungsraum** und $\mathbf{z} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^k$ der **Zielraumabbildung** (Kriterienvektor) ist.
Maximierungsziele $\max z_i(\mathbf{x})$ werden durch $\min(-z_i(\mathbf{x}))$ umgeformt.

Definition: Dominanz

Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{F}$ zwei zulässige Lösungen.

- $\mathbf{x}$ **dominiert** $\mathbf{y}$ (Schreibweise: $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$), falls:
  1. $z_i(\mathbf{x}) \leq z_i(\mathbf{y})$ für alle $i = 1, \ldots, k$ (in keinem Ziel schlechter), und
  2. $z_j(\mathbf{x}) < z_j(\mathbf{y})$ für mindestens ein j (in mindestens einem Ziel strikt

besser).

- $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ sind **nicht vergleichbar** (inkommensurabel), wenn weder $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ noch $\mathbf{y} \prec \mathbf{x}$ gilt.

Definition: Pareto-Optimalität

Eine Lösung $\mathbf{x}^* \in \mathcal{F}$ heißt **Pareto-optimal** (oder effizient), wenn keine andere zulässige Lösung $\mathbf{y} \in \mathcal{F}$ existiert, die $\mathbf{x}^*$ dominiert:

$$\nexists\, \mathbf{y} \in \mathcal{F} : \mathbf{y} \prec \mathbf{x}^*$$

Die Menge aller Pareto-optimalen Lösungen heißt **Pareto-Menge** (im Entscheidungsraum) oder **Pareto-Front** (im Zielraum).

2.2 Ideal- und Nadir-Punkt

Definition: Ideal- und Nadir-Punkt

- Der **Ideal-Punkt** $\mathbf{z}^{\text{id}} \in \mathbb{R}^k$ enthält die besten erreichbaren Werte jedes Ziels:

  $$z_i^{\text{id}} = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}} z_i(\mathbf{x}) \quad \forall\, i$$

  Der Ideal-Punkt ist in der Regel **nicht erreichbar** (er liegt außerhalb der Pareto-Front).

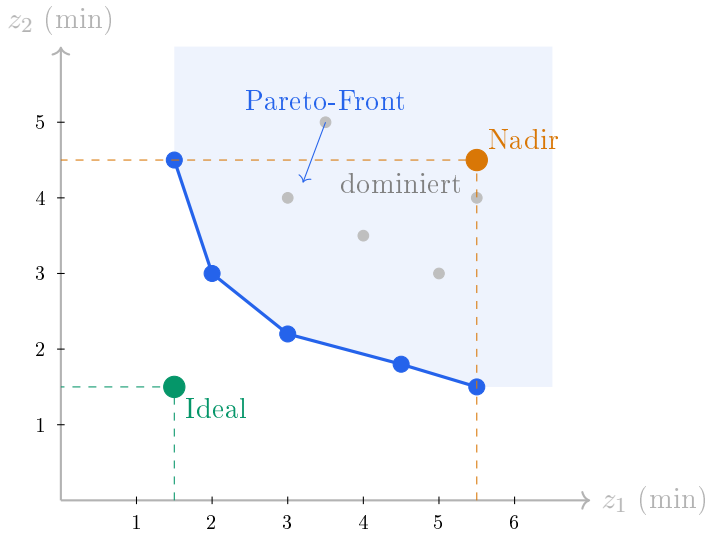
- Der **Nadir-Punkt** $\mathbf{z}^{\text{nad}} \in \mathbb{R}^k$ enthält die schlechtesten Werte der Pareto-optimalen Lösungen:

  $$z_i^{\text{nad}} = \max_{\mathbf{x}^* \in \mathcal{P}} z_i(\mathbf{x}^*) \quad \forall\, i$$

  wobei $\mathcal{P}$ die Pareto-Menge bezeichnet.

Der Bereich zwischen Ideal- und Nadir-Punkt beschreibt den **Trade-off-Bereich** der Pareto-Front.

2.3 Geometrische Interpretation



Die blaue Kurve zeigt die Pareto-Front: Kein Punkt auf ihr kann in einem Ziel verbessert werden, ohne ein anderes zu verschlechtern. Graue Punkte sind dominiert.

3 Lösungsmethoden

3.1 Überblick

Es gibt zwei grundlegende Methodenklassen:

- **A-priori-Methoden:** Präferenzen werden *vor* der Optimierung festgelegt (z. B. Gewichtungsmethode).
- **A-posteriori-Methoden:** Die vollständige Pareto-Front wird berechnet, Entscheidungsträger wählen danach.

3.2 Gewichtungsmethode (Weighted Sum)

Definition: Gewichtungsmethode

Die **Gewichtungsmethode** skalarisiert die Zielfunktionen durch Gewichtung:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{F}} \sum_{i=1}^{k} w_i \cdot z_i(\mathbf{x}), \quad \text{wobei } w_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} w_i = 1$$

Für jeden Gewichtsvektor $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_k)$ auf dem Standardsimplex wird ein skalares LP gelöst.

Satz 1: Korrektheit der Gewichtungsmethode

Jede Lösung des gewichteten Skalarisierungsproblems mit $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ (alle Gewichte positiv) ist Pareto-optimal. Für konvexe Pareto-Fronten liefert die Gewichtungsmethode durch Variation von $\mathbf{w}$ alle Pareto-optimalen Lösungen.

Proof. Sei $\mathbf{x}^*$ optimal für $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ und angenommen, $\mathbf{x}^*$ sei nicht Pareto-optimal. Dann existiert $\mathbf{y} \in \mathcal{F}$ mit $z_i(\mathbf{y}) \leq z_i(\mathbf{x}^*)$ für alle i und $z_j(\mathbf{y}) < z_j(\mathbf{x}^*)$ für ein j. Dann gilt:

$$\sum_i w_i z_i(\mathbf{y}) < \sum_i w_i z_i(\mathbf{x}^*)$$

(da $w_j > 0$), was der Optimalität von $\mathbf{x}^*$ widerspricht. □

Einschränkung: Bei **nicht-konvexen** Pareto-Fronten kann die Gewichtungsmethode bestimmte Teile der Pareto-Front nicht erreichen (konkave Bereiche). Die ε-Constraint-Methode ist robuster.

3.2.1 Abtastung des Gewichtsraums

Für $k = 2$ Zielfunktionen werden die Gewichte gleichmäßig abgetastet:

$$\mathbf{w}^{(t)} = \left(\frac{t}{T},\ 1 - \frac{t}{T} \right), \quad t = 0, 1, \ldots, T$$

Für $k > 2$ wird der Standardsimplex durch Zufallsstichproben oder regelmäßige Unterteilung abgetastet.

3.3 ε-Constraint-Methode

Definition: ε-Constraint-Methode

Bei der **ε-Constraint-Methode** wird eine primäre Zielfunktion z_p optimiert, während alle anderen Zielfunktionen durch Schranken ε_i beschränkt werden:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}} \ z_p(\mathbf{x}) \quad \text{s. t.} \quad z_i(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_i \quad \forall\, i \neq p$$

Durch systematische Variation der ε_i werden alle Pareto-optimalen Lösungen (einschließlich nicht-konvexer Teile) erzeugt.

Satz 2: Vollständigkeit der ε-Constraint-Methode

Jede Pareto-optimale Lösung kann durch geeignete Wahl von ε und der Primärzielfunktion mit der ε-Constraint-Methode gefunden werden.

Beweisidee. Sei $\mathbf{x}^*$ Pareto-optimal. Setze $\varepsilon_i = z_i(\mathbf{x}^*)$ für alle $i \neq p$. Dann ist $\mathbf{x}^*$ zulässig für das ε-Constraint-Problem. Angenommen, eine andere Lösung $\mathbf{y}$ erzielt $z_p(\mathbf{y}) < z_p(\mathbf{x}^*)$ bei $z_i(\mathbf{y}) \leq \varepsilon_i$. Da $z_i(\mathbf{y}) \leq z_i(\mathbf{x}^*)$ und $z_p(\mathbf{y}) < z_p(\mathbf{x}^*)$, würde $\mathbf{y}$ die Lösung $\mathbf{x}^*$ dominieren – Widerspruch zur Pareto-Optimalität. □

3.3.1 Algorithmus: Abtastung mit ε-Constraint

1. Berechne den Wertebereich jedes Nebenziels: $[z_i^{\min}, z_i^{\max}]$ durch separate LP-Lösungen.

2. Teile den Bereich in T Schritte: $\varepsilon_i^{(t)} = z_i^{\min} + t \cdot \frac{z_i^{\max} - z_i^{\min}}{T}$.

3. Löse für jeden ε-Wert das eingeschränkte LP.
4. Entferne dominierte Punkte aus der Ergebnismenge.

3.4 Vergleich der Methoden

Eigenschaft	Gewichtungsmethode	ε-Constraint
Nicht-konvexe Fronten	Unvollständig	Vollständig
Rechenaufwand	Gering	Mittel
Anzahl LP-Probleme	T	$T \cdot (k-1)$
Interpretation	Intuitiv	Direkter Einfluss
Gleichmäßige Abtastung	Nein	Ja

4 Vollständiges Beispiel

4.1 Problemstellung

Beispiel: Bikriterielle Produktionsplanung

Ein Unternehmen produziert zwei Produkte mit zwei konkurrierenden Zielen: Gewinnmaximierung und Ressourcenschonung.

$$\max \; z_1 = 5x_1 + 4x_2 \qquad \text{(Gewinn)}$$

$$\min \; z_2 = 3x_1 + x_2 \qquad \text{(Ressourcenverbrauch)}$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Umformung: Minimierungsproblem $\min(-5x_1 - 4x_2)$ und $\min(3x_1 + x_2)$.

4.2 Ideal- und Nadir-Punkt

Ideal-Punkt: Optimiere jede Zielfunktion separat.

z_1 maximieren: Simplex liefert $x_1 = 3$, $x_2 = 1{,}5$, $z_1^{\text{id}} = 21$.

z_2 minimieren: Ecke $(0,0)$ liefert $z_2^{\text{id}} = 0$ (aber $z_1 = 0$ – kein Zielkonflikt sichtbar). Bei $x_1, x_2 \geq 0$: $z_2^{\min} = 0$ bei $(0,0)$.

Nadir-Punkt: Schlechteste Werte auf der Pareto-Front. $z_1^{\text{nad}} = 0$ (bei $(0,0)$), $z_2^{\text{nad}} = 10{,}5$ (bei $x_1 = 3, x_2 = 1{,}5$).

Trade-off: Maximalgewinn $z_1 = 21$ kostet Ressourcen $z_2 = 10{,}5$. Minimale Ressourcen $z_2 = 0$ bringt keinen Gewinn.

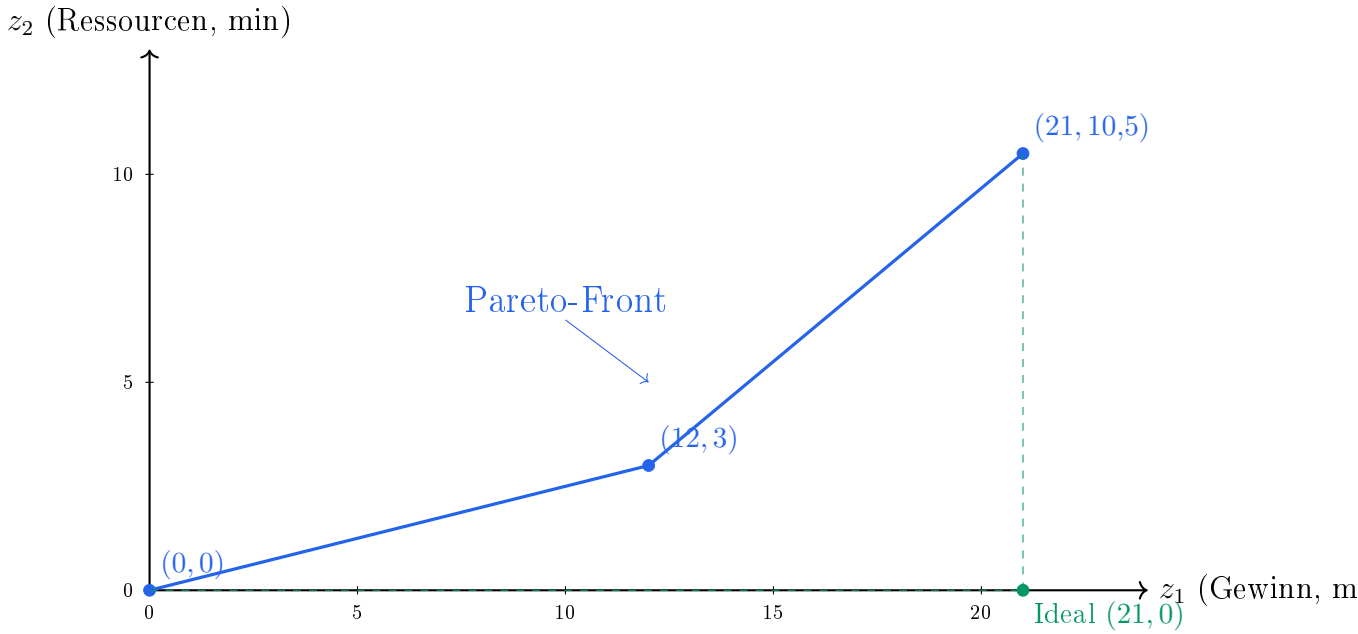
4.3 Gewichtungsmethode: Ausgewählte Lösungen

Für $k = 2$ verwenden wir $\mathbf{w} = (w, 1-w)$ mit $w \in [0,1]$. Skalarisiertes Problem: $\min\ -w(5x_1 + 4x_2) + (1-w)(3x_1 + x_2) = \min\ (3-8w)x_1 + (1-5w)x_2$

w	$c_1 = 3-8w$	$c_2 = 1-5w$	x_1^*	x_2^*	(z_1, z_2)
0,0	3	1	0	0	(0, 0)
0,2	1,4	0	0	3	(12, 3)
0,3	0,6	−0,5	0	3	(12, 3)
0,5	−1	−1,5	3	1,5	(21, 10,5)
0,8	−3,4	−3	3	1,5	(21, 10,5)
1,0	−5	−4	3	1,5	(21, 10,5)

Pareto-optimale Punkte (nach Entfernung dominierter Lösungen): $(0,0) \to (z_1 = 0, z_2 = 0)$, $(0,3) \to (z_1 = 12, z_2 = 3)$, $(3,1{,}5) \to (z_1 = 21, z_2 = 10{,}5)$.

4.4 Pareto-Front: Grafische Darstellung



4.5 ε-Constraint: Berechnung

Primäres Ziel: max z_1. Nebenbedingung: $z_2 = 3x_1 + x_2 \leq \varepsilon$.

ε	x_1^*	x_2^*	z_1	z_2	Status
0	0	0	0	0	Pareto-optimal
2	0	2	8	2	Pareto-optimal
3	0	3	12	3	Pareto-optimal
5	0,5	3,5	16,5	5	Pareto-optimal
8	1,75	2,75	19,75	8	Pareto-optimal
10,5	3	1,5	21	10,5	Pareto-optimal

Die ε-Constraint-Methode deckt in diesem Fall denselben Bereich ab wie die Gewichtungsmethode, da die Pareto-Front konvex ist.

5 Mehrzieloptimierung mit $k > 2$ Zielen

5.1 Herausforderungen bei vielen Zielen

Mit wachsender Zielanzahl k steigen die Herausforderungen:

- Die Pareto-Front ist eine $(k-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit – nicht mehr grafisch darstellbar.
- Der Anteil dominierter Lösungen *nimmt ab* (bei $k \to \infty$ dominieren sich zufällige Punkte kaum noch).
- Der Rechenaufwand wächst mit k.

5.2 Visualisierungsansätze für $k > 2$

- **Parallele Koordinaten:** Jede Zielfunktion als vertikale Achse, Lösungen als Polygonzüge.
- **Streudiagrammmatrix:** Alle Paare (z_i, z_j) in einer Matrix.
- **Radardiagramm (Spinnennetz):** Für wenige Lösungen geeignet.
- **Heatmap:** Zielwerte als Farbintensität in einer Tabelle.

5.3 Beispiel: 3 Zielfunktionen

Beispiel mit 3 Zielen

$$\max\ z_1 = 5x_1 + 4x_2, \quad \max\ z_2 = 2x_1 + 6x_2, \quad \min\ z_3 = 3x_1 + x_2$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24, \quad x_1 + 2x_2 \leq 6, \quad x_1, x_2 \geq 0$$

Ausgewählte Pareto-optimale Lösungen (berechnet mit dem MOO-Tool):

x_1	x_2	z_1 (max)	z_2 (max)	z_3 (min)	Dominierende Ecke
0	0	0	0	0	Keine (Pareto)
0	3	12	18	3	Pareto
3	1,5	21	15	10,5	Pareto
4	0	20	8	12	Pareto

Hier sehen wir: z_1 und z_2 bevorzugen unterschiedliche Ecken, z_3 bevorzugt den Ursprung. Die Pareto-Front umfasst alle vier Ecken (keine dominiert eine andere vollständig).

6 Entscheidungsunterstützung: Auswahl einer Lösung

6.1 Methoden zur Lösungsauswahl

Nach Berechnung der Pareto-Front muss der Entscheidungsträger eine Lösung auswählen. Verbreitete Methoden:

1. Utopia-Punkt-Annäherung (Kompromisslösung):

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{P}} \left\| \frac{\mathbf{z}(\mathbf{x}) - \mathbf{z}^{\mathrm{id}}}{\mathbf{z}^{\mathrm{nad}} - \mathbf{z}^{\mathrm{id}}} \right\|_p$$

Der Punkt auf der Pareto-Front mit dem kleinsten normierten Abstand zum Ideal-Punkt ($p = 2$: euklidisch, $p = \infty$: Tschebyscheff).

2. Tschebyscheff-Skalarisierung:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{F}} \max_{i=1,\dots,k} w_i \left| z_i(\mathbf{x}) - z_i^{\mathrm{id}} \right|$$

Findet auch Punkte auf nicht-konvexen Pareto-Fronten.

3. Interaktive Methoden: Der Entscheidungsträger verfeinert schrittweise seine Präferenzen, z. B. durch Beantwortung von Paarvergleichen (*STEM*, *NIMBUS*).

6.2 Normalisierung

Vor dem Vergleich sollten die Zielfunktionen normalisiert werden:

$$\tilde{z}_i(\mathbf{x}) = \frac{z_i(\mathbf{x}) - z_i^{\mathrm{id}}}{z_i^{\mathrm{nad}} - z_i^{\mathrm{id}}} \in [0, 1]$$

7 Komplexität und praktische Hinweise

7.1 Komplexität

Die Berechnung der vollständigen Pareto-Front ist im Allgemeinen NP-schwer (wenn die Zielfunktionen nicht-linear oder die Variablen ganzzahlig sind). Für lineare MOP liefert die Gewichtungsmethode mit T Gewichtsvektoren genau T LP-Auswertungen in $O(T \cdot \text{LP-Zeit})$.

7.2 Praktische Software

- **Python:** `pymoo` (NSGA-II, NSGA-III, Gewichtungsmethode, ε-Constraint)
- **MATLAB:** `gamultiobj` (Genetischer Algorithmus für MOP)
- **Gurobi/CPLEX:** Bikriterielle LP-Optimierung über parametrische Methoden
- **jMetal:** Java-Framework für evolutionäre Mehrzieloptimierung

8 Zusammenfassung

Kernpunkte: Mehrzieloptimierung

1. Bei **konkurrierenden Zielen** gibt es keine eindeutige Optimallösung, sondern eine Menge effizienter Kompromisslösungen.
2. Eine Lösung ist **Pareto-optimal**, wenn sie in keinem Ziel verbessert werden kann, ohne ein anderes zu verschlechtern.
3. Der **Ideal-Punkt** enthält die besten Einzelwerte (meist nicht erreichbar); der **Nadir-Punkt** die schlechtesten Werte auf der Pareto-Front.
4. Die **Gewichtungsmethode** löst für jeden Gewichtsvektor ein skalares LP – einfach, aber unvollständig bei nicht-konvexen Fronten.
5. Die **ε-Constraint-Methode** beschränkt Nebenziele und ist vollständig für beliebige Fronten.
6. Für $k = 2$ Ziele ist die Pareto-Front eine Kurve im 2D-Zielraum; für $k > 2$ eine höherdimensionale Mannigfaltigkeit.
7. Die **Normalisierung** der Zielwerte ist für die Lösungsauswahl und den Methodenvergleich essenziell.
8. Zur **Lösungsauswahl** eignen sich Kompromissmethoden (Tschebyscheff, euklidische Distanz) oder interaktive Verfahren.