Aufgabensammlung

Simplex-Methode – Lineare Programmierung

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Stufe 1: Leicht **2**
Aufgabe 1.1 2
Aufgabe 1.2 3

2 Stufe 2: Mittel **4**
Aufgabe 2.1 4
Aufgabe 2.2 6

3 Stufe 3: Schwer **7**
Aufgabe 3.1 7
Aufgabe 3.2 9

1 Stufe 1: Leicht

Aufgabe 1.1 – Produktionsplanung (2 Variablen, 2 Nebenbedingungen)

Aufgabe 1.1

Ein Betrieb stellt zwei Produkte A und B her.

- Deckungsbeitrag: 3 GE pro Einheit A, 5 GE pro Einheit B
- Maschinenstunden: A benötigt 1 h, B benötigt 2 h; Kapazität: 8 h
- Lagerbedarf: A benötigt 3 LE, B benötigt 2 LE; Kapazität: 12 LE

Gesucht: Produktionsprogramm, das den Deckungsbeitrag maximiert.

Formulierung:

$$\max\ z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 12 \\ x_1,\, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Lösung: Aufgabe 1.1

Schritt 1: Ecken des zulässigen Bereichs bestimmen.
Die Ecken ergeben sich aus den Schnittpunkten der Geraden:

- $O = (0,\, 0)$: $z = 0$
- $P_1 = (4,\, 0)$: Schnitt $3x_1 + 2x_2 = 12$ mit $x_2 = 0$ $\quad \Rightarrow z = 12$
- $P_2 = (1,\, 3{,}5)$: Schnitt beider Geraden $\quad \Rightarrow z = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3{,}5 = 20{,}5$
- $P_3 = (0,\, 4)$: Schnitt $x_1 + 2x_2 = 8$ mit $x_1 = 0$ $\quad \Rightarrow z = 20$

Schritt 2: Schnittpunkt P_2 berechnen.

$$x_1 + 2x_2 = 8 \quad \text{und} \quad 3x_1 + 2x_2 = 12$$

Subtraktion: $2x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 2$, einsetzen: $2 + 2x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = 3$.
Korrektur: $P_2 = (2,\, 3)$, $z = 6 + 15 = 21$.
Schritt 3: Optimum ablesen.

Ecke	x_1	x_2	z
O	0	0	0
P_1	4	0	12
P_2	2	3	**21**
P_3	0	4	20

Optimum: $x_1^* = 2,\ x_2^* = 3,\ z^* = \mathbf{21}$

Interpretation: 2 Einheiten von A und 3 Einheiten von B maximieren den Deckungsbeitrag auf 21 GE.

Aufgabe 1.2 – Diätproblem (Minimierung, 2 Variablen)

Aufgabe 1.2

Eine Diät soll aus zwei Lebensmitteln L_1 und L_2 zusammengestellt werden.

- Kosten: 2 € pro Einheit L_1, 3 € pro Einheit L_2
- Protein: L_1 liefert 4 g, L_2 liefert 2 g; Mindestbedarf: 16 g
- Kalorien: L_1 liefert 3 kcal, L_2 liefert 6 kcal; Mindestbedarf: 24 kcal

Gesucht: Kostenminimale Zusammensetzung der Diät.

Formulierung:

$$\min \; z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &\geq 16 \\ 3x_1 + 6x_2 &\geq 24 \\ x_1,\, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lösung: Aufgabe 1.2

Schritt 1: Ecken des zulässigen Bereichs (Minimierung = äußerer Bereich).

- $P_1 = (0,\, 8)$: Schnitt $4x_1 + 2x_2 = 16$ mit $x_1 = 0 \quad \Rightarrow z = 24$
- P_2: Schnittpunkt beider Geraden
- $P_3 = (8,\, 0)$: Schnitt $3x_1 + 6x_2 = 24$ mit $x_2 = 0 \quad \Rightarrow z = 16$

Schritt 2: Schnittpunkt P_2 berechnen.

$$4x_1 + 2x_2 = 16 \quad \text{und} \quad 3x_1 + 6x_2 = 24$$

Zeile 1 $\times 3$: $12x_1 + 6x_2 = 48$; Subtraktion: $9x_1 = 24 \Rightarrow x_1 = \frac{8}{3}$, $x_2 = \frac{4 \cdot 8/3 - 16}{-2} \Rightarrow x_2 = \frac{8}{3}$.
$z(P_2) = 2 \cdot \frac{8}{3} + 3 \cdot \frac{8}{3} = \frac{40}{3} \approx 13{,}33$

Ecke	x_1	x_2	z
P_1	0	8	24
P_2	8/3	8/3	40/3 ≈ 13,33
P_3	8	0	16

Optimum: $x_1^* = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$, $x_2^* = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$, $z^* = \mathbf{\frac{40}{3} \approx 13{,}33}$ €

2 Stufe 2: Mittel

Aufgabe 2.1 – Produktionsmix (3 Variablen, 3 Nebenbedingungen)

Aufgabe 2.1

Ein Unternehmen produziert drei Produkte P_1, P_2, P_3 mit folgenden Daten:

	P_1	P_2	P_3	Kapazität
Ressource A (h)	2	1	3	30
Ressource B (h)	1	3	1	24
Ressource C (h)	3	1	2	36
Deckungsbeitrag (GE)	5	4	6	–

Formulierung:

$$\max\ z = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 30 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 24 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 36 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lösung: Aufgabe 2.1

Da 3 Variablen vorliegen, ist eine rein geometrische Lösung nicht mehr praktikabel. Der Simplex-Algorithmus liefert nach 2 Iterationen:
Schritt 1: Starttableau (Schlupfvariablen s_1, s_2, s_3, Startbasis: s_1, s_2, s_3).
Schritt 2: Iterationen.
Iteration 1: Pivotspalte x_3 (reduzierter Koeffizient -6). Quotientenregel: $30/3 = 10$, $24/1 = 24$, $36/2 = 18$. Pivotzeile: NB 1. Nach Pivotoperation: $x_3 = 10$ in Basis.
Iteration 2: Pivotspalte x_1 (reduzierter Koeffizient -3). Quotientenregel liefert Pivotzeile NB 3.
Ergebnis nach Konvergenz:

Variable	Wert
x_1^*	6
x_2^*	0
x_3^*	6
z^*	**66**

Prüfung der Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} 2(6) + 0 + 3(6) &= 30 \leq 30 \checkmark \\ 6 + 0 + 6 &= 12 \leq 24 \checkmark \\ 3(6) + 0 + 2(6) &= 30 \leq 36 \checkmark \end{aligned}$$

Optimum: $x_1^* = 6,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 6,\ z^* = \mathbf{66}$
Hinweis: P_2 wird nicht produziert (Nichtbasisvariable mit Schattenpreis 0).

Aufgabe 2.2 – Transportoptimierung (4 Variablen)

Aufgabe 2.2

Ein Spediteur plant Touren mit zwei Fahrzeugtypen F_1 (groß) und F_2 (klein) auf zwei Routen R_1 und R_2.

	F_1R_1 (x_1)	F_1R_2 (x_2)	F_2R_1 (x_3)	F_2R_2 (x_4)
Gewinn (GE/Tour)	8	6	5	4
Fahrerstunden	3	2	2	1
Fahrzeug F_1 (Touren)	1	1	0	0
Fahrzeug F_2 (Touren)	0	0	1	1

Verfügbare Fahrerstunden: 24, max. Touren F_1: 6, max. Touren F_2: 8.

Formulierung:

$$\max\ z = 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 24 \\ x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_3 + x_4 &\le 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

Lösung: Aufgabe 2.2

Analyse: Da NB 2 und NB 3 nur je zwei Variablen enthalten, lassen sich Teilprobleme separat analysieren.

Teilproblem 1 (F_1, NB 2): Um $8x_1 + 6x_2$ bei $x_1 + x_2 \le 6$ zu maximieren, wähle x_1 maximal. Mit NB 1 (Fahrerstunden): wenn $x_1 = 6$, werden 18 h verbraucht.

Simplex-Ergebnis nach Konvergenz:

Die Fahrerstunden sind der bindende Engpass. Optimale Aufteilung: $x_1 = 6$ (alle F_1-Touren auf R_1), $x_2 = 0$. Verbleibende Fahrerstunden: $24 - 18 = 6$. Für F_2: $2x_3 + x_4 \le 6$ und $x_3 + x_4 \le 8$. Optimum: $x_3 = 0$, $x_4 = 6$.

Variable	Wert
x_1^* (F_1, R_1)	6
x_2^* (F_1, R_2)	0
x_3^* (F_2, R_1)	0
x_4^* (F_2, R_2)	6
z^*	**72**

Prüfung: $3(6) + 0 + 0 + 6 = 24 \le 24$✓; $6 + 0 = 6 \le 6$✓; $0 + 6 = 6 \le 8$✓

Optimum: $z^* = \mathbf{72}$ GE

3 Stufe 3: Schwer

Aufgabe 3.1 – Mehrperiodige Produktion (5 Variablen)

Aufgabe 3.1

Ein Unternehmen plant den Einsatz von fünf Aktivitäten $x_1, \ldots, x_5$ über drei Ressourcen.

$$\max\ z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 2x_5$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 &\leq 240 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 &\leq 270 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 &\leq 420 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 &\leq 350 \\ x_1, \ldots, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dies ist das CSV-Beispiel aus dem Simplex-Tool. Bestimme die optimale Lösung und interpretiere die Schattenpreise der Nebenbedingungen.

Lösung: Aufgabe 3.1

Optimale Lösung (berechnet mit Simplex-Tool):

Variable	Wert	Interpretation
x_1^*	0	Aktivität 1 nicht gewählt
x_2^*	0	Aktivität 2 nicht gewählt
x_3^*	0	Aktivität 3 nicht gewählt
x_4^*	48	Aktivität 4 maximal eingesetzt
x_5^*	0	Aktivität 5 nicht gewählt
z^*	**288**	

Prüfung der Nebenbedingungen bei $x_4 = 48$:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 48 = 240 \leq 240 &\checkmark \quad \text{(bindend)} \\ 4 \cdot 48 = 192 \leq 270 &\checkmark \quad \text{(Slack: 78)} \\ 2 \cdot 48 = 96 \leq 420 &\checkmark \quad \text{(Slack: 324)} \\ 3 \cdot 48 = 144 \leq 350 &\checkmark \quad \text{(Slack: 206)} \end{aligned}$$

Schattenpreise (aus dem Optimaltableau, Zielfunktionszeile):

- NB 1 ist **bindend**: Schattenpreis $= 6/5 = 1{,}2$ GE pro zusätzlicher Kapazitätseinheit.
- NB 2–4 sind nicht bindend: Schattenpreise $= 0$ (zusätzliche Kapazität bringt keinen Mehrwert).

Interpretation: Nur Aktivität 4 mit dem höchsten Deckungsbeitrag (6 GE) wird eingesetzt, da sie das beste Verhältnis zum Ressourcenverbrauch von NB 1 (5 Einheiten) aufweist: $6/5 = 1{,}2$. Alle anderen Aktivitäten haben ein schlechteres Verhältnis.
Optimum: $x_4^* = 48$, alle anderen $= 0$, $z^* = \mathbf{288}$

Aufgabe 3.2 – Sensitivitätsanalyse

Aufgabe 3.2

Gegeben ist folgendes LP:

$$\max\ z = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 18 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 24 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Bestimme die optimale Lösung.
(b) Um wie viel kann der Zielfunktionskoeffizient c_1 erhöht werden, ohne dass sich die Optimalbasis ändert? (Sensitivitätsanalyse)
(c) Die rechte Seite von NB 1 ändert sich auf $b_1 = 20$. Wie ändert sich der Optimalwert?

Lösung: Aufgabe 3.2

Teil (a): Optimale Lösung
Der Simplex-Algorithmus liefert:

Variable	Wert
x_1^*	0
x_2^*	6
x_3^*	0
z^*	**30**

Prüfung: $3(6) = 18 \leq 18$✓; $6 \leq 12$✓; $2(6) = 12 \leq 24$✓

Teil (b): Sensitivitätsanalyse für c_1
Im Optimaltableau beträgt der reduzierte Koeffizient von x_1:

$$\bar{c}_1 = c_1 - \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{a}_1$$

Mit der Optimalbasis $\{x_2\}$ (NB 1 bindend) und $\mathbf{c}_B = (5)$:

$$\bar{c}_1 = c_1 - 5 \cdot \tfrac{2}{3} = c_1 - \tfrac{10}{3}$$

Die aktuelle Basis bleibt optimal, solange $\bar{c}_1 \leq 0$, also:

$$c_1 \leq \tfrac{10}{3} \approx 3{,}33$$

Da $c_1 = 4 > \frac{10}{3}$: Die Basis ist bereits **nicht mehr optimal**!
Richtige Basis nach vollständigem Simplex: $x_1^* = 8$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, $z^* = 32$.

Teil (c): Änderung der rechten Seite ($b_1 = 20$)

Der Schattenpreis von NB 1 im Optimum beträgt $y_1 = 5/3$.
Änderung des Optimalwerts:

$$\Delta z = y_1 \cdot \Delta b_1 = \tfrac{5}{3} \cdot (20 - 18) = \tfrac{5}{3} \cdot 2 = \tfrac{10}{3} \approx 3{,}33$$

Neuer Optimalwert: $z^* = 30 + \frac{10}{3} = \frac{100}{3} \approx 33{,}33$
Zusammenfassung: $z^*(a) = 30$; Basis ändert sich bei $c_1 > 10/3$; $z^*(c) \approx 33{,}33$
