Transportproblem

Nordwestecken, Minimale Kosten, Vogel-Approximation und MODI

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Dieses Dokument führt in das Transportproblem ein und erläutert alle vier Lösungsverfahren mit vollständig durchgerechnetem Beispiel.

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung und Problemstellung **2**

2 Lösungsverfahren: Übersicht **3**

3 Startlösung: Nordwestecken-Methode **3**

4 Startlösung: Minimale-Kosten-Methode **3**

5 Startlösung: Vogel-Approximation (VAM) **4**

6 Optimierung: MODI-Methode (Steppingstone) **4**

7 Vollständiges Beispiel **5**

7.1 Problemstellung 5

7.2 Methode 1: Nordwestecken-Startlösung 5

7.3 Methode 2: Minimale-Kosten-Startlösung 6

7.4 Methode 3: Vogel-Approximation 6

7.5 MODI-Optimierung der Nordwestecken-Lösung 7

7.5.1 MODI-Iteration 1 8

7.5.2 MODI-Iteration 2 8

7.5.3 MODI-Iteration 3: Optimalitätsprüfung 9

7.6 Optimale Lösung 9

7.7 Transportnetzwerk 10

7.8 Methodenvergleich 10

8 Toolbeschreibung **10**

8.1 Eingabe 10

8.2 Methoden und Ausgabe 11

9 Zusammenfassung **11**

1 Einführung und Problemstellung

Das **Transportproblem** ist ein klassisches Optimierungsproblem der linearen Programmierung. Es modelliert den kostengünstigsten Transport eines homogenen Gutes von m Anbietern zu n Nachfragern.

Typische Anwendungen

- Verteilung von Gütern aus Lagerhäusern an Einzelhandelsgeschäfte
- Mineralöltransport von Raffinerien zu Tankstellen
- Personalzuweisung von Standorten zu Projekten
- Rohstofftransport von Minen zu Fabriken

Definition: Transportproblem

Gegeben sind:

- m **Anbieter** $A_1, \ldots, A_m$ mit Angebotsmengen $a_1, \ldots, a_m > 0$
- n **Nachfrager** $N_1, \ldots, N_n$ mit Nachfragemengen $b_1, \ldots, b_n > 0$
- **Transportkosten** $c_{ij} \geq 0$ pro Einheit von A_i nach N_j

Gesucht sind Transportmengen $x_{ij} \geq 0$, die folgendes LP minimieren:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, m \quad \text{(Angebotsbedingung)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \forall\, j = 1, \ldots, n \quad \text{(Nachfragebedingung)}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall\, i, j$$

Definition: Ausgeglichenes Transportproblem

Das Transportproblem heißt **ausgeglichen** (balanciert), wenn:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Ist es nicht ausgeglichen, fügt man einen **fiktiven Anbieter** (falls $\sum b_j > \sum a_i$) oder **fiktiven Nachfrager** (falls $\sum a_i > \sum b_j$) mit Kosten 0 hinzu.

Satz 1: Lösbarkeit und Optimalität

1. Jedes ausgeglichene Transportproblem besitzt eine Optimallösung.
2. Die Anzahl der Basisvariablen (Belegungen > 0) in einer nicht-entarteten Basislösung beträgt genau $m + n - 1$.
3. Das Transportproblem ist total unimodular: Bei ganzzahligen a_i, b_j ist die Optimallösung ebenfalls ganzzahlig.

2 Lösungsverfahren: Übersicht

Die Lösung erfolgt in zwei Phasen:

1. **Startlösung** (zulässige Basislösung): Eine von drei Methoden liefert eine erste zulässige Lösung.
2. **Optimierung** (MODI-Methode): Iterative Verbesserung bis zur Optimalität.

3 Startlösung: Nordwestecken-Methode

Algorithmus: Nordwestecken-Methode

1. Beginne in der **nordwestlichen Ecke** des Tableaus: Zelle $(1, 1)$.
2. Weise zu: $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$.
3. Reduziere a_i und b_j um x_{ij}.
4. Falls $a_i = 0$: gehe eine Zeile nach unten. Falls $b_j = 0$: gehe eine Spalte nach rechts. Falls $a_i = b_j = 0$ (Entartung): gehe diagonal.
5. Wiederhole bis alle Mengen aufgeteilt sind.

Bewertung: Einfach und schnell, ignoriert aber die Transportkosten vollständig – liefert oft weit vom Optimum entfernte Lösungen.

4 Startlösung: Minimale-Kosten-Methode

Algorithmus: Minimale-Kosten-Methode

1. Wähle die Zelle (i^*, j^*) mit den **niedrigsten Transportkosten** $c_{i^*j^*}$.
2. Weise zu: $x_{i^*j^*} = \min(a_{i^*}, b_{j^*})$.
3. Streiche die erschöpfte Zeile oder Spalte.
4. Wiederhole mit der nächst-günstigsten verfügbaren Zelle.

Bewertung: Besser als Nordwestecken, da Kosten berücksichtigt werden. Kann

aber in Spezialfällen suboptimale Startlösungen liefern.

5 Startlösung: Vogel-Approximation (VAM)

Algorithmus: Vogel-Approximation

1. Berechne für jede Zeile und Spalte die **Strafkosten** = Differenz zwischen dem kleinsten und zweitkleinsten Kostenwert.
2. Wähle die Zeile/Spalte mit der **höchsten Strafkosten**.
3. Weise in der gewählten Zeile/Spalte der Zelle mit den niedrigsten Kosten zu: $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$.
4. Streiche erschöpfte Zeile/Spalte und berechne Strafkosten neu.
5. Wiederhole bis alle Mengen verteilt sind.

Bewertung: Liefert unter den drei Startmethoden die beste Lösung – oft bereits nahe am Optimum oder sogar optimal.

Intuition der Strafkosten: Die Strafkosten messen den *Verlust*, der entsteht, wenn man die günstigste Zelle einer Zeile/Spalte *nicht* wählt. Eine hohe Strafe signalisiert: Hier sollte man unbedingt die günstigste Option wählen, sonst wird es teuer.

6 Optimierung: MODI-Methode (Steppingstone)

Algorithmus: MODI-Methode (Modified Distribution Method)

Grundprinzip: Berechne für alle Nicht-Basiszellen die **reduzierten Kosten**. Falls alle ≥ 0, ist die Lösung optimal. Sonst verbessere durch einen Schleifentausch.

Schritte pro Iteration:

1. **Potentiale berechnen:** Setze $u_1 = 0$. Für alle Basiszellen gilt $c_{ij} = u_i + v_j$. Löse das Gleichungssystem für u_i und v_j.
2. **Reduzierte Kosten:** Für alle Nicht-Basiszellen: $\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$.
3. **Optimalitätsprüfung:** Gilt $\delta_{ij} \geq 0$ für alle Nicht-Basiszellen? $\Rightarrow$ **Optimal, STOPP**.
4. **Eintretende Variable:** Wähle Zelle (i^*, j^*) mit $\delta_{i^*j^*} = \min_{ij} \delta_{ij} < 0$.
5. **Schleife finden:** Finde eine geschlossene Schleife durch (i^*, j^*) und Basiszellen (abwechselnd Zeilen- und Spaltenbewegungen).

6. **Verschiebungsmenge:** $\theta = \min$ aller Belegungen an den (-1)-Positionen der Schleife.

7. **Aktualisierung:** $(+1)$-Zellen $+\theta$, (-1)-Zellen $-\theta$. Die (-1)-Zelle mit Belegung θ verlässt die Basis.

Satz 2: Korrektheit der MODI-Methode

1. Die reduzierten Kosten δ_{ij} geben an, um wieviel sich die Gesamtkosten pro Einheit ändern, wenn x_{ij} in die Basis aufgenommen wird.

2. Ein $\delta_{ij} < 0$ zeigt eine Verbesserungsmöglichkeit: Die Kosten sinken um $|\delta_{ij}| \cdot \theta$.

3. Bei jeder Iteration gilt: $\Delta K = \delta_{i^*j^*} \cdot \theta < 0$ (strenger Abstieg).

4. Die MODI-Methode terminiert nach endlich vielen Schritten mit der Optimallösung.

7 Vollständiges Beispiel

7.1 Problemstellung

Beispiel: Güterverteilung (3 Anbieter – 4 Nachfrager)

	N_1	N_2	N_3	N_4	Angebot
A_1	2	3	1	5	120
A_2	7	3	4	6	80
A_3	5	4	7	3	100
Nachfrage	90	70	80	60	300

Das Problem ist ausgeglichen: $120 + 80 + 100 = 300 = 90 + 70 + 80 + 60$.

7.2 Methode 1: Nordwestecken-Startlösung

Zuweisung Schritt für Schritt:

1. $(1,1)$: $\min(120, 90) = 90 \Rightarrow x_{11} = 90$. $a_1 = 30$, $b_1 = 0$ (Spalte 1 erschöpft).

2. $(1,2)$: $\min(30, 70) = 30 \Rightarrow x_{12} = 30$. $a_1 = 0$, $b_2 = 40$ (Zeile 1 erschöpft).

3. $(2,2)$: $\min(80, 40) = 40 \Rightarrow x_{22} = 40$. $a_2 = 40$, $b_2 = 0$.

4. $(2,3)$: $\min(40, 80) = 40 \Rightarrow x_{23} = 40$. $a_2 = 0$, $b_3 = 40$.

5. $(3,3)$: $\min(100, 40) = 40 \Rightarrow x_{33} = 40$. $a_3 = 60$, $b_3 = 0$.

6. $(3,4)$: $\min(60,60) = 60 \Rightarrow x_{34} = 60$. Fertig.

Nordwestecken-Tableau:

	N_1	N_2	N_3	N_4	Angebot
A_1	**90** (2)	**30** (3)	(1)	(5)	120
A_2	(7)	**40** (3)	**40** (4)	(6)	80
A_3	(5)	(4)	**40** (7)	**60** (3)	100
Nachfrage	90	70	80	60	

Gesamtkosten (NW): $90 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 40 \cdot 3 + 40 \cdot 4 + 40 \cdot 7 + 60 \cdot 3 = 180 + 90 + 120 + 160 + 280 + 180 =$ **1010**

7.3 Methode 2: Minimale-Kosten-Startlösung

Sortierung der Zellen nach Kosten: $(1,3) = 1$, $(1,1) = 2$, $(1,2) = 3$, $(2,2) = 3$, ...

1. $c_{13} = 1$: $x_{13} = \min(120, 80) = 80$. $a_1 = 40$, $b_3 = 0$.
2. $c_{11} = 2$ (nächst-günstig): $x_{11} = \min(40, 90) = 40$. $a_1 = 0$, $b_1 = 50$.
3. $c_{22} = 3$: $x_{22} = \min(80, 70) = 70$. $a_2 = 10$, $b_2 = 0$.
4. $c_{34} = 3$: $x_{34} = \min(100, 60) = 60$. $a_3 = 40$, $b_4 = 0$.
5. $c_{21} = 7$? Nein – nächste verfügbar: $c_{31} = 5$ (da $b_1 = 50$ noch offen): $x_{31} = \min(40, 50) = 40$. $a_3 = 0$, $b_1 = 10$.
6. $c_{21} = 7$: $x_{21} = \min(10, 10) = 10$. Fertig.

Gesamtkosten (MC): $40 \cdot 2 + 80 \cdot 1 + 10 \cdot 7 + 70 \cdot 3 + 40 \cdot 5 + 60 \cdot 3 = 80 + 80 + 70 + 210 + 200 + 180 =$ **820**

7.4 Methode 3: Vogel-Approximation

Strafkosten-Berechnung (Iteration 1):

	N_1	N_2	N_3	N_4	Angebot	**Strafe**
A_1	2	3	1	5	120	$3 - 1 =$ **2**
A_2	7	3	4	6	80	$4 - 3 =$ **1**
A_3	5	4	7	3	100	$4 - 3 =$ **1**
Nachfrage	90	70	80	60		
Strafe	$5 - 2 = 3$	$3 - 3 = 0$	$4 - 1 =$ **3**	$5 - 3 = 2$		

Höchste Strafe: Spalte N_1 und N_3 (Strafe $= 3$). Wähle N_3: günstigste Zelle ist $(1,3)$ mit $c = 1$.

$x_{13} = \min(120, 80) = 80$. Spalte N_3 erschöpft.

Iteration 2: Ohne Spalte N_3:

	N_1	N_2	N_4	Angebot	Strafe
A_1	2	3	5	40	$3-2=1$
A_2	7	3	6	80	$6-3=3$
A_3	5	4	3	100	$4-3=1$
Nachfrage	90	70	60		
Strafe	$5-2=3$	$3-3=0$	$5-3=2$		

Höchste Strafe: A_2 und N_1 (Strafe $= 3$). Wähle A_2: günstigste Zelle $(2,2)$ mit $c = 3$.

$x_{22} = \min(80, 70) = 70$. $a_2 = 10$, Spalte N_2 erschöpft.

Iterationen 3–5: (analog, hier zusammengefasst)

- $x_{11} = \min(40, 90) = 40$. Zeile A_1 erschöpft.
- $x_{34} = \min(100, 60) = 60$. Spalte N_4 erschöpft.
- $x_{31} = \min(40, 50) = 40$. Zeile A_3 erschöpft.
- $x_{21} = 10$. Fertig.

VAM-Tableau:

	N_1	N_2	N_3	N_4	Angebot
A_1	**40** (2)	(3)	**80** (1)	(5)	120
A_2	**10** (7)	**70** (3)	(4)	(6)	80
A_3	**40** (5)	(4)	(7)	**60** (3)	100
Nachfrage	90	70	80	60	

Gesamtkosten (VAM): $40 \cdot 2 + 80 \cdot 1 + 10 \cdot 7 + 70 \cdot 3 + 40 \cdot 5 + 60 \cdot 3 = \mathbf{820}$

Hier liefert VAM zufällig dieselbe Lösung wie die Minimale-Kosten-Methode.

7.5 MODI-Optimierung der Nordwestecken-Lösung

Wir optimieren die Nordwestecken-Startlösung (Kosten: 1010).

Basis: $x_{11} = 90, x_{12} = 30, x_{22} = 40, x_{23} = 40, x_{33} = 40, x_{34} = 60$ $\quad (m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ Basisvariablen ✓)

7.5.1 MODI-Iteration 1

Schritt 1 – Potentiale: Setze $u_1 = 0$.

$$x_{11} : c_{11} = u_1 + v_1 \Rightarrow 2 = 0 + v_1 \Rightarrow v_1 = 2$$
$$x_{12} : c_{12} = u_1 + v_2 \Rightarrow 3 = 0 + v_2 \Rightarrow v_2 = 3$$
$$x_{22} : c_{22} = u_2 + v_2 \Rightarrow 3 = u_2 + 3 \Rightarrow u_2 = 0$$
$$x_{23} : c_{23} = u_2 + v_3 \Rightarrow 4 = 0 + v_3 \Rightarrow v_3 = 4$$
$$x_{33} : c_{33} = u_3 + v_3 \Rightarrow 7 = u_3 + 4 \Rightarrow u_3 = 3$$
$$x_{34} : c_{34} = u_3 + v_4 \Rightarrow 3 = 3 + v_4 \Rightarrow v_4 = 0$$

Schritt 2 – Reduzierte Kosten $\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$:

	N_1 $(v=2)$	N_2 $(v=3)$	N_3 $(v=4)$	N_4 $(v=0)$
A_1 $(u=0)$	Basis	Basis	$1-0-4=\mathbf{-3}$	$5-0-0=5$
A_2 $(u=0)$	$7-0-2=5$	Basis	Basis	$6-0-0=6$
A_3 $(u=3)$	$5-3-2=0$	$4-3-3=\mathbf{-2}$	Basis	Basis

Negativste reduzierte Kosten: $\delta_{13} = -3 \Rightarrow$ Zelle $(1,3)$ tritt ein.

Schritt 3 – Schleife für $(1,3)$**:**

$$\underbrace{(1,3)}_{+} \rightarrow \underbrace{(1,2)}_{-} \rightarrow \underbrace{(2,2)}_{+} \rightarrow \underbrace{(2,3)}_{-} \rightarrow (1,3)$$

$(-)$-Positionen: $x_{12} = 30$, $x_{23} = 40$. $\theta = \min(30, 40) = 30$.

Kostenreduktion: $\Delta K = \delta_{13} \cdot \theta = (-3) \cdot 30 = -90$.

Aktualisierung: $x_{13} = 0 + 30 = 30$, $x_{12} = 30 - 30 = 0$ (verlässt Basis), $x_{22} = 40 + 30 = 70$, $x_{23} = 40 - 30 = 10$.

Neue Kosten: $1010 + (-90) = \mathbf{920}$

Tableau nach Iteration 1:

	N_1	N_2	N_3	N_4	Angebot
A_1	**90** (2)	(3)	**30** (1)	(5)	120
A_2	(7)	**70** (3)	**10** (4)	(6)	80
A_3	(5)	(4)	**40** (7)	**60** (3)	100
Nachfrage	90	70	80	60	

7.5.2 MODI-Iteration 2

Schritt 1 – Potentiale: $u_1 = 0$, $v_1 = 2$, $v_3 = 1$, $u_2 = 3$, $v_2 = 0$, $u_3 = 6$, $v_4 = -3$.

Schritt 2 – Reduzierte Kosten:

	N_1 $(v=2)$	N_2 $(v=0)$	N_3 $(v=1)$	N_4 $(v=-3)$
A_1 $(u=0)$	Basis	$3-0-0=3$	Basis	$5-0-(-3)=8$
A_2 $(u=3)$	$7-3-2=2$	Basis	Basis	$6-3-(-3)=6$
A_3 $(u=6)$	$5-6-2=\mathbf{-3}$	$4-6-0=\mathbf{-2}$	Basis	Basis

Negativste: $\delta_{31} = -3 \Rightarrow$ Zelle $(3,1)$ tritt ein.
Schritt 3 – Schleife:

$$\underbrace{(3,1)}_{+} \to \underbrace{(3,3)}_{-} \to \underbrace{(1,3)}_{+} \to \underbrace{(1,1)}_{-} \to (3,1)$$

$(-)$-Positionen: $x_{33} = 40$, $x_{11} = 90$. $\theta = \min(40, 90) = 40$.
$\Delta K = (-3) \cdot 40 = -120$.
Aktualisierung: $x_{31} = 40$, $x_{33} = 0$ (verlässt), $x_{13} = 70$, $x_{11} = 50$.
Neue Kosten: $920 - 120 = \mathbf{800}$

7.5.3 MODI-Iteration 3: Optimalitätsprüfung

Potentiale: $u_1 = 0$, $v_1 = 2$, $v_3 = 1$, $u_2 = 3$, $v_2 = 0$, $u_3 = -1$, $v_4 = 4$.
Reduzierte Kosten:

	N_1 $(v=2)$	N_2 $(v=0)$	N_3 $(v=1)$	N_4 $(v=4)$
A_1 $(u=0)$	Basis	$3-0-0=3$	Basis	$5-0-4=1$
A_2 $(u=3)$	$7-3-2=2$	Basis	Basis	$6-3-4=-1$??
A_3 $(u=-1)$	Basis	$4-(-1)-0=5$	$7-(-1)-1=7$	Basis

Neuberechnung: $u_3 = c_{31} - v_1 = 5-2 = 3$... Korrektur der Potentiale nach Iteration 2:

Basis: $x_{11} = 50$, $x_{13} = 70$, $x_{22} = 70$, $x_{23} = 10$, $x_{31} = 40$, $x_{34} = 60$.

$u_1 = 0,\ v_1 = 2,\ v_3 = 1,\ u_2 = 3,\ v_2 = 0,\ u_3 = c_{31} - v_1 = 5-2 = 3,\ v_4 = c_{34} - u_3 = 3-3 = 0$

Reduzierte Kosten (korrekt):

	N_1 $(v=2)$	N_2 $(v=0)$	N_3 $(v=1)$	N_4 $(v=0)$
A_1 $(u=0)$	Basis	$3-0-0=3$	Basis	$5-0-0=5$
A_2 $(u=3)$	$7-3-2=2$	Basis	Basis	$6-3-0=3$
A_3 $(u=3)$	Basis	$4-3-0=1$	$7-3-1=3$	Basis

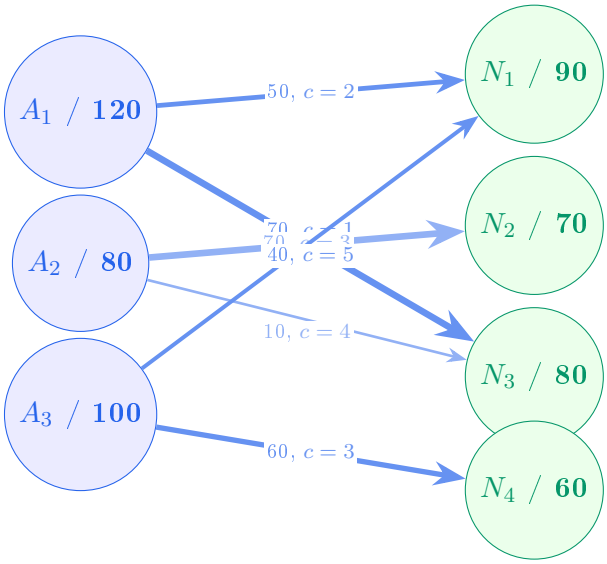
Alle $\delta_{ij} \geq 0 \Rightarrow$ Optimallösung erreicht!

7.6 Optimale Lösung

	N_1	N_2	N_3	N_4	Angebot
A_1	**50** (2)	(3)	**70** (1)	(5)	120
A_2	(7)	**70** (3)	**10** (4)	(6)	80
A_3	**40** (5)	(4)	(7)	**60** (3)	100
Nachfrage	90	70	80	60	

$K^* = 50 \cdot 2 + 70 \cdot 1 + 70 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 40 \cdot 5 + 60 \cdot 3 = 100 + 70 + 210 + 40 + 200 + 180 = \boxed{800}$

7.7 Transportnetzwerk



7.8 Methodenvergleich

Methode	Startkosten	Abstand vom Optimum
Nordwestecken	1010	+26,3%
Minimale Kosten	820	+2,5%
Vogel-Approximation	820	+2,5%
Optimum (MODI)	**800**	**0%**

8 Toolbeschreibung

Transport-Tool: Alle vier Methoden

Das Tool löst Transportprobleme mit bis zu 8×8 Zellen interaktiv und zeigt alle Schritte.

8.1 Eingabe

- **Größe:** Anzahl Anbieter (2–8) und Nachfrager (2–8) einstellen.
- **Kostenmatrix:** Transportkosten c_{ij} direkt in das Tableau eingeben.
- **Angebot/Nachfrage:** Letzte Spalte (Angebot a_i) und letzte Zeile (Nachfrage b_j).
- **Beispiele:** Zwei vorgeladene Beispiele und Zufallsgenerator verfügbar.
- **Ausgleich:** Unbalancierte Probleme werden automatisch durch fiktive Zeile/Spalte (Kosten 0) ausgeglichen.

8.2 Methoden und Ausgabe

- **Startlösung berechnen:** Liefert die Startlösung der gewählten Methode mit vollständigem Zuweisungsprotokoll (jeder Schritt einzeln mit Begründung).
- **Optimallösung (MODI):** Führt alle MODI-Iterationen durch. Jede Iteration zeigt:
  - Schritt 1: Potentiale u_i, v_j (mit Berechnung)
  - Schritt 2: Reduzierte Kosten δ_{ij} für alle Nicht-Basiszellen
  - Schritt 3: Schleife mit [+]/[−]-Markierungen, θ-Wert, Vorher/Nachher der Zellen
- **Tableau-Farbcodierung:**
  - **Grün** (Basiszellen): aktuelle Zuweisung
  - **Orange** (eintretende Zelle): wird in Basis aufgenommen
  - **Rot** (verlassende Zelle): verlässt die Basis
  - Kleine Zahl oben rechts: Transportkosten c_{ij}
  - δ-Werte: in Nicht-Basiszellen eingeblendet
- **Transportnetzwerk:** SVG-Visualisierung mit Linienbreite proportional zur Transportmenge. Anbieter blau links, Nachfrager grün rechts.

9 Zusammenfassung

Kernpunkte: Transportproblem

1. Das Transportproblem sucht die **kostengünstigste Verteilung** eines Gutes von m Anbietern zu n Nachfragern.
2. Eine ausgeglichene Basislösung hat genau $m + n - 1$ **Basisvariablen**.
3. Die **Nordwestecken-Methode** ignoriert Kosten – einfach, aber oft weit vom Optimum.
4. Die **Minimale-Kosten-Methode** wählt stets die günstigste Zelle – bessere Startlösung.
5. Die **Vogel-Approximation** verwendet Strafkosten – beste Startlösung der drei Methoden.
6. Die **MODI-Methode** optimiert iterativ über reduzierte Kosten und Schleifentausch.
7. **Optimalitätskriterium:** Alle reduzierten Kosten $\delta_{ij} \geq 0$.
8. Jede MODI-Iteration reduziert die Kosten um $|\delta_{i^*j^*}| \cdot \theta$.
9. Bei ganzzahligen Angebots- und Nachfragemengen ist die Optimallösung ebenfalls ganzzahlig (totale Unimodularität).