# Finanzmathematik

Dr. Wolfgang Böhme

März 2021

# Inhaltsverzeichnis


**1 Bewertung von Finanzströmen auf der Basis risikofreier Zinssätze 2**
1.1 Zinskurven . . . 3
1.2 Nullkupon-Zinskurve . . . 3
1.2.1 Nullkuponanleihen . . . 4
1.2.2 Ableiten der Zinskurve aus Nullkuponanleihen . . . 4
1.2.3 Ableiten der Zinskurve aus Kuponanleihen . . . 8
1.3 Rendite-Strukturkurve . . . 12
1.4 Zinsstrukturkurven - kurze Laufzeiten . . . 15
1.5 Bewertung auf der Basis von Nullkuponzinssätzen . . . 16
1.5.1 Barwertberechnung einfacher Kapitalbildungsprozesse . . . 16
1.5.2 Barwertberechnung von Finanzströmen - ganzzahlige Berechnungszeitpunkte . . . 18
1.5.3 Barwertberechnung von Finanzströmen - unterjährige Berechnungszeitpunkte . . . 21
1.5.4 Berechnung zukünftiger Nullkuponzinssätze und Abzinsfaktoren . . . 22
1.5.5 Berechnung unterjähriger zukünftiger Nullkuponzinssätze und Abzinsfaktoren . . . 29

**2 End- und Barwert von einfachen Finanzprodukten 32**
2.1 Sparprodukte . . . 32
2.1.1 Sparpläne . . . 32
2.1.2 Festgeld . . . 40
2.2 Kredite . . . 42
2.2.1 Zinsschuld . . . 42
2.2.2 Ratenschuld . . . 44
2.2.3 Anuitätenschuldschuld . . . 45
2.3 Außerbörsliche Termingeschäfte . . . 47
2.3.1 Außerbörsliche Termingeschäfte in Fremdwährungen . . . 47
2.3.2 Außerbörsliche Termingeschäfte mit Waren . . . 49
2.4 Forward Rate Agreements - Zinstermingeschäfte . . . 50
2.5 Zinsswaps . . . 55
2.5.1 Plain Vanilla Swaps . . . 55
2.5.2 Forward Swaps . . . 59
2.6 Währungsswaps . . . 64
2.7 Goldswaps . . . 72
2.8 Festverzinsliche Anleihen - Straight Bonds . . . 74
2.8.1 Festverzinsliche Anleihen mit jährlicher Zinszahlung . . . 76
2.8.2 Festverzinsliche Anleihen mit unterjährlicher Zinszahlung . . . 80
2.8.3 Nullkuponanleihen -Zerobonds . . . 81
2.9 Variabel verzinsliche Anleihen - Floater . . . 83

**3 Risikoberechnung für einfache Finanzprodukte 90**
3.1 Grundlagen der Risikoberechnung . . . 91
3.1.1 Statistische Grundlagen I . . . 91
3.1.2 Value at Risk . . . 103
3.1.3 Historische Simulation . . . 103
3.1.4 Statistische Grundlagen II . . . 111
3.1.5 Varianz-Kovarianz-Methode . . . 115
3.2 Risiko von Sparprodukte . . . 126
3.2.1 Sparpläne . . . 127
3.2.2 Festgeld . . . 130
3.3 Risiko von Krediten . . . 131
3.3.1 Zinsschuld . . . 132

3.3.2 Ratenschuld . . . 133
3.3.3 Anuitätenschuldschuld . . . 135
3.4 Risiko von Termingeschäften . . . 136
3.5 Risiko von Anleihen . . . 139
3.5.1 Festverzinsliche Anleihen ohne Kreditausfallrisiko . . . 139
3.5.2 Risiko von variabel verzinsliche Anleihen . . . 141
3.6 Risiko von Forward Rate Agreements - Zinstermingeschäfte . . . 143
3.7 Risiko von Zinsswaps . . . 145
3.7.1 Plain Vanilla Swaps . . . 145
3.7.2 Forward Swaps . . . 147
3.8 Risiko von Währungsswaps . . . 150
3.9 Risiko von Goldswaps . . . 157

**4 Anhang** **161**
4.1 Statistische Parameter für die Risikoberechnung . . . 161

# Kapitel 1

# Bewertung von Finanzströmen auf der Basis risikofreier Zinssätze

Bisher wurden Finanzströme eines Finanzproduktes, z.B. einer nachschüssigen Rente, mit Hilfe des Zinssatzes bewertet, der zu diesem Finanzprodukt gehört, es ihm immanent ist. Wird in der nachschüssigen Rente die Raten mit einem Zinssatz von $i\%$ verzinst, dient ebenso dieser Zinssatz der Bewertung des Finanzproduktes. Bewertung heißt, wir bestimmen den Wert oder Preis des Finanzproduktes. Nun wurden die bisherigen Finanzprodukte nicht gehandelt und damit verkauft bzw. gekauft. Der Barwert einer nachschüssigen Rente zum Zeitpunkt $t$ gibt an, durch welche einmalige Zahlung die verbleibende Rente substituiert werden kann. Der einmalige Betrag erwirtschaftet als Kapitalbildungsprozess den gleichen Betrag wie die verbleibende Rente. Rente und Einmalbetrag werden mit dem gleichen Zinssatz $i$ verzinst. Die Bestimmung des Barwertes $BW_t$ zum Zeitpunkt $t$ erfolgt mit Hilfe von Abzinsfaktoren $\frac{1}{q^{T-t}}$ und wird **Diskontierung** genannt. Ausgangspunkt für die Diskontierung einer nachschüssigen Rente ist der Endwert der ausstehenden Zahlungen der Rente $K_{T-t}$ am Ende der Laufzeit T:

$$BW_t = K_[T-t \cdot \frac{1}{q^{T-t}} = K_{T-t} \cdot \frac{1}{(1+i)^{T-t}}$$

Den Zinssatz $i$ , der für die Konstruktion des Finanzproduktes genutzt wird werden wir in Zukunft **Nominalzinsatz** nennen im Unterschied zum **Marktzinssatz**,(auch **realer Zinssatz** genannt. Der reale Zinssatz spiegelt zu einem fixierten Zeitpunkt die marktüblichen Zinskonditionen wider. Um die Zinssätze unterscheiden zu können, bezeichnen wir den Nominalzins mit $i_{nom}$ und den Realzins mit $i_{real}$. An den **realen Zinssatz** sind eine Reihe von Anforderungen zu stellen, damit eine marktkonforme Bewertung von Finanzprodukten vorgenommen werden kann:

1. Der Zinssatz muss risikofrei sein, d.h. er darf keine Aufschläge enthalten, die für erhöhtes Rückzahlungsrisiko erhoben werden.

2. Der Zinssatz bezieht sich auf einen konkreten Zeitpunkt. Zu einem anderen Zeitpunkt wird der Zinssatz in der Regel ein anderer sein

3. Der Zinssatz soll währungsspezifisch sein. Ein Finanzprodukt aus dem Euroraum muss anders bewertet werden als ein Produkt aus dem Dollarraum

4. Der Zinssatz sollte - wenn nötig- die Spezifik des Finanzproduktes berücksichtigen (z.B. Geldmarktzinsen, wenn es sich um ein entsprechendes Finanzprodukt handelt)

5. Der Zinssatz sollte laufzeitabhängig sein, d.h. der Zinssatz muss die Dauer einer in der Zukunft liegenden Zahlung (eines zukünftigen Finanzstromes) berücksichtigen. Erfolgt z.B. die zukünftige Zahlung in 3 Jahren, sollte auch ein Marktzins gewählt werden,der dieser Dauer entspricht (der 3-Jahreszinssatz)

Zur Bertung von Finanzströmen bzw. von Finanzprodukten werden sogenannte Zinskurven bzw. Zinsstrukturkurven angewandt, die Gegenstand des nächsten Abschnittes sind.

## 1.1 Zinskurven

Unter einer **Zinskurve** bzw. einer **Zinsstrukturkurve** versteht man die grafische Darstellung von laufzeitabhängigen Zinssätzen in der zeitlichen Abfolge. Die laufzeitabhängigen Zinssätze beziehen sich dabei auf spezifische Finanzprodukte oder Gruppen von Finanzprodukten. Darüber hinaus ist der Währungsraum zu berücksichtigen. Auf spezifische Zinskurven soll hier nicht eingegangen werden.
Unabhängig davon, um welche konkrete Zinsstrukturkurve es sich handelt, können einige besondere Typen in Abhängigkeit von der Verlauf der Zinsentwicklung in Abhängigkeit der Laufzeit angegeben werden. Inder Literatur werden folgende Typen unterschieden. Hierbei handelt es sich um Idealtypen, die in der Realität durchaus modifiziert auftreten können:

- **normale Zinsstrukturkurve**. Mit wachsende Laufzeit steigen auch die Zinsen:

  $$i_{t_1} < i_{t_2} \text{ wenn } t_1 < t_2$$

- **flache Zinskurve**. Die Zinsen bleiben konstant für alle Laufzeiten:

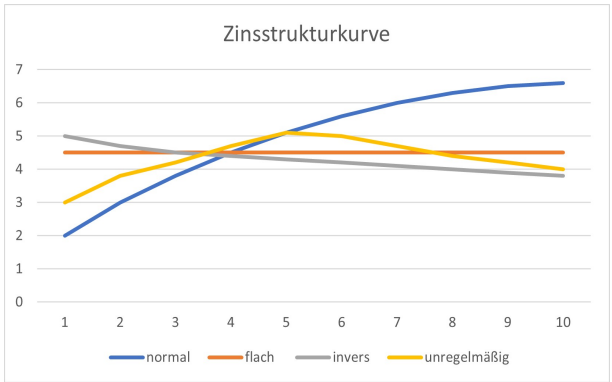
  $$i_t = \text{const } \forall t$$

- **inverse Zinsstrukturkurve**. Mit wachsende Laufzeit sinken die Zinsen:

  $$i_{t_1} < i_{t_2} \text{ wenn } t_1 > t_2$$

- **unregelmäßige Zinsstrukturkurve**. Unregelmäßiger Verlauf der Zinsen in Abhängigkeit von der Laufzeit. Eine Möglichkeit ist die "bucklige Zinskurve", zunächst steigende Zinsen, danach fallende Zinsen.

In der nachfolgenden Grafik sind die Typen exemplarisch abgebildet:




Zur Bewertung der in den Kapiteln 3 und 4 vorgestellten Finanzprodukte wird die sogenannte **Nullkupon-Zinskurve** bzw. **Zerobonds-Zinskurve** verwendet. Ausführlich dazu in Abschnitt 1.2.

## 1.2 Nullkupon-Zinskurve

Zur Bewertung von Finanzprodukten und-strömen werden Abzinsfaktoren, die auf risikofreien Marktzinsen beruhen, benötigt. Üblicherweise verwendet man dazu die sogenannte **Nullkupon-Zinskurven**, die aus Zinssätzen von Nullkuponanleihen abgeleitet werden. Diese Nullkuponzinssätze entsprechen den oben

beschriebenen Anforderungen an einen marktkonformen Zinssatz zur Bestimmung des Zeitwertes. Ein Nullkuponzinssatz ist ein Zinssatz, der der Konstruktion einer Nullkuponanleihe (Zerobonds) entspricht. Nullkuponzinssätze kommen immer dann zur Anwendung, wenn die Laufzeit eines Finanzproduktes länger als ein Jahr ist. Bei kürzeren Laufzeiten werden andere Zinsstruktur kurven verwendet.

### 1.2.1 Nullkuponanleihen

Eine Nullkuponanleihe ist ein festverzinsliches Wertpapier, dass nach Ende der Laufzeit den Nominalwert der Anleihe sowie die aufgelaufenen Zinsen zurückzahlt. Der Nominalwert einer Anleihe ist das Geldvolumen, dass dem Kapitalbildungsprozess zu Grunde liegt. Entspricht der Wert (Preis) des Wertpapiers bei der Ausgabe dem Nominalwert, spricht man davon, dass der Kurs der Anleihe gleich 100% ist. Der Wert der Kuponanleihe entspricht dem Barwert der Nullkuponanleihe. Es ist jedoch durchaus möglich und üblich, dass der Ausgabepreis nicht gleich dem Nominalwert ist. Der Zinssatz, mit dem die Anleihe ausgestattet ist, d.h. der Zinssatz mit dem die aufgelaufenen Zinsen am Ende der Laufzeit berechnet werden, wird **Nominalzinssatz** genannt. Der Zinssatz, der zur Bewertung herangezogen werden muss, ist der **Realzinssatz**. Wie oben erwähnt verwendet man zur Bestimmung des Realzinssatz die Nullkupon-Zinskurve. Hier wird deutlich, dass sehr genau zwischen dem Nominalzinssatz einer Nullkuponanleihe und Nullkuponzinssatz aus der Nullkupon-Zinskurve zu unterscheiden ist. Letzter kann mit Hilfe von Nullkuponanleihen gebildet werden (siehe Unterabschnitt 1.2.2, es gibt auch andere Verfahren die Nullkuponzinssätze zu bestimmen (siehe Unterabschnitt 1.2.3).

Unabhängig von der Bewertung der Nullkuponanleihen soll zunächst das Wesen der Nullkuponanleihe erläutert werden. Wie schon erwähnt, erfolgt am Ende der Laufzeit die Rückzahlung des Nominalwertes ($N$) und der aufgelaufenen Zinsen. Im Unterschied zu üblichen Anleihen erfolgen keine Kuponzahlung während der Laufzeit. Kuponzahlungen sind Zinszahlungen - in der Regel regelmäßig und in gleicher Höhe - während der Laufzeit. Da aber Kuponzahlungen fehlen, nennt man diese Anleihen **Nullkuponaneihen**. Der Zahlungsstrom einer Nullkuponanleihe kann grafisch dargestellt werden:




Dabei bezeichnen:

| | |
|---|---|
| $t_0$ | Emmissionsdatum oder Datum des Kaufs der Nullkuponanleihe |
| $T$ | Rückzahlungstermin |
| $N$ | Nominalbetrag |
| $Z_T$ | Zinszahlung |
| $P_{t_0}$ | Preis |

Der Käufer erwirbt am Kaufdatum $t_0$ (der kann auch das Emissionsdatum sein) eine Nullkuponanleihe zum Preis $P_{t_0}$ mit dem Nominal $N$ und damit auch das Recht am Rückzahlungstermin $T$ den Nominalbetrag sowie die aufgelaufenen Zinsen zu erhalten. Die Zinsen berechnen sich mit Hilfe des Nominalzinssatzes $i_{nom}$:

$$Z_T = N \cdot [(1 + i_{nom})^T - 1]$$

### 1.2.2 Ableiten der Zinskurve aus Nullkuponanleihen

Bisher war offen, wie der Realzinssatz bestimmt werden kann. Eine - wenn auch nicht immer zielführende Möglichkeit- ist die Nutzung von Nullkuponanleihen am Markt. Das eigentliche Problem ist nicht die Methodologie der Berechnung, sondern die Tatsache, dass häufig nicht genügend Nullkuponanleihen am Markt vorhanden sind. Deshalb werden auch - wie im Unterabschnitt 1.2.3 beschrieben wird auch Kuponanleihen zur Bestimmung der Nullkuponzinssätze herangezogen.

Die im Kapitel 1 beschriebene Anforderungen an einen Realzinssatz müssen beachtet werden. Besondes die Forderung nach Risikofreiheit hat Bedeutung. Deshalb kommen nur sehr sichere Staatspapiere, deren Rating sehr hoch ist (AAA) zur Anwendung.

Es wird angenommen, dass genügen Nullkuponanleihen am Markt vorhanden sind, um daraus die Nullkupon-Zinskurve ableiten zu können. In der Regel sind Zinsstrukturkurven für Laufzeiten von 1 bis 10 Jahre in Jahresscheiben gegeben. Der Rechenaufwand zur Bestimmung von Nullkuponzinssätze soll in Grenzen gehalten werden, deshalb wird die Zinsstrukturkurve nur auf 4 Jahre beschränkt.

Wir nehmen an, dass Nullkuponanleihen mit einer Restlaufzeit von 1,2,3 und 4 Jahren am Markt zu beobachten sind. In der nachfolgende Tabelle sind die Merkmale jeder verwendeten Nullkuponanleihe zusammengestellt:

| Nullkuponanleihe | Nominal | Nomialzinssatz | Restlaufzeit | Kurs |
|---|---|---|---|---|
| A | 100000 | $0,05$ | 1 Jahr | $102,0\%$ |
| B | 200000 | $0,052$ | 2 Jahre | $102,5\%$ |
| C | 500000 | $0,048$ | 3 Jahre | $101,0\%$ |
| D | 300000 | $0,05$ | 4 Jahre | $100,5\%$ |

Begonnen wird mit der **Nullkuponanleihe A**:

Am Rückzahlungstermin werden ausgeschüttet:

$$N_A + Z_A = N_A \cdot (1 + i_{nom,A}) = 100000 \cdot (1,05) = 105000$$

Der diskontierte Wert (der Barwert) Zum Zeitpunkt $t_0$ - $BW_{A,0}$ - mit dem nicht bekannten Realzinssatz für eine Restlaufzeit $RLZ$ von 1 Jahr ($i_{real,RLZ=1}$) ist:

$$BW_{A,0} = (N_A + Z_A) \cdot \frac{1}{1 + i_{real,RLZ=1}} = 105000 \cdot \frac{1}{1 + i_{real,RLZ=1}}$$

Der Barwert der Nullkuponanleihe A zum Zeitpunkt $t = 0$ muss dem Preis der Anleihe im Zeitpunkt $t = 0$ entsprechen. Dazu wird der Kurs der Anleihe $C_t$ verwendet, der als Verhältnis vom Preis $P_t$ Nominalwert $N$ zum Nominalwert $N$ der Anleihe zum Zeitpunkt $t$ definiert ist:

$$C_t = \frac{P_t}{N}$$

Da der Preis der Anleihe $P_{t_0}$ gleich dem Barwert $BW_0$ ist, gilt für den Barwert der Anleihe A $BW_{A,0}$ mit ihrem Kurs $C_{A,0}$und ihrem Nominalwert $N_A$:

$$BW_{A,0} = N_A \cdot C_{A,0} = 100000 \cdot 1,02 = 102000$$

Der akkumulierte Betrag $N_A \cdot (1+i_{nom,A})$ zum Ende der Restlaufzeit ($t = 1$), abgezinst auf den Zeitpunkt t=0 mit dem gesuchten realen Zinssatz $i_{real,t}$ muss dem Barwert der Anlage $AW_0$ entsprechen, welcher sich aus Nominalwert $N_A$ und dem Kurs der Anleihe $C_{A,0}$ ergibt, woraus sich der gesuchte Realzins $i_{real,RLZ}$ berechnen lässt:

$$\begin{aligned}
(N_A + Z_A) \cdot \frac{1}{1 + i_{real,RLZ=1}} &= N_A \cdot C_{A,0} = P_{A,0} \\
1 + i_{real,RLZ=1} &= \frac{BW_{A,0}}{N_A \cdot C_{A,0}} = \frac{105000}{102000} = 1,0294 \\
i_{real,RLZ=1} &= 1,0294 - 1 = 0,0294
\end{aligned}$$

Der reale Zinssatz mit einer Restlaufzeit von einem Jahr $i_{real,RLZ=1}$ beträgt 0,0294 bzw. $2,94\%$.

**Nullkuponanleihe B**:

Am Rückzahlungstermin werden ausgeschüttet:

$$N_B + Z_B = N_B \cdot (1 + i_{nom,B})^2 = 200000 \cdot (1,05)^2 = 221.340,80$$

Der Barwert $BW_{B,0}$ ist:

$$BW_{B,0} = (N_B + Z_B) \cdot \frac{1}{[(1 + i_{real,RLZ=2})^2]} = 221.340,80 \cdot \frac{1}{[(1 + i_{real,RLZ=2})^2]}$$
$$BW_{B,0} = N_B \cdot C_{B,0} = 200000 \cdot 1,025 = 205000$$

Folglich kann der gesuchte Realzins $i_{real,RLZ}$ berechnet werden:

$$[(1 + i_{real,RLZ=2})^2] = \frac{BW_{B,0}}{N_B \cdot C_{B,0}} = \frac{221.340,80}{205000} = 1,0797$$
$$(1 + i_{real,RLZ=2}) = \sqrt{1,0797} = 1,0391$$
$$i_{real,RLZ=2} = 1,0391 - 1 = 0,0391$$

Der reale Zinssatz mit einer Restlaufzeit von zwei Jahren $i_{real,RLZ=2}$ beträgt 0,0391 bzw. $3,91\%$.

**Nullkuponanleihe C**:

Am Rückzahlungstermin werden ausgeschüttet:

$$N_C + Z_C = N_C \cdot (1 + i_{nom,C})^3 = 500000 \cdot (1,049)^3 = 577.160,32$$

Der Barwert $BW_{C,0}$ ist:

$$BW_{C,0} = (N_C + Z_C) \cdot \frac{1}{[(1 + i_{real,RLZ=3})^3]} = 577.160,32 \cdot \frac{1}{[(1 + i_{real,RLZ=3})^3]}$$
$$BW_{C,0} = N_C \cdot C_{C,0} = 500000 \cdot 1,01 = 505000$$

Folglich kann der gesuchte Realzins $i_{real,RLZ}$ berechnet werden:

$$[(1 + i_{real,RLZ=3})^3] = \frac{BW_{C,0}}{N_C \cdot C_{C,0}} = \frac{577.160,32}{505000} = 1,1429$$
$$(1 + i_{real,RLZ=3}) = \sqrt[3]{1,1429} = 1,0455$$
$$i_{real,RLZ=3} = 1,0455 - 1 = 0,0455$$

Der reale Zinssatz mit einer Restlaufzeit von drei Jahren $i_{real,RLZ=3}$ beträgt 0,0455 bzw. $4,55\%$.

**Nullkuponanleihe D**:

Am Rückzahlungstermin werden ausgeschüttet:

$$N_D + Z_D = N_D \cdot (1 + i_{nom,A})^4 = 300000 \cdot (1,05)^4 = 364.651,87$$

Der Barwert $BW_{D,0}$ ist:

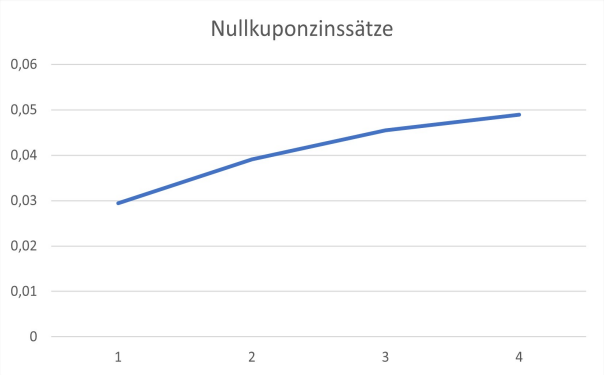
$$BW_{D,0} = (N_D + Z_4) \cdot \frac{1}{[(1 + i_{real,RLZ=4})^4]} = 364.651,87 \cdot \frac{1}{[(1 + i_{real,RLZ=4})^4]}$$
$$BW_{D,0} = N_D \cdot C_{D,0} = 300000 \cdot 1,005 = 301.500$$

Folglich kann der gesuchte Realzins $i_{real,RLZ}$ berechnet werden:

$$[(1 + i_{real,RLZ=4})^4] = \frac{BW_{D,0}}{N_D \cdot C_{D,0}} = \frac{364.651,87}{301.500} = 1,2095$$
$$(1 + i_{real,RLZ=4}) = \sqrt[4]{1,2095}$$
$$i_{real,RLZ=4} = 1,0489 - 1 = 0,0489$$

Der reale Zinssatz mit einer Restlaufzeit von vier Jahren $i_{real,RLZ=4}$ beträgt 0,0489 bzw. $4,89\%$.

Die realen Zinssätze, die aus den Nullkuponanleihen abgeleitet werden als **Nullkuponzinssätze** bzw. **Zerobondzinssätze** bezeichnet. Die Nullkuponzinskurve, bestehend aus Nullkuponzinssätze, hat nun folgende Form:




Nominal- und Realzinssatz unterscheiden sich, In der nachfolgenden Tabelle sind beide Zinssätze gegenübergestellt:

| Restlaufzeit | Nomialzinssatz | Realzinssatz |
|---|---|---|
| 1 Jahr | 0,050 | 0,0294 |
| 2 Jahre | 0,052 | 0,0391 |
| 3 Jahre | 0,048 | 0,0455 |
| 4 Jahre | 0,050 | 0,0489 |

Allgemein kann das Vorgehen zur Berechnung der Nullkuponzinssätzen folgendermaßen beschrieben werden. Für Nullkuponanleihen mit einer Restlaufzeit von RLZ ergibt sich folgendes Berechnungsschema. Das zentrale Moment dabei ist der Rückgriff auf den Kurs C der Anleihe:

$$BW_0 = (N + Z_{RLZ}) \cdot \frac{1}{[(1 + i_{real,RLZ})]^{RLZ}}$$
$$BW_0 = N \cdot C_0$$
$$(1 + i_{real,RLZ})^{RLZ} = \frac{BW_0}{N \cdot C_0}$$
$$i_{real,RLZ} = \sqrt[RLZ]{\frac{BW_0}{N \cdot C_0}} - 1$$

Mit Hilfe der Requisiten einer Nullkuponanleihe (Nominalwert $N$, Nominalzinssatz $i_{nom}$ und Restlaufzeit ($RLZ$)) und des Kurses der Anleihe $C_0$ werden Barwert und daraus abgeleitet die realen Zinssätze (Nullkuponzinssätze) $i_{real,RLZ}$ berechnet.

### 1.2.3 Ableiten der Zinskurve aus Kuponanleihen

Wenn nicht ausreichend nahezu risikofreie Nullkuponanleihen am Markt zu finden sind, können auch sogenannte Kuponanleihen (auch Bonds genannt) zur Berechnung der Nullkuponzinssätze verwendet werden. Kuponanleihen sind ebenfalls mit einem fixen Nominalzinssatz ($i_{nom}$) ausgestattet. Die Zinszahlungen $Z$ erfolgen jedoch nicht einmalig am Ende der Restlaufzeit, sondern in periodischen Zeitabständen, in der Regel am Ende einer Zinsperiode. Am Ende der Laufzeit erfolgt neben der letzten Zinszahlung auch die Rückerstattung des Nominalwertes $N$. Die Zinszahlungen einer Kuponanleihe sind in der nachfolgenden Grafik angegeben:




Die Zinszahlungen sind konstant und werden mit Hilfe des Nominalwertes $N$ und den Nominalzinssätzen (auch Kuponzinssätze genannt) $i_{nom}$ berechnet:

$$Z = N \cdot i_{nom}$$

Es wird nun das Berechnungsschema zur Bestimmung der realen Zinssätze vorgestellt. Dabei ist zu berücksichtigen, dass mehrere Zinszahlungen bei Kuponanleihen erfolgen.

Gegeben seien die Requisiten von Kuponanleihe:

| Kuponanleihe | Nominal | Nomialzinssatz | Restlaufzeit | Kurs |
|---|---|---|---|---|
| A | 100000 | $0,05$ | 1 Jahr | $102,00\%$ |
| B | 200000 | $0,052$ | 2 Jahre | $102,48\%$ |
| C | 500000 | $0,048$ | 3 Jahre | $100,80\%$ |
| D | 300000 | $0,05$ | 4 Jahre | $100,60\%$ |

Der Nominalwert, der Nominalzinssatz (Kuponzinssatz), die Restlaufzeit seien identisch mit denen der Nullkuponanleihe. Die Kurse differieren allerdings

**Kuponanleihe A - Restlaufzeit 1 Jahr**:

Da die Restlaufzeit der Kuponanleihe A 1 Jahr beträgt, kann wie bei Nullkuponanleihen aus den Requisiten der Anleihe und dem Kurs der Anleihe auf den realen Zinssatz (Nullkuponzinssatz) geschlossen werden:

$$BW_0 = (N_A + Z) \cdot \frac{1}{[(1 + i_{real,RLZ=1})]} = 105000 \cdot \frac{1}{1 + i_{real,RLZ=1}}$$

$$BW_0 = N_A \cdot C_{A,0} = 100000 \cdot 1,02 = 102000$$

$$(1 + i_{real,RLZ=1}) = \frac{BW_0}{N_A \cdot C_{A,0}} = \frac{105000}{102000} = 1,0294$$

$$i_{real,RLZ=1} = \frac{BW_0}{N_A \cdot C_{A,0}} - 1 = 0,0294$$

Der abgeleitete Realzinssatz der Kuponanleihe A unterscheidet sich nicht vom entsprechenden Realzinssatz der Nullkuponanleihe A und beträgt 0,0294 bzw. $2,94\%$. Die Kuponanleihe A ist wegen der Restlaufzeit von einem Jahr eine Nullkuponanleihe.

Anders verhält es sich bei der **Kuponanleihe B mit einer Restlaufzeit von zwei Jahren**:

Man kann jetzt davon ausgehen, dass bereits der Realzinssatz für eine Restlaufzeit von einem Jahr bekannt ist ($i_{real,RLZ=1}0,0294$), welcher für die Bestimmung des Barwertes der Anlage genutzt werden kann. Insgesamt sind zwei Zahlungstermine zu beachten:

1. Zinszahlung im Moment $t = 1$, $Z = N_B \cdot (i_{nom,B}) = 200000 \cdot 0,052 = 10.400$

2. Zinszahlung im Moment $t = 2$, $Z = N_B \cdot (i_{nom,B}) = 200000 \cdot 0,052 = 10.400$ und
   Auszahlung des Nominalwertes von 200000 im Moment $t = 2$,
   insgesamt $N_B + Z = 210400$

Um den Barwert $BW_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ aller Zahlungen zu berechnen , müssen beide Zahlung mit den realen Zinssätzen abgezinst werden, wobei der Realzinssatz mit einer Restlaufzeit $i_{real,RLZ=2}$ noch nicht bekannt ist:

$$BW_0 = Z \cdot \frac{1}{[(1 + i_{real,RLZ=1})]} + (N_B + Z) \cdot \frac{1}{[(1 + i_{real,RLZ=2})^2]} \tag{1.1}$$

bzw.:

$$BW_0 = 10400 \cdot \frac{1}{[(1 + 0,0294)]} + 210400 \cdot \frac{1}{[(1 + i_{real,RLZ=2})^2]}$$

Gleichzeitig gilt:

$$BW_0 = N_B \cdot C_{B,0} \tag{1.2}$$

bzw.:

$$BW_0 = 200000 \cdot 1,0248 = 204966,71$$

Der Barwert $BW_0$ der Anleihe zum Zeitpunkt $t = 0$ ist gleich dem Preis der Anleihe zum gleichen Zeitpunkt. Der Preis berechnet sich bekannterweise aus dem Kurs der Anleihe zum Zeitpunkt $t = 0$ und dem Nominalwert $N_B \cdot C_{B,0}$.

Aus (1.1) und (1.2) kann nun der reale Zinssatz $i_{real,RLZ=2}$ berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
N_B \cdot C_{B,0} &= Z \cdot \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=1})]} + (N_B + Z) \cdot \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=2})^2]} \\
204966,71 &= 10400 \cdot \frac{1}{[(1+0,0294)]} + 210400 \cdot \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=2})^2]} \\
204966,71 &= 10102,97 + 210400 \cdot \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=2})^2]} \\
0,92632 &= \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=2})^2]} \\
(1+i_{real,RLZ=2})^2 &= \frac{1}{0,92632} = 1,0795 \\
i_{real,RLZ=2} &= \sqrt{1,0758} - 1 = 1,0391 - 1 = 0,0391
\end{aligned}
$$

Der Realzinssatz mit einer Restlaufzeit von zwei Jahren, abgeleitet aus Kuponanleihen, beträgt 0,0391 bzw. $3,91\%$.

Die Verwendung des abgeleiteten Nullkuponzinssatzes mit einer Laufzeit von einem Jahr zur Berechnung des Nullkuponzinssatzes von nun zwei Jahren nennt man **Bootstrapping-Verfahren**. Das Verfahren wird auch zur Berechnung des Nullkuponzinssatzes mit einer Laufzeit von 3 Jahren verwendet ($i_{real,RLZ=3}$). Die Grundlage dazu bilden die bereits berechneten Nullkuponzinssätze mit einer Restlaufzeit von einem und zwei Jahren ($i_{real,RLZ=1}$) und ($i_{real,RLZ=2}$). Die rekursive Berechnung kann dann folgendermaßen dargestellt werden:

$$
\begin{aligned}
i_{real,RLZ=1} &= berechnet\ aus\ Nullkuponanleihen \\
i_{real,RLZ=2} &= F(i_{real,RLZ=1}) \\
i_{real,RLZ=3} &= F(i_{real,RLZ=1}, i_{real,RLZ=2}) \\
... &= ... \\
i_{real,RLZ=n} &= F(i_{real,RLZ=1}, i_{real,RLZ=2}, ..., i_{real,RLZ=n-1}
\end{aligned}
$$

**Kuponanleihe C - Restlaufzeit 3 Jahre**:

Zur Berechnung des Barwertes sind alle 3 Zahlungen abzuzinsen:

$$
\begin{aligned}
Z &= N_C \cdot (i_{nom,C}) = 500000 \cdot 0,048 = 24000 \\
BW_0 &= Z \cdot \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=1})]} + Z \cdot \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=2})^2]} + (N_C + Z) \cdot \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=3})^3]} \\
&= 24000 \cdot \frac{1}{[(1+0,0294)]} + 24000 \cdot \frac{1}{[(1+0,0391)^2]} + 524000 \cdot \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=3})^3]} \\
&= 23314,55 + 22227,80 + 524000 \cdot \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=3})^3]} \\
&= 45542,35 + 524000 \cdot \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=3})^3]} \\
BW_0 &= N_C \cdot C_{C,0} = 500000 \cdot 1,008 = 504000
\end{aligned}
$$

und

$$504000 = 45.546,63 + 524000 \cdot \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=3})^3]}$$

$$0,8749 = \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=3})^3]}$$

$$(1+i_{real,RLZ=3})^3 = \frac{1}{0,8749} = 1,1430$$

$$i_{real,RLZ=3} = \sqrt[3]{1,1430} - 1 = 1,0455 - 1 = 0,0455$$

Der Realzinssatz mit einer Restlaufzeit von drei Jahren, abgeleitet aus Kuponanleihen, beträgt 0,0455 bzw. $4,55\%$.

**Kuponanleihe D - Restlaufzeit 4 Jahre**:

Zur Berechnung des Barwertes sind alle 4 Zahlungen abzuzinsen:

$$\begin{aligned}
Z &= N_D \cdot (i_{nom,D}) = 300000 \cdot 0,05 = 15000 \\
BW_0 &= Z \cdot \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=1})]} + Z \cdot \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=2})^2]} + Z \cdot \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=3})^3]} + \\
&+ (N_D + Z) \cdot \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=4})^4]} \\
&= 15000 \cdot \frac{1}{[(1+0,0294)]} + 15000 \cdot \frac{1}{[(1+0,0,0391)^2]} + 15000 \cdot \frac{1}{[(1+0,0455)^3]} + \\
&+ 315000 \cdot \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=4})^4]} \\
&= 14.571,60 + 13.892,38 + 13.125,60 + 524000 \cdot \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=4})^4]} \\
&= 41.589,58 + 315000 \cdot \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=4})^4]} \\
BW_0 &= N_D \cdot C_{D,0} = 300000 \cdot 1,006 = 301800
\end{aligned}$$

und

$$301.800 = 41.589,58 + 315000 \cdot \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=4})^4]}$$

$$0,82606 = \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=4})^4]}$$

$$(1+i_{real,RLZ=4})^4 = \frac{1}{0,82616} = 1,2106$$

$$i_{real,RLZ=4} = \sqrt[4]{1,2106} - 1 = 1,0489 - 1 = 0,0489$$

Der Realzinssatz mit einer Restlaufzeit von vier Jahren, abgeleitet aus Kuponanleihen, beträgt 0,0489 bzw. $4,89\%$.

Kuponzinssatz und Realzinssatz unterscheiden sich für jede Restlaufzeit:

| Restlaufzeit | Nomialzinssatz | Realzinssatz |
|---|---|---|
| 1 Jahr | $0,050$ | $0,0294$ |
| 2 Jahre | $0,052$ | $0,0391$ |
| 3 Jahre | $0,048$ | $0,0455$ |
| 4 Jahre | $0,050$ | $0,0489$ |

Die Realzinssätze aus Kuponanleihen sind identisch mit den Realzinssätzen aus Nullkuponanleihen. Auch für Realzinssätze, die aus Kuponzinssätze abgeleitet werden, wird der Begriff **Nullkuponzinssätze** verwendet

Die Deutsche Bundesbank veröffentlicht täglich Nullkuponzinskurven mit Restlaufzeiten von 1 Jahr bis 20Jahre (Deutsche Bundesbank Kapitalmarktstatistik). Die Berechnung unterscheidet sich von unserem Vorgehen: "Zinssätze für (hypothetische) Null-Kupon-Anleihen ohne Kreditausfallrisiko, geschätzt nach dem in den Erläuterungen zur Fachreihe Kapitalmarktkennzahlen dargestellten Verfahren. Den Schätzungen liegen die Kurse von Bundesanleihen, Bundesobligationen und Bundesschatzanweisungen mit Restlaufzeiten von mindestens drei Monaten zugrunde. Die Zinsen werden mit Hilfe eines nichtlinearen, parametrischen Ansatzes geschätzt" ([Böh21])

## 1.3 Rendite-Strukturkurve

Ein alternatives - aber zur Bewertung von Finanzprodukten nur begrenzt anwendbares Konzept - ist die Ableitung vom **Rendite-Strukturkurven**. Auch hier werden laufzeitabhängige Zinssätze bestimmt, allerdings in vereinfachter Form. Betrachten wir dazu als Ausgangspunkt oder Quelle der Berechnungen die Kuponzinssätze der Anleihen aus dem vorherigen Unterabschnitt 1.2.2:

| Kuponanleihe | Nominal | Nomialzinssatz | Restlaufzeit | Kurs |
|---|---|---|---|---|
| A | 100000 | $0,05$ | 1 Jahr | $102,00\%$ |
| B | 200000 | $0,052$ | 2 Jahre | $102,48\%$ |
| C | 500000 | $0,048$ | 3 Jahre | $100,80\%$ |
| D | 300000 | $0,05$ | 4 Jahre | $100,60\%$ |

Beispielhaft betrachten wir die Kuponanleihe C: Es werden drei Zahlungen fällig: zwei Zinszahlungen und die abschließende Zahlung (bestehend aus Zinszahlzahlung und Nominalbetrag). Bei der Nutzung der Realzinssätzen auf der Basis der Nullkuponanleihen bzw. der Kuponanleihen erfolgt die Barwertberechnung nach folgender Formel:

$$
\begin{aligned}
Z_C &= N_C \cdot (i_{nom,C}) = 500000 \cdot 0,048 = 24000 \\
BW_0 &= Z_C \cdot \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=1})]} + Z_C \cdot \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=2})^2]} + (N_C + Z_C) \cdot \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=3})^3]} \\
&= 24000 \cdot \frac{1}{[(1+0,0294)]} + 24000 \cdot \frac{1}{[(1+0,0391)^2]} + 524000 \cdot \frac{1}{[(1+0,0455)^3]} \\
&= 23314,55 + 22227,80 + 458520,94 = 504063,30
\end{aligned}
$$

D.h. Jede Zahlung wird mit Hilfe des Nullkuponzinssatzes abgezinst, der der Laufzeit der jeweiligen Zahlung entspricht (die 2. Zahlung wird mit dem Nullkuponzinssatz $Z_C \cdot \frac{1}{[(1+i_{real,RLZ=2})^2]}$ abgezinst).

Anders verhält es sich bei der Konstruktion der Rendite-Strukturkurve. Zum Abzinsen wird durchweg ein **einheitlicher Zinssatz** genutzt).

Dieses Vorgehen ist aus den dem **??** und dem **??** bekannt. Zur Barwertberechnung wurde der einheitliche Nominalzinssatz $i_{nom,C}$ zum diskontieren verwendet. Der Barwert zum Zeitpunkt $t = 0$ ist in diesem Fall gleich dem Nominalwert der Anleihe:

$$
\begin{aligned}
Z_C &= N_C \cdot (i_{nom,C}) = 500000 \cdot 0,048 = 24000 \\
BW_0 &= Z_C \cdot \frac{1}{[(1+i_{nom,C})]} + Z_C \cdot \frac{1}{[(1+i_{nom,C})^2]} + (N_C + Z_C) \cdot \frac{1}{[(1+i_{nom,C})^3]} \\
&= 24000 \cdot \frac{1}{[(1+0,048)]} + 24000 \cdot \frac{1}{[(1+0,048)^2]} + 524000 \cdot \frac{1}{[(1+0,048)^3]} \\
&= 22900,76 + 21851,87 + 455.247,36 = 500000
\end{aligned}
$$

Dabei wird jedoch nicht berücksichtigt, dass der Marktzinssatz nicht dem Nominalzinssatz entsprechen muss. Es soll nun ein einheitlicher Zinssatz bestimmt werden, der zum Diskontieren zur Berechnung des Barwertes unter Verwendung des Kurses für die Kuponanleihe C ($C_C = 1,008$) verwendet werden kann, der als **durchschnittliche Rendite der Anleihe** im Moment $t = 0$ zu interpretieren ist. Dazu werden die konstanten Zahlungen (Zinszahlungen Z und die Abschlusszahlung $N_C$) zur Berechnung des Barwert mit Hilfe der noch zu bestimmenden Zinssatzes (der Rendite der Anleihe) $i_{rend,C}$ diskontiert.

$$
\begin{aligned}
Z_C &= N_C \cdot (i_{nom,C}) = 500000 \cdot 0,048 = 24000 \\
BW_0 &= Z_c \cdot \frac{1}{[(1+i_{rend,C})]} + Z_C \cdot \frac{1}{[(1+i_{rend,C})^2]} + (N_C + Z_C) \cdot \frac{1}{[(1+i_{rend,C})^3]}
\end{aligned}
$$

Der Barwert zum Zeitpunkt $t = 0$ muss gleich dem Preis der Anleihe zum gleichen Zeitpunkt sein ($BW_0 = C_C \cdot N_C$) mit $C_C = 1,008$ dem Kurs der Anleihe C und dem Nominalwert der Anleihe C $N_C = 500000$).

$$
\begin{aligned}
C_C \cdot N_C &= 1.008 \cdot 500000 = 504000 \\
C_C &= BW_0 \\
504000 &= 24000 \cdot \frac{1}{[(1+i_{rend,C})]} + 24000 \cdot \frac{1}{[(1+i_{rend,C})^2]} + 524000 \cdot \frac{1}{[(1+i_{rend,C})^3]}
\end{aligned}
$$

Lösung der kubischen Gleichung

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{[(1+i_{rend,C})]} &= 0,9569 \\
i_{rend,c} &= \frac{1}{0,9569} - 1 = 0,0450
\end{aligned}
$$

Die durchschnittliche Rendite der Kuponanleihe C $i_{rend,C}$ beträgt 0,0450 .

Analog lassen sich die Renditen für die Kuponanleihen A, B und D berechnen:

**Kuponanleihe A**:

Die Rendite entspricht dem Nullkuponzinssatz $i_{rend,A}$) und beträgt 0,0294.

**Kuponanleihe B**:

Zur Bestimmung der Rendite $i_{rend,B}$ ist eine quadratische Gleichung zu lösen:

$$
\begin{aligned}
Z_B &= N_B \cdot (i_{nom,B}) = 200000 \cdot 0,052 = 10400 \\
BW_0 &= Z_B \cdot \frac{1}{[(1+i_{rend,B})]} + (N_B + Z_B) \cdot \frac{1}{[(1+i_{rend,B})^2]}(N_B + Z_B) \\
C_B \cdot N_B &= 1,0248 \cdot 200000 = 204960 \\
C_B &= BW_0 \\
204960 &= 10400 \cdot \frac{1}{[(1+i_{rend,B})]} + 210400 \cdot \frac{1}{[(1+i_{rend,B})^2]}
\end{aligned}
$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{[(1+i_{rend,B})]} &= 0,963 \\
i_{rend;B} &= \frac{1}{0,963} - 1 = 0,0384
\end{aligned}
$$

Die Rendite der Anleihe B $i_{rend,B}$ mit einer Restlaufzeit von 2 Jahren beträgt 0,0384.

**Kuponanleihe D**:

Zur Bestimmung der Rendite ist eine Gleichung 4. Grades zu lösen:

$$
\begin{aligned}
Z_D &= N_B \cdot (i_{nom,D}) = 300000 \cdot 0,05 = 15000 \\
BW_0 &= Z_D \cdot \frac{1}{[(1+i_{rend,D})]} + Z_D \cdot \frac{1}{[(1+i_{rend,D})^2]} + Z_D \cdot \frac{1}{[(1+i_{rend,D})^3]} + (N_B + Z_D) \cdot \frac{1}{[(1+i_{rend,D})^4]} \\
C_D \cdot N_D &= 1,006 \cdot 300000 = 301800 \\
C_D &= BW_0 \\
301800 &= 15000 \cdot \frac{1}{[(1+i_{rend,D})]} + 15000 \cdot \frac{1}{[(1+i_{rend,D})^2]} + 15000 \cdot \frac{1}{[(1+i_{rend,D})^3]} + (315000) \cdot \frac{1}{[(1+i_{rend,D})^4]}
\end{aligned}
$$

Lösung der Gleichung 4. Grades:

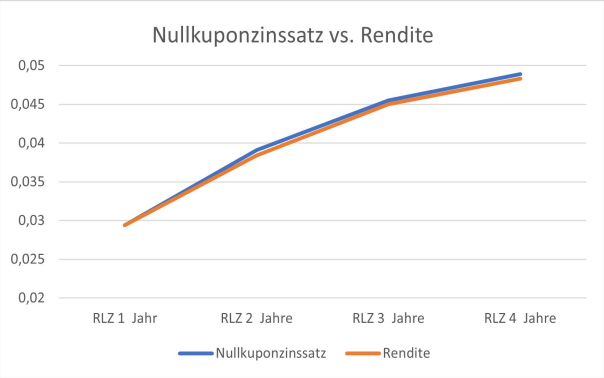
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{[(1+i_{rend,D})]} &= 0,9539 \\
i_{rend} &= \frac{1}{0,9539} - 1 = 0,0483
\end{aligned}
$$

Die Rendite der Anleihe D $i_{rend,D}$ mit einer Restlaufzeit von 4 Jahren beträgt 0,0483.

Damit ergeben sich folgende Kuponzinsen, Nullkuponzinsen und Renditen:

| Restlaufzeit | Nomialzinssatz | Nullkuponzinssatz | Rendite |
|---|---|---|---|
| 1 Jahr | 0,050 | 0,0294 | 0,0294 |
| 2 Jahre | 0,052 | 0,0391 | 0,0384 |
| 3 Jahre | 0,048 | 0,0455 | 0,0450 |
| 4 Jahre | 0,050 | 0,0489 | 0,0483 |

Die folgende Grafik zeigt den Verlauf der unterschiedlichen Zinssätze:




Die durchschnittlichen Rendite eignen sich nur bedingt zum Diskontieren der Zahlung. Ein korrektes Ergebnis erzielt man nur, wenn die Zinskurve flach ist.

Allgemein kann die durchschnittliche Rendite einer Anleihe mit einer Restlaufzeit von m Jahren durch Lösung einer Gleichung j-ten Grades bestimmt werden:

$$C \cdot N = \sum_{i=1}^{(m-1)} \frac{Z}{[(1+i_{rend})^i]} + \frac{N+Z}{[(1+i_{rend})^m]} \tag{1.3}$$

Die Deutsche Bundesbank veröffentlicht täglich die Rendite für börsennotierte Bundeswertpapiere mit jährlichen Kuponzahlungen.

## 1.4 Zinsstrukturkurven - kurze Laufzeiten

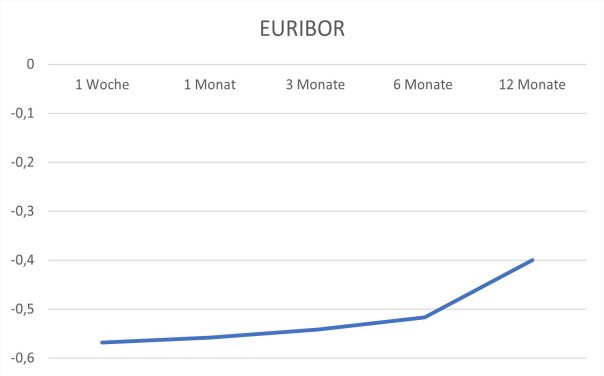
Neben Nullkupon-Zinsstrukturkurven und Rendite-Strukturkurven existieren weitere Zinsstrukturkurven für spezielle Laufzeiten der Finanzprodukte, die mit Nullkuponzinskurven nicht abgedeckte werden können. Nullkupon-Zinsstrukturkurven bilden in der Regel Laufzeiten zwischen 1 und 10 Jahren ab, möglicherweise auch darüber hinaus. Für Finanzprodukte mit kurzen Laufzeiten muss nach alternativen Zinskurven gesucht werden. Eine Möglichkeit ist die Nutzung von Geldmarktzinssätzen des Interbankenhandels, z.B. des EURIBORS (Euro InterBank Offered Rate) oder des LIBORS (London Interbank Offered Rate). Der Referenzzinssatz EURIBOR wird von der EZB folgendermaßen definiert: "Der EURIBOR ist ein Referenzzinssatz für unbesicherte Kredite auf dem Interbankenmarkt, der für mehrere Laufzeiten berechnet wird (eine Woche sowie einen, drei, sechs und zwölf Monate). Er wird vom European Money Markets Institute (EMMI) verwaltet." ($https://www.ecb.europa.eu/explainers/tell-me-more/html/benchmark_r$ Der EURIBOR kann als Durchschnittswert im Handel zwischen Banken angesehen werden, wobei die ausgewählten Banken ein erstklassisches Rating haben. Damit wird weitgehend gewährleistet, dass der Zinssatz risikofrei ist. Wegen Manipulationsvorwürfen beschloss die EZB einen alternativen Referenzzinssatz einzuführen: die Euro short-term rate. Ähnlich verhält es sich mit dem Libor, der für unterschiedliche Währungen in London bestimmt wird. Verschiedene Manipulationsversuche haben dazu geführt, dass EURIBOR und LIBOR durch andere Referenzzinssätze ersetz werden sollen. Für das britische Pfund Sterling soll der SONIA (Sterling Overnight Index Average) als Referenzzins gelten; in ähnlicher Weise soll für SOFR (Secured Overnight Financing Rate) für den US-Dollar, SARON (Swiss Average Rate Overnight) für den Schweizer Franken, TONAR (Tokyo Overnight Average Rate) für den jananischen Yen, bzw. der ESTER (Euro Short-Term Rate) für den Euro fungieren.($vgl.https://de.wikipedia.org/wiki/London_nterb$

Es ist nicht Gegenstand dieses Buches, die konkreten Bedingungen für die Bestimmung der oben genannten Referenzzinssätze zu analysieren und zu beschreiben. Wichtig ist die Tatsache, dass - unabhängig welcher Referenzzinssatz zur Anwendung kommt, dass diese Zinssätze täglich zur Verfügung gestellt werden und damit zur Bewertung von Finanzprodukten mit kurzer Laufzeit herangezogen werden können. Exemplarisch wird nun gezeigt, wie die Zinsstrukturkurve des EURIBOR aufgebaut ist.

Die Zinsstrukturkurve des EURIBOR notiert die Zinssätze für folgende Laufzeiten:

- eine Woche
- ein Monat
- drei Monate
- sechs Monate und
- zwölf Monate

Für den 3. Juni veröffentlichte die Deutsche Bundes Bank folgende Zinsstrukturkurve für den EURIBOR. Angaben in %:




## 1.5 Bewertung auf der Basis von Nullkuponzinssätzen

In den Kapiteln 2., 3. und 4. erfolgte die Barwert- und Zeitwertberechnung mit Hilfe des Nominalzinssatzes. Wie in den vorangegangenen Abschnitten des Kapitels 5. gezeigt, gibt es ein anderes Verfahren zur Berechnung der Bar- und Zeitwerten: die Verwendung der realen Zinssätze $i_{real,RLZ=t}$. Beide Verfahren erbringen unterschiedliche Ergebnisse und diese müssen auch verschieden interpretiert werden.

### 1.5.1 Barwertberechnung einfacher Kapitalbildungsprozesse

Am Beispiel der Kapitalbildung über mehrere Jahre soll der Unterschied zwischen Barwertberechnungen zu verschiedenen Zeitpunkten ($BW_0$ und $BW_t$) auf der Bais der Nominalzinsen und der realen Zinsen $i_{real,RLZ=t}$ gezeigt werden. Gegeben sei ein Anfangskapital $K_0$, dass zum Nominalzinssatz von $i_{nom}$ bei einer Laufzeit von T Jahren verzinst wird. Die Verzinsung erfolgt jährlich, jeweils am Ende des Jahres. Der Kapitalbildungsprozess wird dann wie folgt beschrieben, wobei $K_T$ der Endwert (Nominalkapital $K_0$ + aufgelaufenen Zinsen) ist:

$$K_T = K_0 \cdot (1 + i_{nom})^T$$

Zu beachten ist, dass nur zwei Zahlungen erfolgen, zu Beginn des Kapitalbildungsprozesses die Einzahlung des Anfangs- oder Nominalkapitals $K_0$ und die Auszahlung des Endkapitals oder Endwertes (Nominalkapital $K_0$ + aufgelaufenen Zinsen) am Ende der Laufzeit.
Sind

$$\begin{aligned} K_0 &= 10000 \\ i_{nom} &= 0,05 \\ T &= 10 \\ i_{real,RLZ=10} &= 0,06 \end{aligned}$$

dann gilt:

$$K_{10} = K_0 \cdot (1 + i_{nom})^{10}$$
$$K_{10} = 10000 \cdot (1 + 0,05)^{10} = 16288,95$$

Aus dem Endwert kann nun der Barwert $BW_0$ bestimmt werden: Der Barwert kann nun analog zum Vorgehen im **??** mit Hilfe der Abzinsfaktoren berechnet werden. Wir unterscheiden zwischen Abzinsfaktoren auf der Basis des Nominalzinssatzes $q_{nom,RLZ=T} = \frac{1}{(i_{nom})^T}$ und den Abzinsfaktoren auf der Grundlage des realen Zinssatzes $q_{real,RLZ=T} = \frac{1}{(i_{real,RLZ=t})^T}$. Der Prozess des Abzinsen wird als Diskontierung bezeichnet. Da nur eine Auszahlung am Ende der Laufzeit T erfolgt, müssen die Abzinsfaktoren mit einer Restlaufzeit von $RLZ = T = 10$ angewendet werden. Für den Barwert auf der Basis des Nominalzinssatzes $BW_{0,nom}$ erhält man:

$$BW_{0,nom} = K_T \cdot q_{nom,RLZ=T} = K_T \cdot \frac{1}{(1 + i_{nom})^T}$$
$$BW_{0,nom} = 16288,55 \cdot \frac{1}{(1 + 0,05)^{10}} = 10000$$
$$q_{nom,RLZ=T} = \frac{1}{(1 + 0,05)^{10}} = 0,61391$$

Verwendet man den Nominalzins zur Bestimmung des Abzinsfaktors , ist der Barwert gleich dem Nominalkapital. Anders verhält es sich beim Barwert auf der Grundlage des realen Zinssatzes $BW_{0,real}$:

$$BW_{0,real} = K_T \cdot q_{real,RLZ=T} = K_T \cdot \frac{1}{(1 + i_{real,RLZ=T})^T}$$
$$BW_{0,real} = 16288,55 \cdot \frac{1}{(1 + 0,06)^{10}} = 9.095,44$$
$$q_{real,RLZ=T} = \frac{1}{(1 + 0,05)^{10}} = 0,55839$$

Der Barwert beträgt nun 9095,44 EUR. Der reale Zinssatz ist gegenüber dem Nominalzinssatz gestiegen. Es genügen unter Marktbedingungen jetzt der Betrag von 9095,44 EUR um ein Kapital von 16288,55 EUR in 10 Jahren zu erwirtschaften: D.h. der Kapitalbildungsprozess bei einem Nominalzinssatz von 5% verliert an Wert. Würde man den Vertrag zum Zeitpunkt $t = 0$ an einen Dritten verkaufen, dürfte man fair nur 9095,44 EUR und nicht den Nominalbetrag von 10000 EUR verlangen.

Wie beschrieben, verwenden wir als Realzinssatz die Nullkuponzinssätze, welche aus den Nullkuponanleihen oder Kuponanleihen abgeleitet werden. Die dabei benutzten Restlaufzeiten werden in der Regel in Jahren (oder T ist eine ganzzahlige Zahl, die der Dauer von T Jahren entspricht) angegeben. Kapitalbildungsprozesse sind jedoch nicht immer mit ganzjährigen Restlaufzeiten zu beschreiben. Grundsätzlich ist jede beliebige Restlaufzeit möglich. Sie kann durch 2 Intervalle charakterisiert werden: einen ganzjährigen Bestandteil $(0, T)$ und - wenn die Restlaufzeit nicht ganzjährig ist - durch einen unterjährigen Bestandteil $(T, T + \Delta t)$. Die gesamte Restlaufzeit beläuft sich auf $T + \Delta t$.




Wie unterjährige Nullkuponzinssätze aus der Nullkuponzinskurve berechnet werden ist zunächst nicht bekannt, wird aber im Unterabschnitt 1.5.3 behandelt.

In den bisherigen Überlegungen wurde unter dem Barwert der abgezinste Endwert auf den Beginn des Kapitalbildungsprozesses verstanden. Die Bezeichnung des Barwertes - ob auf Basis des Nominalzinssatzes

oder des realen Zinssatzes - enthielt immer den Hinweis auf den Zeitpunkt $t = 0$, nämlich $BW_{0,real}$ oder $BW_{0,nom}$.

Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass der Barwert $BW_{0,real}$ oder $BW_{0,nom}$ nicht nur zu Beginn des Kapitalbildungsprozess $t = 0$ bestimmt werden kann, sondern zu einem beliebigen Zeitpunkt t mit $t \geq 0$. Diesen Barwert bezeichnen wir mit $BW_{t,real}$ oder $BW_{t,nom}$.

Im weiteren wird die Bildung des Barwertes $BW_{t,real}$ oder $BW_{t,nom}$ bei $t \neq 0$ untersucht. Zu beachten ist, dass nur zwei Zahlungen beim untersuchten Kapitalbildungsprozess erfolgen: die Einzahlung des Anfangs- oder Nominalkapitals $K_0$ und die Auszahlung des Endkapitals oder Endwertes (Nominalkapital $K_0$ + aufgelaufenen Zinsen) am Ende der Laufzeit. Zum Zeitpunkt t muss die einzige ausbleibende Zahlung (Nominalkapital $K_0$+ aufgelaufenen Zinsen) zur Bestimmung des Barwertes berücksichtigt werden. Der Endwert aller ausbleibenden Zahlung ist $K_0+Z$. Während zum Diskontieren für den Barwert $BW_{0,real}$ der reale Zinssatz mit einer Restlaufzeit von T Jahren ($i_{real,RLZ=T}$) genutzt werden muss, ist zur Bestimmung des Barwertes $BW_{t,real}$ mit dem realen Zinssatz mit einer Restlaufzeit von $(T-t)$ Jahren ($i_{real,RLZ=T-t}$) zu diskontieren.

Verwenden wir das obige Beispiel und setzten $t = 6$, kann der Barwert durch diskontieren des Endwertes zum Zeitpunkt $t = 6$ berechnet werden. Der reale Zinssatz mit einer Restlaufzeit von $T - t = 10 - 6 = 4$ Jahren ($i_{real,RLZ=10-6}$) betrage 7%. Der Zinssatz wird zur Bestimmung der Abzinsfaktoren $q_{nom,RLZ=T-t}$ benötigt:

$$
\begin{aligned}
BW_{t,real} &= K_T \cdot q_{real,RLZ=T-t} = K_T \cdot \frac{1}{(1+i_{real})^{T-t}} \\
BW_{t,real} &= 16288,55 \cdot \frac{1}{(1+0,07)^4} = 12426,46 \\
q_{nom,RLZ=T} &= \frac{1}{(1+0,05)^4} = 0,7629
\end{aligned}
$$

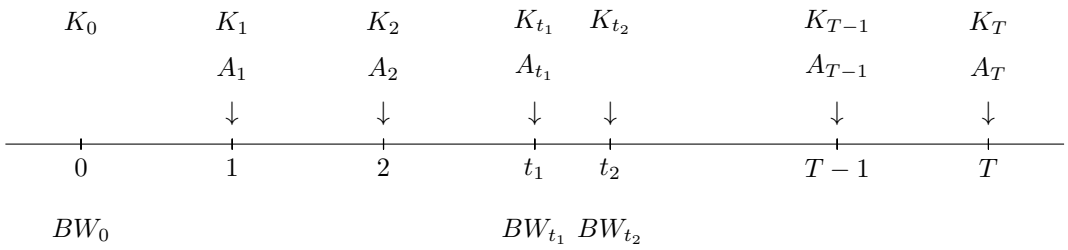
Im Unterschied zur Berechnung des Barwertes mit Hilfe des realen Zinssatzes $BW_{t,real}$ spielen bei der Berechnung des Barwertes mit dem nominalem Zinssatz laufzeitabhängige Zinssätze keine Rolle:

$$
\begin{aligned}
BW_{t,nom} &= K_T \cdot q_{nom,RLZ=T-t} = K_T \cdot \frac{1}{(1+i_{nom})^{T-t}} \\
BW_{t,nom} &= 16288,55 \cdot \frac{1}{(1+0,05)^4} = 13400,63 \\
q_{nom,RLZ=T} &= \frac{1}{(1+0,05)^4} = 0,82270
\end{aligned}
$$

Im weiteren soll die Berechnung von Barwerten von allgemeinen Finanzströmen dargestellt werden. Finanzströme werden durch Transaktionen $A_t$ charakterisiert, d.h. Zu oder Abflüsse von Geldmitteln. Im Ergebnis der Transaktionen wird das Anfangskapital $K_0$ verändert. Am Ende der Laufzeit bildet sich der Kapitalendwert $K_T$ aller Transaktionen und des Anfangskapitals.

### 1.5.2 Barwertberechnung von Finanzströmen - ganzzahlige Berechnungszeitpunkte

Wir gehen zunächst davon aus, dass Transaktionen immer am Ende der Zinsperiode (hier am Ende des Jahres) stattfinden. Die Zeitpunkte sind ganzzahlig: 0,1,2,...T. Zunächst die grafische Darstellung:




In dieser Darstellung ist zu beachten, dass fast alle auf der Zeitachse fixierten Zeitpunkte $t = 0, 1, 2, t_1, T-1, T$ das Ende oder den Anfang einer Zinsperiode beschreiben. Die Ausnahme bildet der Zeitpunkt $t_2$, der nicht Anfang bzw. Ende einer Zinsperiode ist, sondern zwischen den Anfang / Ende der Zinsperioden $t_1$ und $t_1 + 1$ liegt. Die Transaktion zum Zeitpunkt $t_2$ findet innerhalb einer Zinsperiode statt.

Zu den Zeitpunkten $t = 0$, $t = t_1$ und $t = t_2$ soll der Barwert berechnet werden. Für den Zeitpunkt $t = 0$ ist das unproblematisch, da alle Zinstermine in ganzjährigen Abständen vom Zeitpunkt $t = 0$ liegen und die Nullkuponzinssätze zum Diskontieren aus der Nullkuponzinskurve bekannt sind. Etwas komplizierter sieht es aus, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ der Barwert $BW_{t_1}$ berechnet werden soll: der Zeitpunkt $t = t_1$ liegt dann in der Zukunft. Um den Barwert zu berechnen, müssten Nullkuponzinssätze bekannt sein, die beginnend mit $t = t_1$ eine ganzjährige Restlaufzeit von $t - t_1$ mit $t = t_1 + 1, t = t_1 + 2, ..., T$ haben. Diese Zinssätze sind zum Zeitpunkt $t = 0$ nicht bekannt und müssen implizit berechnet werden. Das wird im Unterabschnitt 1.5.4 beschrieben.

Noch komplizierter stellt sich die Berechnung des Barwertes $BW_{t_2}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ dar. Der Zeitpunkt $t = t_2$ liegt gemessen an den Zeitpunkt $t = 0$ ebenfalls in der Zukunft. Darüber hinaus liegt er zwischen zwei Zinsterminen - oder innerhalb einer Zinsperiode. Nicht nur zukünftige Nullkuponzinssätze sind notwendig, auch die Restlaufzeiten ab dem Zeitpunkt $t_2$ sind nicht ganzjährig, sondern unterjährig. Die realen Zinssätze (d.h. die Nullkuponzinssätze) liegen nur für ganzjährige Zeitabschnitte vor. Die Zinssätze für unterjährige Zeitabschnitte müssen aus den ganzjährigen Nullkuponzinssätzen abgeleitet werden. das ist Gegenstand im Unterabschnitt 1.5.5. Auf die Barwertbestimmung zum Zeitpunkt $t = t_2$ wird erst nach dem Unterabschnitt 1.5.4 und dem Unterabschnitt 1.5.5 eingegangen.

Wir beginnen mit der Barwertberechnung für den Anfangszeitpunkt ($t = 0$)

**Barwertberechnung für den Anfangszeitpunkt ($t = 0$):**

Man kann davon ausgehen, dass die Nullkuponzinskurve für $t = 0$ bekannt ist. Das bedeutet, wir kennen alle realen Zinssätze $i_{real,RLZ=t}$ für alle Restlaufzeiten $t = 1, 2, ..., T$. Mit Hilfe dieser Nullkuponzinssätze sind wir in der Lage, alle Auf- und Abzinsfaktoren für die Restlaufzeiten $t = 1, 2, ..., T$ zu bestimmen und den Barwert aller ausstehenden Zahlungen zu bestimmen:

Die Aufzinsfaktoren $q_t$ und Abzinsfaktoren $\hat{q}_t = \frac{1}{q_t}$ können wie folgt berechnet werden:

$$q_t = q_{real,RLZ=t} = (1 + i_{real,RLZ=t})^t \quad \forall t = 1, 2, ...T$$
$$\hat{q}_t = \frac{1}{q_t} = \frac{1}{(1 + i_{real,RLZ=t})^t} = (1 + i_{real,RLZ=t})^{-t} \quad \forall t = 1, 2, ...T$$

Nun werden alle Transaktionen mit den jeweiligen Abzinsfaktor diskontiert und wir erhalten den Barwert $BW_0(A_t)$ für jede Transaktion:

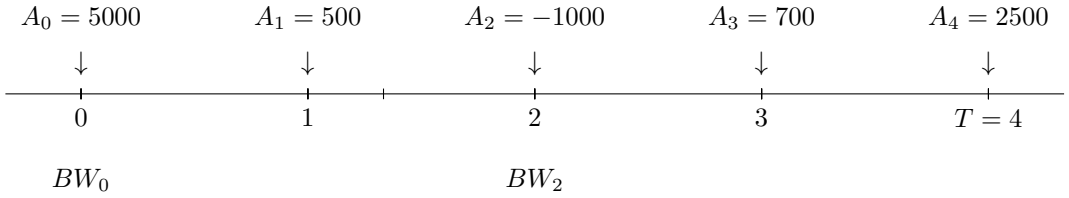
$$BW_0(A_t) = A_t \cdot \frac{1}{q_t} \quad \forall t = 1, 2, ...T$$
$$BW_0(A_t) = A_t \cdot \hat{q}_t \quad \forall t = 1, 2, ...T$$

Der Barwert $BW_0$ aller Transaktionen $A_t$ ist dann die Summe aller Barwerte der Transaktionen $BW_0(A_t)$:

$$BW_0 = \sum_{t=1}^{T} BW_0(A_t)$$

**Beispiel**:

Wir betrachten Finanzströme mit einer Laufzeit von 4 Jahren. Die Zinsperiode betrage 1 Jahr, Ein- und Auszahlungen erfolgen am Ende/Anfang jeder Zinsperiode. Die Finanzströme können der nachfolgenden Grafik entnommen werden:




**(a) Barwertberechnung zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ ($BW_0$):**

Der Barwert zum Zeitpunkt $t = 0$ wird definiert als abgezinster Betrag aller **zukünftigen Zahlungen**. Diese werden mit den realen Zinssätzen ((Nullkuponzinssätze) bewertet, jeweils mit einer Restlaufzeit von $1, 2, 3, 4$ Jahren. Die Zahlung $A_0$ kann als Anfangsbestand interpretiert werden

Es werden die folgenden realen Zinssätze (Nullkuponzinssätze) aus dem Unterabschnitt 1.2.2 genutzt:

| Restlaufzeit | Realzinssatz | Abzinsfaktoren |
|---|---|---|
| 1 Jahr | $0,0294$ | 0,9714 |
| 2 Jahre | $0,0391$ | 0,9262 |
| 3 Jahre | $0,0455$ | 0,8750 |
| 4 Jahre | $0,0489$ | 0,8262 |

Alle Transaktionen $A_t$ werden zum jeweiligen Nullkuponzinssatz abgezinst und dann addiert:

$$\begin{aligned}
BW_0(A_0) &= A_0 = 5000 \\
BW_0(A_1) &= A_1 \cdot \frac{1}{(1 + i_{real,RLZ=1})} = 500 \cdot \frac{1}{(1 + 0,0294)} = 485,72 \\
BW_0(A_2) &= A_2 \cdot \frac{1}{(1 + i_{real,RLZ=2})^2} = -1000 \cdot \frac{1}{(1 + 0,0391)^2} = -926,15 \\
BW_0(A_3) &= A_3 \cdot \frac{1}{(1 + i_{real,RLZ=3})^3} = 700 \cdot \frac{1}{(1 + 0,0455)^3} = 612,53 \\
BW_0(A_4) &= A_4 \cdot \frac{1}{(1 + i_{real,RLZ=4})^4} = 2500 \cdot \frac{1}{(1 + 0,0489)^4} = 2065,40
\end{aligned}$$

Die Berechnung kann auch direkt mit Hilfe der Abzinsfaktoren $q_t$ erfolgen:

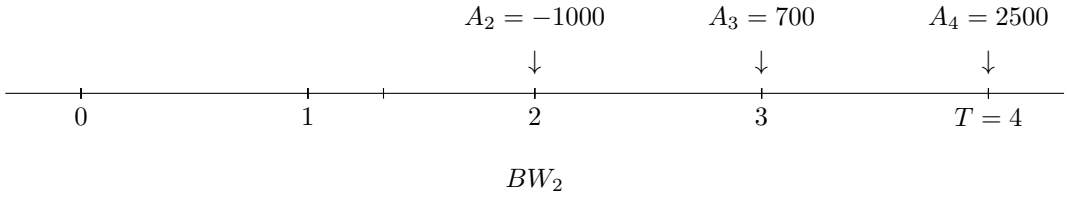
$$\begin{aligned}
BW_0(A_0) &= A_0 = 5000 \\
BW_0(A_1) &= A_1 \cdot \hat{q}_1 = 500 \cdot 0,9714 = 485,72 \\
BW_0(A_2) &= A_2 \cdot \hat{q}_2 = -1000 \cdot 0,9262 = -926,15 \\
BW_0(A_3) &= A_3 \cdot \hat{q}_3 = 700 \cdot 0,8750 = 612,53 \\
BW_0(A_4) &= A_4 \cdot \hat{q}_4 = 2500 \cdot 0,8262 = 2065,40
\end{aligned}$$

$$BW_0 = \sum_{t=0}^{4} BW_0(A_t) = 7237,48$$

Der Barwert für den Zeitpunkt $t = 0$ beträgt 7237,48 EUR und stellt das Äquivalent für alle zukünftigen Zahlungen zum Zeitpunkt $t = 0$ dar. Die Bewertung der Zahlungsströme erfolgt mit den marktüblichen Nullkuponzinssätze im Zeitpunkt $t = 0$.

**(a) Barwertberechnung zum Anfangszeitpunkt $t = 2$ ($BW_2$):**

Wir Versuchen den Barwert aller noch ausstehenden Zahlungen im Moment $t = 2$ zu berechnen. In der nachfolgenden Grafik sind die noch ausstehenden Zahlungen abgebildet:



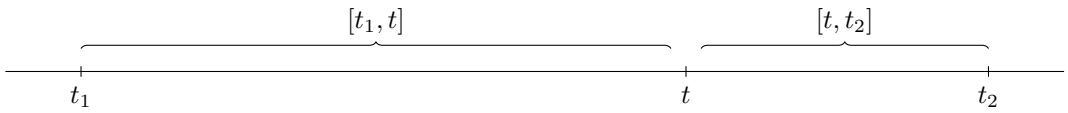

$BW_2$

Die bereits getätigten Zahlungen, hier in den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$, werden zur Berechnung des Barwertes $BW_2$ nicht mehr berücksichtigt, sondern nur die noch ausstehenden Zahlungen. Zur Bewertung müssen nun die Nullkuponzinssätze für eine Restlaufzeit von $0, 1, 2$ Jahren genutzt werden, die im Moment $t = 2$ marktüblich sind. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind diese jedoch nicht bekannt. Es gibt Verfahren, diese zukünftigen Nullkuponzinssätze bereits im Zeitpunkt $t = 0$ zu bestimmen. Dieser Problematik ist u.a. der Unterabschnitt 1.5.4 gewidmet. Zuvor soll jedoch die Barwertberechnung für nicht ganzjährige Bewertungszeitpunkte beschrieben werden.

### 1.5.3 Barwertberechnung von Finanzströmen - unterjährige Berechnungszeitpunkte

Nullkuponzinskurven werden aus Nullkuponzinssätzen abgeleitet, die für ganzzahlige Stützstellen entsprechend der Vorgehensweise von Unterabschnitt 1.2.1 bzw. Unterabschnitt 1.2.2 abgeleitet. Die daraus abgeleiteten Nullkuponzinssätze haben die Restlaufzeiten von einem und mehreren Jahren $i_{real,RLZ=t}$ mit $t = 1, 2, ..., T$ Jahren (in der Regel ist $T = 10$).

Die Aufgabe besteht nun darin, aus zwei benachbarten Nullkuponzinssätzen $i_{real,RLZ=t_1}$ und $i_{real,RLZ=t_2}$ einen Zinssatz mit einer Restlaufzeit t aus dem Intervall $[t_1, t_2]$ zu generieren. Dazu wird das Intervall $[t_1, t_2]$ in zwei Teilintervalle zerlegt: $[t_1, t]$ und $[t, t_2]$.




Die Berechnung erfolgt durch Interpolation:

$$i_{real,RLZ=t} = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \cdot i_{real,RLZ=t_1} + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \cdot i_{real,RLZ=t_2}$$

Soll beispielsweise für das Beispiel aus dem Unterabschnitt 1.5.2 der Nullkuponzinssatz $i_{real,RLZ=2,25}$ mit einer Restlaufzeit von 2 Jahren und drei Monaten aus den bekannten Nullkuponzinssätzen $i_{real,RLZ=2}$ und $i_{real,RLZ=3}$, kann das folgendermaßen erfolgen:

Gegeben seien die beiden bekannten Nullkuponzinssätze zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer Restlaufzeit von 2 und 3 Jahren:

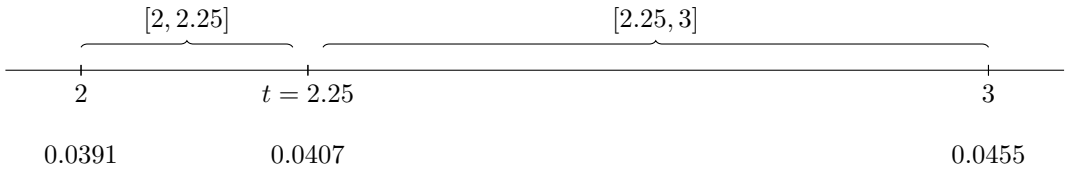
| Restlaufzeit | Realzinssatz |
|---|---|
| 2 Jahre | $0,0391$ |
| 3 Jahre | $0,0455$ |

Der interpolierte Nullkuponzinssatz im Zeitpunkt $t = 0$ mit einer Restlaufzeit von 2,25 Jahren ist dann:

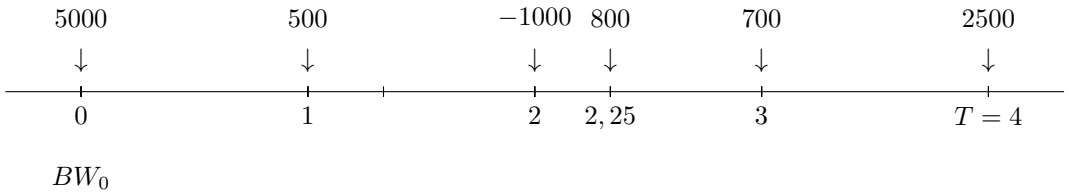
$$
\begin{aligned}
i_{real,RLZ=t} &= \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \cdot i_{real,RLZ=t_1} + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \cdot i_{real,RLZ=t_2} \\
i_{real,RLZ=2,25} &= \frac{3 - 2,25}{3 - 2} \cdot i_{real,RLZ=2} + \frac{2,25 - 2}{3 - 2} \cdot i_{real,RLZ=3} \\
i_{real,RLZ=2,25} &= 0,75 \cdot 0,0391 + 0,25 \cdot 0,0455 = 0,0407
\end{aligned}
$$

Der interpolierte Zinssatz $i_{real,RLZ=2,25}$ beträgt $4,07\%$.

Graphisch ergibt sich folgendes Bild:




Wir können den Zinssatz $i_{real,RLZ=2,25}$ zur Barwertberechnung $BW_0$verwenden, wenn eine zusätzliche Zahlung, z.B. von 800 EUR, im Zeitpunkt $t = 2,25$ erfolgt. Hierzu die Grafik:




Der Barwert $BW_0$ ergibt sich aus dem bisher berechneten Barwert von 7237,48 EUR und dem abgezinsten Betrag von 800 EUR:

$$
\begin{aligned}
BW_0(A_{2,25}) &= A_{2,25} \cdot \frac{1}{(1 + i_{real,RLZ=2,25})^{2,25}} \\
BW_0(A_{2,25}) &= 800 \cdot \frac{1}{(1 + 0,0407)^{2,25}} = 731,32 \\
BW_0 &= 7337,48 + 731,32 = 7.968,80
\end{aligned}
$$

Nach Aufnahme einer zusätzlichen Zahlung von 800 EUR im Zeitpunkt $t = 2,25$ erhöht sich der Barwert $BW_0$ von ursprünglich 7237,48 EUR um 731,32 EUR auf 7968,80 EUR.

### 1.5.4 Berechnung zukünftiger Nullkuponzinssätze und Abzinsfaktoren

In den bisherigen Betrachtungen wurden die Nullkuponzinssätze mit $i_{real,RLZ=\theta}$ bezeichnet. Dabei wurde davon ausgegangen, dass die Zinssätze sich auf den Basiszeitraum $t = 0$ beziehen. Korrekt müsste man den Zinssatz $i_{real,RLZ=\theta}$ als der Nullkuponzinssatz, der im Moment $t = 0$ am Markt beobachtet wird, und

eine Restlaufzeit von $\theta$ hat, interpretieren. Der Nullkuponzinssatz bezieht sich folglich auf das Intervall vom Zeitpunkt $t = 0$ bis zum Zeitpunkt $t =$, d.h. auf das Intervall $[0, \theta]$. Grundsätzlich kann kann auch ein Nullkuponzinssatz bestimmt werden, der wahrscheinlich am Markt zum Zeitpunkt t ($t > 0$) beobachtet werden wird und deren Restlaufzeit gleich $\theta - t$ ist. Dieser Zinssatz bezieht sich nun auf das Intervall $[t, \theta]$. Um diese Zinssätze korrekt unterscheiden zu können, führen wir folgende Notation ein:

| | |
|---|---|
| $i_{real}(0 \to \theta)$ | Nullkuponzinssatz im Moment 0 mit einer Restlaufzeit von $\theta$ |
| $i_{real}(t \to \theta)$ | Nullkuponzinssatz im Moment $t$ mit einer Restlaufzeit von $\theta$ |

Unter Beachtung dieser Notation soll der Berechnungsprozess zweier Barwerte illustriert werden. Dazu werden 4 ganzjährige Zeitpunkte betrachtet:

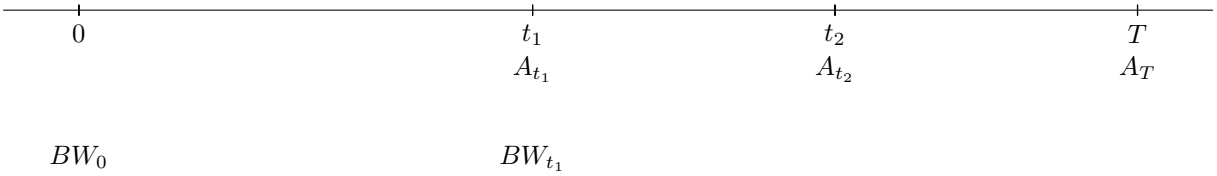
- $t = 0$ - Anfangszeitpunkt (Berechnen des Barwertes $BW_0$
- $t = t_1$ - Termin der Zahlung $A_{t_1}$ (Berechnen des Barwertes $BW_{t_1}$)
- $t = t_1$ - Termin der Zahlung $A_{t_2}$n
- $t = T$ - Ende der Laufzeit, Termin der Zahlung $A_T$

Zur Berechnung des Barwertes $BW_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ benötigt man folgende Nullkuponzinssätze: $i_{real}(0 \to T)$, $i_{real}(0 \to t_2)$ und $i_{real}(0 \to T)$. Zum Zeitpunkt $t = t_1$ werden zur Barwertberechnung nur die zukünftigen Zahlungen berücksichtigt ($A_{t_2}$ und $A_T$). Es werden die zukünftigen Nullkuponzinssätze $t_1 \to t_2$ und $t_1 \to T$ genutzt.

$i_{real}(0 \to T)$ $\qquad$ $i_{real}(t_1 \to T)$

$i_{real}(0 \to t_2)$ $\qquad$ $i_{real}(t_1 \to t_2)$

$i_{real}(0 \to t_1)$




$BW_0$ $\qquad$ $BW_{t_1}$

Die Nullkuponzinssätze, die für den Zeitpunkt $t = 0$ berechnet wurden, werden nun mit $i_{real}(0 \to t)$bezeichnet. Der Zusammenhang zu der ursprünglichen Bezeichnung ist folgender:

$$i_{real}(0 \to t_1) = i_{real,RLZ=t_1}$$
$$i_{real}(0 \to t_2) = i_{real,RLZ=t_2}$$
$$i_{real}(0 \to T) = i_{real,RLZ=T}$$

Für die Nullkuponzinssätze, die mit dem Zeitpunkt $t = t_1$ beginnen, verwenden wir folgende Bezeichnungen:

$$i_{real}(t_1 \to t_2)$$
$$i_{real}(t_1 \to T)$$

Schließlich gilt für den Zeitpunkt $t = t_2$:

$$i_{real}(t_2 \to T)$$

Man kann die **Nullkuponzinssätze** in der folgenden Tabelle zusammen fassen:

| | $t_1$ | $t_2$ | $T$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $i_{real}(0 \to t_1)$ | $i_{real}(0 \to t_2)$ | $i_{real}(0 \to T)$ |
| $t_1$ | | $i_{real}(t_1 \to t_2)$ | $i_{real}(t_1 \to T)$ |
| $t_2$ | | | $i_{real}(t_2 \to T)$ |

Aus den Nullkuponzinssätzen Lassen sich leicht die Auf- und Abzinsfaktoren bestimmen:

**Aufzinsfaktoren:**

$$
\begin{aligned}
q_{(0\to t_1)} &= (1 + i_{real}(0 \to t_1))^{t_1} \\
q_{(0\to t_2)} &= (1 + i_{real}(0 \to t_2))^{t_2} \\
q_{(0\to T)} &= (1 + i_{real}(0 \to T))^{T} \\
q_{(t_1\to t_2)} &= (1 + i_{real}(t_1 \to t_2))^{t_2 - t_1} \\
q_{(t_1\to T)} &= (1 + i_{real}(t_1 \to T))^{T - t_1} \\
q_{(t_2\to T)} &= (1 + i_{real}(t - 2 \to T))^{T - t_2}
\end{aligned}
$$

**Abzinsfaktoren:**

$$
\begin{aligned}
\hat{q}_{(0\leftarrow t_1)} &= \frac{1}{q_{(0\to t_1)}} \\
\hat{q}_{(0\leftarrow t_2)} &= \frac{1}{q_{(0\to t_2)}} \\
\hat{q}_{(0\leftarrow T)} &= \frac{1}{q_{(0\to T)}} \\
\hat{q}_{(t_1\leftarrow t_2)} &= \frac{1}{q_{(t_1\to t_2)}} \\
\hat{q}_{(t_1\leftarrow T)} &= \frac{1}{q_{(t_1\to T)}} \\
\hat{q}_{(t_2\leftarrow T)} &= \frac{1}{q_{(t_2\to T)}}
\end{aligned}
$$

Zusammengefasst in Tabellen:

**Aufzinsfaktoren:**

| | $t_1$ | $t_2$ | $T$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $q_{(0\to t_1)}$ | $q_{(0\to t_2)}$ | $q_{(0\to T)}$ |
| $t_1$ | | $q_{(t_1\to t_2)}$ | $q_{(t_1\to T)}$ |
| $t_2$ | | | $q_{(t_2\to T)}$ |

**Abzinsfaktoren:**

| | $t_1$ | $t_2$ | $T$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $\hat{q}_{(0\leftarrow t_1)}$ | $\hat{q}_{(0\leftarrow t_2)}$ | $\hat{q}_{(0\leftarrow T)}$ |
| $t_1$ | | $\hat{q}_{(t_1\leftarrow t_2)}$ | $\hat{q}_{(t_1\leftarrow T)}$ |
| $t_2$ | | | $\hat{q}_{(t_2\leftarrow T)}$ |

Mit Hilfe der Abzinsfaktoren lassen sich dann die Barwerte für zukünftige Zeitpunkte bestimmen:

Für $t = 0$ müssen die Transaktionen ($A_{t_1}$, $A_{t_2}$ und $A_T$ mit den Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(0\leftarrow t_1)}$, $\hat{q}_{(0\leftarrow t_2)}$und $\hat{q}_{(0\leftarrow T)}$ abgezinst werden. Die Teilbarwerte für die Transaktionen werden dann addiert:

$$BW_0(A_{t_1}) = A_{t_1} \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow t_1)}$$
$$BW_0(A_{t_2}) = A_{t_2} \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow t_2)}$$
$$BW_0(A_T) = A_T \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow T)}$$

und

$$BW_0 = BW_0(A_{t_1}) + BW_0(A_{t_2}) + BW_0(A_T)$$

Für $t = t_1$ müssen die Transaktionen für die Zeitpunkte $t_2$ und $T$ ($A_{t_2}$ und $A_T$) mit den Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(t_1 \leftarrow t_2)}$und $\hat{q}_{(t_1 \leftarrow T)}$ abgezinst werden und werden danach addiert:

$$BW_{t_1}(A_{t_2}) = A_{t_2} \cdot \hat{q}_{(t_1 \leftarrow t_2)}$$
$$BW_{t_1}(A_T) = A_T \cdot \hat{q}_{(t_1 \leftarrow T)}$$

und

$$BW_{t_1} = BW_{t_1}(A_{t_2}) + BW_{t_1}(A_T)$$

Nun ist zu klären, wie die Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(t_1 \leftarrow t_2)}$, $\hat{q}_{(t_1 \leftarrow T)}$ und $\hat{q}_{(t_2 \leftarrow T)}$ aus den Nullkuponzinssätzen bzw. Aus den Nullkuponabzinsfaktoren zu bestimmen sind.

Exemplarisch betrachten wir die Ableitung des Abzinsfaktors $\hat{q}_{(t_1 \rightarrow t_2)}$. Als bekannt können wir die Abzinsfaktoren, die auf der Basis von $t = 0$ vorliegen, voraussetzen. Sie können direkt aus den Nullkuponzinssätzen der Nullkuponzinskurve von $t = 0$ abgeleitet werden:

$$q_{(0 \rightarrow t_1)} = (1 + i_{real}(0 \rightarrow t_1))^{t_1}$$
$$q_{(0 \rightarrow t_2)} = (1 + i_{real}(0 \rightarrow t_2))^{t_2}$$

Zuerst wird die Zahlung $A_{t_2}$ von $t = t_2$ auf den Moment $t = 0$ abgezinst. Damit erhält man den Barwert $BW_0$.

$$BW_0(A_{t_2}) = A_{t_2} \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow t_2)}$$

Setzt man den Wert der Zahlung auf den Wert 1 fest ($A_{t_2} = 1$), ergibt sich:

$$BW_0(A_{t_2} = 1) = 1 \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow t_2)} = \hat{q}_{(0 \leftarrow t_2)}$$

Der Wert $BW_0(A_{t_2} = 1)$ ist der Barwert einer Zahlung in $t = t_2$ im Umfang von 1 . Wird dieser Wert schrittweise aufgezinst, d.h. zunächst auf den Zeitpunkt $t_1$ mit dem bekannten Aufzinsfaktor $q_{(0 \rightarrow t_1)}$ und dann mit den noch unbekannten Aufzinsfaktor $q_{(t_1 \rightarrow t_2)}$, muss man wieder den Wert der Zahlung $A_{t_2} = 1$ erhalten:

$$
\begin{aligned}
BW_0(A_{t_2}) \cdot q_{(0\to t_1)} \cdot q_{(t_1\to t_2)} &= A_{t_2} \\
\hat{q}_{(0\leftarrow t_2)} \cdot q_{(0\to t_1)} \cdot q_{(t_1\to t_2)} &= 1 \\
\hat{q}_{(0\leftarrow t_2)} &= \hat{q}_{(0\leftarrow t_1)} \cdot \hat{q}_{(t_1\leftarrow t_2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&da \\
\hat{q}_{(0\leftarrow t_1)} &= \frac{1}{q_{(0\to t_1)}} \\
\hat{q}_{(0\leftarrow t_2)} &= \frac{1}{q_{(0\to t_2)}}
\end{aligned}
$$

woraus folgt:

$$
\hat{q}_{(t_1\leftarrow t_2)} = \frac{\hat{q}_{(0\leftarrow t_2)}}{\hat{q}_{(0\leftarrow t_1)}} \tag{1.4}
$$

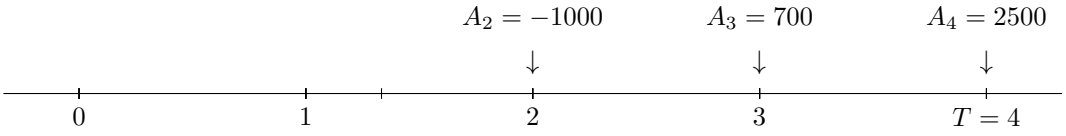
Der unbekannte Abzinsfaktor $\hat{q}_{(t_1\leftarrow t_2)}$ kann folglich aus den bekannten Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(0\leftarrow t_1)}$ und $\hat{q}_{(0\leftarrow t_2)}$ berechnet werden.

In analoger Weise können die beiden weiteren Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(t_1\to T)}$ und $\hat{q}_{(t_2\to T)}$ bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
\hat{q}_{(t_1\leftarrow T)} &= \frac{\hat{q}_{(0\leftarrow T)}}{\hat{q}_{(0\leftarrow t_1)}} \\
\hat{q}_{(t_2\leftarrow T)} &= \frac{\hat{q}_{(0\leftarrow T)}}{\hat{q}_{(0\leftarrow t_2)}}
\end{aligned}
$$

**Beispiel:** (aus dem Unterabschnitt 1.5.2)

Es soll nun der Barwert $BW_2$ zum Zeitpunkt $t = 2$ bestimmt werden.




$BW_2$

Der Barwert $BW_2$ kann mit Hilfe der Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(2\leftarrow 3)}$ und $\hat{q}_{(2\leftarrow 4)}$ bestimmt werden. Diese berechnen sich aus den schon bekannten Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(0\leftarrow 2)}$, $\hat{q}_{(0\leftarrow 3)}$ und $\hat{q}_{(0\leftarrow 4)}$.

$$
\begin{aligned}
\hat{q}_{(2\leftarrow 3)} &= \frac{\hat{q}_{(0\leftarrow 3)}}{\hat{q}_{(0\leftarrow 2)}} \\
\hat{q}_{(2\leftarrow 4)} &= \frac{\hat{q}_{(0\leftarrow 4)}}{\hat{q}_{(0\leftarrow 2)}}
\end{aligned}
$$

Die Nullkuponzinssätze und Abzinsfaktoren aus dem Unterabschnitt 1.5.2 betragen

| Restlaufzeit | Realzinssatz | Abzinsfaktoren |
|---|---|---|
| 1 Jahr | $0,0294$ | 0,9714 |
| 2 Jahre | $0,0391$ | 0,9262 |
| 3 Jahre | $0,0455$ | 0,8750 |
| 4 Jahre | $0,0489$ | 0,8262 |

Eingesetzt ergibt sich:

$$\hat{q}_{(2\leftarrow 3)} = \frac{\hat{q}_{(0\leftarrow 3)}}{\hat{q}_{(0\leftarrow 2)}} = \frac{0,8750}{0,9262} = 0,9447$$
$$\hat{q}_{(2\leftarrow 4)} = \frac{\hat{q}_{(0\leftarrow 4)}}{\hat{q}_{(0\leftarrow 2)}} = \frac{0,8262}{0,9262} = 0,8920$$

Der Barwert $BW_2$ berechnet sich:

$$BW_2 = BW_2(A_2) + BW_2(A_3) + BW_2(A_4)$$
$$BW_2 = A_2 + A_3 \cdot \hat{q}_{(2\leftarrow 3)} + A_4 \cdot \hat{q}_{(2\leftarrow 4)}$$
$$BW_2 = -1000 + 700 \cdot 0,9447 + 2500 \cdot 0,8920 = 1891,29$$

Damit beträgt der Barwert aller zukünftigen Zahlungen (inklusive die Auszahlung von 1000 EUR im Moment $t = 2$) im Zeitpunkt $t = 2$ 1891,29 EUR. Auch hier wurde die Auszahlung $A_2$ in die Berechnung des Barwertes mit einbezogen.

Alle zukünftigen Realzinsen und die Abzinsfaktoren sind in den nachfolgenden Tabellen dargestellt. Daraus lassen sich alle Barwerte für die Zeitpunkte $t = 0, 1, 2, 3, 4$ bestimmen:

**gegenwärtige und zukünftige Abzinsfaktoren**$\hat{q}_{(t_1\rightarrow t_2)}$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\hat{q}_{(0\leftarrow 1)}$ | $\hat{q}_{(0\leftarrow 2)}$ | $\hat{q}_{(0\leftarrow 3)}$ | $\hat{q}_{(0\leftarrow 4)}$ |
| 1 | | $\hat{q}_{(1\leftarrow 2)}$ | $\hat{q}_{(1\leftarrow 3)}$ | $\hat{q}_{(1\leftarrow 4)}$ |
| 2 | | | $\hat{q}_{(2\leftarrow 3)}$ | $\hat{q}_{(2\leftarrow 4)}$ |
| 3 | | | | $\hat{q}_{(3\leftarrow 4)}$ |

Und für das Beispiel:

**gegenwärtige und zukünftige Abzinsfaktoren** $\hat{q}_{(t_1\leftarrow t_2)}$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,9714 | 0,9262 | 0,8750 | 0,8262 |
| 1 | | 0,9534 | 0,9008 | 0,8505 |
| 2 | | | 0,9447 | 0,8920 |
| 3 | | | | 0,9442 |

**gegenwärtige und zukünftige Aufzinsfaktoren** $q_{(t_1\rightarrow t_2)}$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,0294 | 1,0797 | 1,1429 | 1,2103 |
| 1 | | 1,0489 | 1,1101 | 1,1757 |
| 2 | | | 1,0585 | 1,1211 |
| 3 | | | | 1,0591 |

Aus den zukünftigen Auf- oder Abzinsfaktoren bzw. den Nullkuponzinssätzen lassen sich die zukünftigen Zinssätze berechnen:

$$
\begin{aligned}
q_{(t_1 \to t_2)} &= (1 + i_{real}(t_1 \to t_2))^{t_2 - t_1} \\
(1 + i_{real}(t_1 \to t_2)) &= \sqrt[t_2 - t_1]{q_{(t_1 \to t_2)}} \\
i_{real}(t_1 \to t_2) &= \sqrt[t_2 - t_1]{q_{(t_1 \to t_2)}} - 1 \\
i_{real}(t_1 \to t_2) &= \sqrt[t_2 - t_1]{\frac{(1 + i_{real}(t_0 \to t_2))^{t_2}}{(1 + i_{real}(t_0 \to t_1))^{t_1}}} - 1
\end{aligned}
$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $i_{real}(0 \to 1)$ | $i_{real}(0 \to 2)$ | $i_{real}(0 \to 3)$ | $i_{real}(0 \to 4)$ |
| 1 | | $i_{real}(1 \to 2)$ | $i_{real}(1 \to 3)$ | $i_{real}(1 \to 4)$ |
| 2 | | | $i_{real}(2 \to 3)$ | $i_{real}(2 \to 4)$ |
| 3 | | | | $i_{real}(3 \to 4)$ |

Und für das Beispiel:

Exemplarisch für $i_{real}(2 \to 4)$ (zukünftiger Zinssatz für den Moment $t = 2$ mit einer Laufzeit von einem Jahr, also bis zum Zeitpunkt $t = 4$:

$$
\begin{aligned}
i_{real}(2 \to 4) &= \sqrt[4-2]{q_{(2 \to 4)}} - 1 = \sqrt[2]{1,1211} - 1 = 0,0588 \\
i_{real}(2 \to 4) &= \sqrt[4-2]{\frac{(1 + 0,0489)^4}{(1 + 0,0391)^2}} - 1 = \sqrt[2]{\frac{1,0489^4}{1,0391^2}} - 1 = 0,0588
\end{aligned}
$$

Alle zukünftigen Zinssätze sind in der folgenden Tabelle dargestellt:

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $0,0294$ | $0,0391$ | $0,0455$ | $0,0489$ |
| 1 | | $0,0489$ | $0,0536$ | $0,0554$ |
| 2 | | | $0,0585$ | $0,0588$ |
| 3 | | | | $0,0591$ |

Aus den zukünftigen und gegenwärtigen Abzinsfaktoren lassen sich alle weiteren Barwerte berechnen:

$$
\begin{aligned}
BW_1 &= BW_1(A_1) + BW_1(A_2) + BW_1(A_3) + BW_1(A_4) \\
BW_1 &= A_1 + A_2 \cdot \hat{q}_{(1 \leftarrow 2)} + A_3 \cdot \hat{q}_{(1 \leftarrow 3)} + A_4 \cdot \hat{q}_{(1 \leftarrow 4)} \\
BW_1 &= 0 - 1000 \cdot 0,9534 + 700 \cdot 0,9008 + 2500 \cdot 0,8505 = 1803,41
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
BW_3 &= BW_3(A_3) + BW_3(A_4) \\
BW_3 &= A_3 + A_4 \cdot \hat{q}_{(3 \leftarrow 4)} \\
BW_3 &= 700 + 2500 \cdot 0,9442 = 3060,50
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
BW_4 &= BW_4(A_4) \\
BW_4 &= A_4 \\
BW_4 &= 2500
\end{aligned}
$$

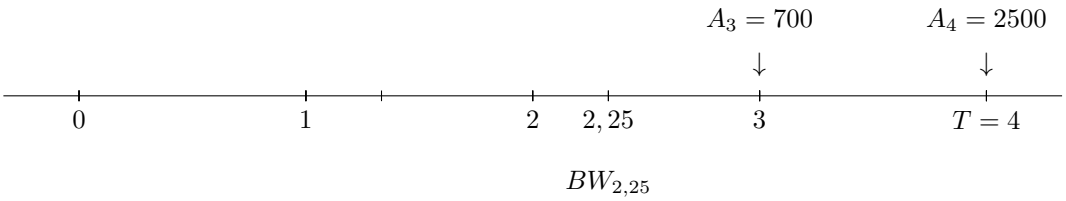
Damit erhalten wir unter Beachzung der schon vorher berechneten Barwerte $BW_0, BW_2$ folgende Barwerte für alle ganzjährigen Zeitpunkte:

| | *Barwerte* |
|---|---|
| $BW_0$ | 7237,48 |
| $BW_1$ | 1891,29 |
| $BW_2$ | 1803,41 |
| $BW_3$ | 3060,50 |
| $BW_4$ | 2500 |

Im nächsten Abschnitt gehen wir zur Barwertberechnung über, wenn die Berechnungszeitpunkte nicht mehr am Ende oder am Anfang der ganzjährigen Zinsperiode liegen, sondern beliebige nicht ganzzahlige Werte annehmen können.

### 1.5.5 Berechnung unterjähriger zukünftiger Nullkuponzinssätze und Abzinsfaktoren

Das Beispiel wird zunächst fortgesetzt. Es soll nun der Barwert $BW_{2,25}$, d.h. zum Zeitpunkt $t = 2,25$ oder am Ende des dritten Monats des Jahres 3, berechnet werden. Grafisch sind alle noch ausstehenden Transaktionen dargestellt:




Der Grafik ist zu entnehmen, dass zum Zeitpunkt $t = 2,25$ noch zwei ausstehende Zahlungen zu berücksichtigen sind: $A_3 = 700$ und $A_4 = 2500$. Die Zahlung $A_3 = 700$ erfolgt nach 9 Monaten oder 0,75 Jahren, die andere Zahlung $A_4 = 2500$ nach einem Jahr und 9 Monaten, gerechnet ab den Zeitpunkt $t = 2,25$. Um die beiden ausstehenden Zahlungen zur Barwertberechnung abzinsen zu können, werden die folgenden Abzinsfaktoren benötigt:

$$\hat{q}_{(2,25\leftarrow 3)}$$
$$\hat{q}_{(2,25\leftarrow 4)}$$

Der Logik der Berechnung der Abzinsfaktoren für ganzzahlige Berechnungszeitpunkte folgend (Unterabschnitt 1.5.4), muss zunächst im ersten Schritt die Zahlung $A_3 = 700$ mit Hilfe der Nullkuponabzinsfaktoren $A_3 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)}$ und dann von $t = 0$ zum Zeitpunkt $t = 2,25$ aufgezinst mit dem Aufzinsfaktor $q_{(0\rightarrow 2,25)}$ werden. Damit ergibt sich für den Abzinsfaktor $\hat{q}_{(2,25\leftarrow 3)}$:

$$\hat{q}_{(2,25\leftarrow 3)} = \frac{\hat{q}_{(0\leftarrow 3)}}{\hat{q}_{(0\leftarrow 2,25)}}$$

Analog gilt für den Abzinsfaktor $\hat{q}_{(2,25\leftarrow 4)}$:

$$\hat{q}_{(2,25\leftarrow 4)} = \frac{\hat{q}_{(0\leftarrow 4)}}{\hat{q}_{(0\leftarrow 2,25)}}$$

Aus dem Unterabschnitt 1.5.3 ist der interpolierte Jahreszinssatz $i_{real,RLZ=2,25} = 0,0407$ bekannt. Nach jetziger Notation ist $i_{real,RLZ=2,25} = i_{real}(0 \rightarrow 2,25)$, woraus sich ergibt:

$$\hat{q}_{(0\leftarrow 2,25)} = \frac{1}{[(1+i_{real}(0\rightarrow 2,25))^2]\cdot[1+\frac{(1+i_{real}(0\rightarrow 2,25))}{4}]}$$
$$\hat{q}_{(0\leftarrow 2,25)} = \frac{1}{[(1,0407)^2]\cdot[1+\frac{0,0407}{4}]} = 0,9140$$

oder näherungsweise:

$$\hat{q}_{(0\leftarrow 2,25)} = \frac{1}{(1+i_{real}(0\rightarrow 2,25))^{2,25}}$$
$$\hat{q}_{(0\leftarrow 2,25)} = \frac{1}{(1,0407)^{2,25}} = 0,9142$$

Daraus lässt sich nun der zukünftige Abzinsfaktor $\hat{q}_{(2,25\rightarrow 3)}$ bestimmen:

$$\hat{q}_{(2,25\leftarrow 3)} = \frac{\hat{q}_{(0\leftarrow 3)}}{\hat{q}_{(0\leftarrow 2,25)}}$$
$$\hat{q}_{(2,25\leftarrow 3)} = \frac{0,8750}{0,9140} = 0,9573$$

Der zukünftige Aufzinsfaktor $q_{(2,25\rightarrow 3)}$ ist gleich $\frac{1}{\hat{q}_{(2,25\leftarrow 3)}} = \frac{1}{0,9571} = 1,0448$
Der zugehörige künftige reale Zinssatz ergibt sich aus:

$$(1+i_{real}(t_1\rightarrow t_2))^{[t_2-t_1]} = q_{(t_1\rightarrow t_2)}$$
$$i_{real}(t_1\rightarrow t_2) = \sqrt[t_2-t_1]{q_{(t_1\rightarrow t_2)}} - 1$$
$$i_{real}(2,25\rightarrow 3) = \sqrt[3-2,25]{q_{(2,25\rightarrow 3)}} - 1$$
$$i_{real}(2,25\rightarrow 3) = \sqrt[0,75]{1,0448} - 1 = 0,0602$$

Analog ist für den Abzinsfaktor $\hat{q}_{(2,25\leftarrow 4)}$ zu verfahren:

$$\hat{q}_{(2,25\leftarrow 4)} = \frac{\hat{q}_{(0\leftarrow 4)}}{\hat{q}_{(0\leftarrow 2,25)}}$$

Die Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(0\leftarrow 4)}$ und $\hat{q}_{(0\leftarrow 2,25)}$ sind bekannt: Damit kann $\hat{q}_{(2,25\leftarrow 4)}$ berechnet werden:

$$\hat{q}_{(2,25\leftarrow 4)} = \frac{\hat{q}_{(0\leftarrow 4)}}{\hat{q}_{(0\leftarrow 2,25)}}$$
$$\hat{q}_{(2,25\leftarrow 4)} = \frac{0,8262}{0,9140} = 0,9039$$

Mit den beiden Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(2,25\leftarrow 3)}$ und $\hat{q}_{(2,25\leftarrow 4)}$ und den Zahlungen $A_3 = 700$ und $A_4 = 2500$ kann nun der Barwert $BW_{2,25}$ berechnet werden:

$$BW_{2,25} = A_3 \cdot \hat{q}_{(2,25\leftarrow 3)} + A_4 \cdot \hat{q}_{(2,25\leftarrow 4)}$$
$$BW_{2,25} = 700 \cdot 0,9573 + 2500 \cdot 0,9039 = 2929,96$$

Der Barwert beträgt 2929,96 EUR.

# Kapitel 2

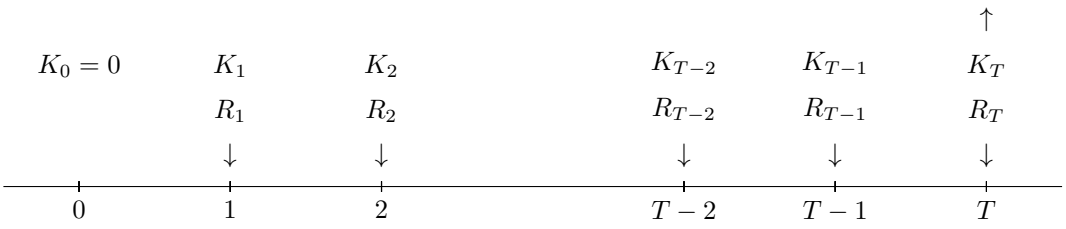
# End- und Barwert von einfachen Finanzprodukten

Das Bewertungskonzept mit Hilfe von Nullkuponzinssätzen bzw. Nullkuponabzinsfaktoren soll in diesem und den folgenden Abschnitt auf Finanzprodukte angewendet werden. Dabei greifen wir ebenfalls auf Elemente der Zinsrechnung der Renten- und Tilgungsrechnung zurück. Es werden End-und Barwerte berechnet, wobei nicht nur der gegenwärtige Zeitpunkt zur Bewertung herangezogen werden soll.

## 2.1 Sparprodukte

### 2.1.1 Sparpläne

Unter einem Sparplan soll ein Kapitalbildungsprozess verstanden werden, der durch regelmäßige konstante Einzahlungen (R) oder variabler Einzahlungen ($R_t$), die einem vorher fixierten Veränderungsmodus folgen. Der Kapitalbildungsprozess kann folgendermaßen dargestellt werden:




Hier handelt es sich um eine Rentenzahlung mit nachschüssigen Einzahlungen. Im nachschüssigen Fall beginnen die Einzahlungen im Zeitpunkt $t = 1$ und die letzte Einzahlung erfolgt am Ende der Laufzeit. wir werden folgende Fälle untersuchen, wobei wir uns immer auf nachschüssige Zahlungen beschränken:

1. Konstante jährliche Zahlungen bei gegebenen Jahreszinssatz (jedes Jahr, am Jahresende, erfolgt eine konstante Zahlung, die Zinsperiode ist 1 Jahr)

2. Konstante unterjährige Zahlungen bei gegebenen Jahreszinssatz (unterjährige konstante Einzahlungen bei einer Zinsperiode von einem Jahr)

3. Variable jährliche Zahlungen bei gegebenen Jahreszinssatz (jedes Jahr, am Jahresende, erfolgt eine variable Zahlung, die Zinsperiode ist 1 Jahr), Erhöhung des jährlichen Einzahlungsbetrag um eine konstante Größe oder einer konstanten Zuwachsrate

4. Konstante jährliche Zahlungen (jedes Jahr, am Jahresende, erfolgt eine konstante Zahlung, die Zinsperiode ist 1 Jahr), gleichzeitig erfolgt eine variable Verzinsung

**1. Sparpläne mit konstanter jährlicher Zahlung**:

Nach **??** werden Endwert $K_T$ mit Hilfe des Nominalzinsssatzes $i_{nom}$ berechnet.

$$K_T = R \cdot \frac{q_{nom}^T - 1}{q_{nom} - 1} = R \cdot \frac{((1 + i_{nom})^T - 1)}{i_{nom}}$$

Zum Abzinsen des Endwertes wurde im **??** ebenfalls der Nominalzinssatz verwendet:

$$BW_0 = K_T \cdot \frac{1}{q_{nom}^T} = K_T \cdot \frac{1}{((1 + i_{nom})^T - 1)}$$
$$BW_0 = R \cdot \frac{1}{(1 + i_{nom})^T - 1)} \cdot \frac{((1 + i_{nom})^T - 1)}{i_{nom}}$$

Verwendet man zum Diskontieren die Aufzinsfaktoren $q_{T,nom}$ bzw. die Abzinsfaktoren $\hat{q}_{T,nom} = \frac{1}{q_{T,nom}}$ bleiben die Marktzinsen unberücksichtigt. Korrekt wäre, jede Zahlung mit dem laufzeitabhängigen Nullkupon-Abzinsfaktor abzuzinsen. Das betrifft sowohl den Endwert $K_T$ als auch alle Ratenzahlungen $R$. Die Ratenzahlungen belasten den Sparer und werden mit einem negativen Vorzeichen versehen, der Endwert dagegen kann als Einnahme aufgefasst werden und erhält ein positives Vorzeichen. :

$$\begin{aligned} BW_0(R_1) &= -R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} \\ BW_0(R_2) &= -R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} \\ &... \\ BW_0(R_T) &= -R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)} \\ BW_0(K_T) &= K_T \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)} \end{aligned}$$

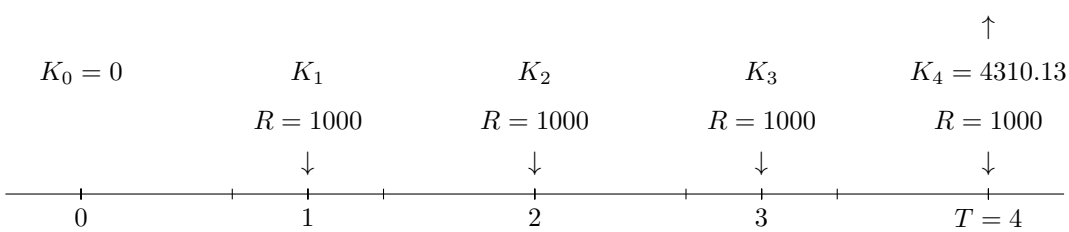
$$BW_0 = \sum_{t=1}^{T} BW_0(R_t) + BW_0(K_T) = -R \cdot \sum_{t=1}^{T} \hat{q}_{(0\leftarrow t)} + K_T \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)} \tag{2.1}$$

Der Barwert aller Zahlungen entspricht auch der Preisfunktion im Zeitpunkt $t = 0$

$$P(t=0) = \sum_{t=1}^{T} BW_0(R_t) + BW_0(K_T) = -R \cdot \sum_{t=1}^{T} \hat{q}_{(0\leftarrow t)} + K_T \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)} \tag{2.2}$$

**Beispiel:**

Ähnlich wie im Beispiel aus dem **??** wird am Ende jeden Jahres ein Betrag von 1000 EUR eingezahlt. Wir beschränken uns aber auf 4 Zahlungen, da wir die Nullkuponzinssätze und Abzinsfaktoren aus dem Unterabschnitt 1.5.2 nutzen werden. Die Zinsperiode beträgt 1 Jahr, gegeben ist der Jahreszinssatz von 5%. Zu berechnen ist der angesparte Betrag nach 4 Jahren und der Barwert $BW_0$:



Der angesparte Betrag ist gleich dem Rentenendwert und wird folgendermaßen berechnet:

$$K_T = R \cdot \frac{q_{nom}^T - 1}{q_{nom} - 1} = R \cdot \frac{((1 + i_{nom})^T - 1)}{i_{nom}}$$
$$K_4 = 1000 \cdot \frac{(1,05^4 - 1)}{0,05} = 4310,13$$

Der Sparplan erwirtschaftet in 4 Jahren 4310,13 EUR. Gleichzeitig wurden 4 Mal 1000 EUR zu unterschiedlichen Zeitpunkten eingezahlt. Zur Berechnung des Barwertes benötigen wir die Nullkuponzinssätze bzw. die Nullkupon-Abzinsfaktoren aus dem Unterabschnitt 1.5.2.

| Restlaufzeit | Nullkuponzinssatz | Abzinsfaktoren |
|---|---|---|
| 1 Jahr | $0,0294$ | 0,9714 |
| 2 Jahre | $0,0391$ | 0,9262 |
| 3 Jahre | $0,0455$ | 0,8750 |
| 4 Jahre | $0,0489$ | 0,8262 |

Jeder der Zahlungen und der Endwert des Sparplans wird mit den laufzeitabhängigen Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(0\leftarrow t)}$ mit $t = 1, 2, 3, 4$ abgezinst. Wie oben beschrieben werden die Ratenzahlungen mit einem negativen Vorzeichen versehen:

$$BW_0(R_1) = -R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} = -1000 \cdot 0,9714 = -971,40$$
$$BW_0(R_2) = -R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} = -1000 \cdot 0,9262 = -926,20$$
$$BW_0(R_3) = -R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} = -1000 \cdot 0,8750 = -875,00$$
$$BW_0(R_4) = -R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = -1000 \cdot 0,8262 = -826,20$$
$$BW_0(K_4) = K_4 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = 4310,13 \cdot 0,8262 = 3561,03$$

Die Barwerte jeder Zahlung sind zu addieren:

$$BW_0 = BW_0(R_1) + BW_0(R_2) + BW_0(R_3) + BW_0(R_4) + BW_0(K_4) =$$
$$= -971,40 - 926,20 - 875,00 - 826,20 + 3561,03 = -37,77$$

Der Barwert $BW_0$, der mit Hilfe der Nullkuponzinssätze berechnet wurde, beträgt -37,77 EUR.

Zum gleichen Resultat kommt man, wenn man die Ratenzahlungen zu Marktbedingungen statt mit dem Nominalzinssatz anlegt. Dazu müssen die zukünftige Aufzinsfaktoren aus dem Unterabschnitt 1.5.4 genutzt werden:

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $1,0294$ | $1,0797$ | $1,1429$ | $1,2103$ |
| 1 | | $1,0489$ | $1,1101$ | **1,1757** |
| 2 | | | $1,0585$ | **1,1211** |
| 3 | | | | **1,0591** |

Unter Verwendung der Aufzinsfaktoren ergeben sich folgende akkumulierte Werte, wenn die Rate R zum Fälligkeitstermin für 3, 2, 1 Jahre marktkonform angelegt werden:

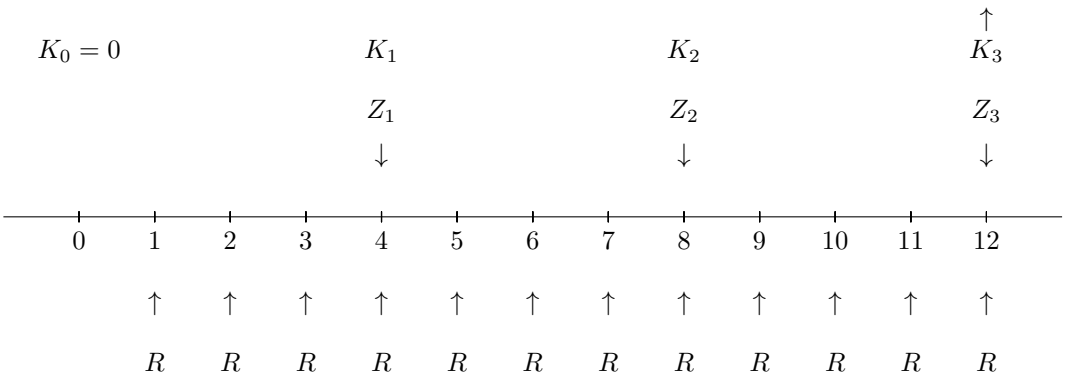
1.Zahlung: 1000 EUR werden zu Marktbedingungen 3 Jahre angelegt: $1000 \cdot 1,1757 = 1175,70$
2.Zahlung: 1000 EUR werden zu Marktbedingungen 2 Jahre angelegt: $1000 \cdot 1,1211 = 1121,10$
3.Zahlung: 1000 EUR werden zu Marktbedingungen 1 Jahr angelegt: $1000 \cdot 1,0591 = 1059,10$
4.Zahlung: 1000 EUR werden nicht angelegt, nur zum Zeitpunkt $T = 4$ eingezahlt: 1000,00

Diese Zahlungen (nicht verzinst mit dem Nominalzinssatz, sondern mit den Marktzinssätzen) erwirtschaften $(1175,70+1121,10+1059,10+1000,00 = 4355,90)$ einen höheren Betrag als der Sparplan (4310,13 EUR), obwohl die Leistungen (4 Zahlungen von 1000 EUR am Jahresende) identisch sind. Die Differenz beträgt $4310,13-4355,90 = -45,77$ , d.h. der Sparplan erwirtschaftet 45,77 EUR weniger als eine marktkonforme Anlage (immer aus Sicht vom Zeitpunkt $t = 0$). Der Barwert der Differenz von 45,77 ergibt -37,81 bis auf einige cents den gleichen Barwert wie oben berechnet.

**2. Konstante unterjährige Zahlungen bei gegebenen Jahreszinssatz**

Ein entsprechendes Beispiel wurde ausführlich im **??** besprochen:

Die Zinsperiode beträgt ein Jahr, gegeben ist folglich ein Jahreszinssatz $i$. Die Ratenzahlungen erfolgen unterjährig. Ein Jahr besteht aus m Zinsperioden. Die Raten werden nachschüssig gezahlt. Illustriert werden soll der Zahlungs und Verzinsungsverlauf an einem Beispiel mit vierteljährigen Ratenzahlungen $R = 1000$ EUR und 3 jähriger Laufzeit, $i = 5\%$.




Dabei bezeichnen:

| | |
|---|---|
| $K_t$ | Kapital am Ende der Zinsperiode t, t=1,2,3 |
| $Z_t$ | Zinsen für die Zinsperiode t, t=1,2,3 |
| $R$ | Vierteljahresraten |

Das angesparte Kapital (Endwert der Rente) wurde im **??** berechnet und beträgt $K_{12} = 12846,44$ EUR. Nun soll der Barwert auf Basis der Nullkuponzinsen berechnet werden. Wieder sind alle Zahlungen mit Hilfe der Abzinsfaktoren abzuzinsen. Dazu benötigen wir die unterjährigen Nullkuponzinssätze. Vergl. dazu Unterabschnitt 1.5.3. Da nur die Nullkuponzinssätze für ganzzahlige Berechnungszeitpunkte vorliegen, müssen die unterjährigen Nullkuponzinssätze interpoliert werden:

$$i_{real}(0 \to t) = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \cdot i_{real}(0 \to t_1) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \cdot i_{real}(0 \to t_2)$$

Aus zwei benachbarten Nullkuponzinssätzen $i_{real}(0 \to t_1)$ und $i_{real}(0 \to t_2)$ soll ein Zinssatz mit einer Restlaufzeit t aus dem Intervall $[t_1, t_2]$ generiert werden. Dazu wird das Intervall $[t_1, t_2]$ in zwei Teilintervalle zerlegt: $[t_1, t]$ und $[1, t_2]$.

In unserem Beispiel werden mit Hilfe der Nullkuponzinssätze $i_{real}(0 \to 4)$, $i_{real}(0 \to 8)$ und $i_{real}(0 \to 12)$ die unterjährigen Zinsssätze interpoliert. Für die unterjährigen Zinssätze des ersten Jahres ist eine Interpolation nicht nötig, sie können direkt aus dem Nullkuponzinssatz $i_{real}(0 \to 4)$ abgleitet werden:

$$
\begin{aligned}
i_{real}(0 \to 1) &= i_{real}(0 \to 4) \cdot \frac{1}{4} = 0,0294 \cdot \frac{1}{4} = 0,0074 \\
i_{real}(0 \to 2) &= i_{real}(0 \to 4) \cdot \frac{2}{4} = 0,0294 \cdot \frac{2}{4} = 0,0147 \\
i_{real}(0 \to 3) &= i_{real}(0 \to 4) \cdot \frac{3}{4} = 0,0294 \cdot \frac{3}{4} = 0,0220 \\
i_{real}(0 \to 4) &= i_{real}(0 \to 4) = 0,0294 \\
i_{real}(0 \to 5) &= \frac{3}{4} \cdot i_{real}(0 \to 4) + \frac{1}{4} \cdot i_{real}(0 \to 8) = 0,75 \cdot 0,0294 + 0,25 \cdot 0,0391 = 0,0318 \\
i_{real}(0 \to 6) &= \frac{2}{4} \cdot i_{real}(0 \to 4) + \frac{2}{4} \cdot i_{real}(0 \to 8) = 0,5 \cdot 0,0294 + 0,5 \cdot 0,0391 = 0,0343 \\
i_{real}(0 \to 7) &= \frac{1}{4} \cdot i_{real}(0 \to 4) + \frac{3}{4} \cdot i_{real}(0 \to 8) = 0,25 \cdot 0,0294 + 0,75 \cdot 0,0391 = 0,0367 \\
i_{real}(0 \to 8) &= i_{real}(0 \to 8) = 0,0391 \\
i_{real}(0 \to 9) &= \frac{3}{4} \cdot i_{real}(0 \to 8) + \frac{1}{4} \cdot i_{real}(0 \to 12) = 0,75 \cdot 0,0391 + 0,25 \cdot 0,0455 = 0,0407 \\
i_{real}(0 \to 10) &= \frac{2}{4} \cdot i_{real}(0 \to 8) + \frac{2}{4} \cdot i_{real}(0 \to 12) = 0,5 \cdot 0,0391 + 0,5 \cdot 0,0455 = 0,0423 \\
i_{real}(0 \to 11) &= \frac{1}{4} \cdot i_{real}(0 \to 8) + \frac{3}{4} \cdot i_{real}(0 \to 12) = 0,25 \cdot 0,0391 + 0,75 \cdot 0,0455 = 0,0439 \\
i_{real}(0 \to 12) &= i_{real}(0 \to 12) = 0,0455
\end{aligned}
$$

Aus den Nullkuponzinsen können die Nullkupon-Abzinsfaktoren berechnet werden.Für die Zeitpunkte 1 bis 4 gilt:

$$
\begin{aligned}
\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 1)} &= \frac{1}{(1 + i_{real}(0 \to 1))} = \frac{1}{1,0074} = 0,9927 \\
\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 2)} &= \frac{1}{(1 + i_{real}(0 \to 2))} = \frac{1}{1,0147} = 0,9855 \\
\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 3)} &= \frac{1}{(1 + i_{real}(0 \to 3))} = \frac{1}{1,0220} = 0,9785 \\
\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 4)} &= \frac{1}{(1 + i_{real}(0 \to 4))} = \frac{1}{1,0294} = 0,9714
\end{aligned}
$$

Für die Zeitpunkte des zweiten Jahres (5 bis 8) gilt:

$$
\begin{aligned}
\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 5)} &= \frac{1}{(1 + i_{real}(0 \to 5)) \cdot (1 + i_{real}(0 \to 5) \cdot \frac{1}{4})} = \frac{1}{1,0318 \cdot (1 + 0,0318 \cdot \frac{1}{4})} = 0,9615 \\
\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 6)} &= \frac{1}{(1 + i_{real}(0 \to 6)) \cdot (1 + i_{real}(0 \to 6) \cdot \frac{2}{4})} = \frac{1}{1,0343 \cdot (1 + 0,0343 \cdot \frac{1}{2})} = 0,9505 \\
\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 7)} &= \frac{1}{(1 + i_{real}(0 \to 7)) \cdot (1 + i_{real}(0 \to 7) \cdot \frac{3}{4})} = \frac{1}{1,0367 \cdot (1 + 0,0367 \cdot \frac{3}{4})} = 0,9388 \\
\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 8)} &= \frac{1}{(1 + i_{real}(0 \to 8))^2} = \frac{1}{1,0455^2} = 0,9262
\end{aligned}
$$

Für das 3. Jahr erhält man

$$\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 9)} = \frac{1}{(1+i_{real}(0\to 9))^2 \cdot (1+i_{real}(0\to 9)\cdot\frac{1}{4})} = \frac{1}{1,0407^2 \cdot (1+0,0407\cdot\frac{1}{4})} = 0,9140$$
$$\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 10)} = \frac{1}{(1+i_{real}(0\to 10))^2 \cdot (1+i_{real}(0\to 10)\cdot\frac{2}{4})} = \frac{1}{1,0423^2 \cdot (1+0,0423\cdot\frac{1}{2})} = 0,9014$$
$$\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 11)} = \frac{1}{(1+i_{real}(0\to 11))^2 \cdot (1+i_{real}(0\to 11)\cdot\frac{3}{4})} = \frac{1}{1,0439^2 \cdot (1+0,0439\cdot\frac{3}{4})} = 0,8884$$
$$\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 12)} = \frac{1}{(1+i_{real}(0\to 12))^3} = \frac{1}{1,0318^3} = 0,8750$$

Zusammengefasst liegen folgende unterjährigen Abzinsfaktoren vor:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 8 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,9927 | 0,9855 | 0,9785 | 0,9714 | 0,9615 | 0,9505 | 0,9388 | 0,9262 | 0,9140 | 0,9014 | 0,8884 | 0,8750 |

Nun kann die Bewertung jede einzelnen Zahlung vorgenommen werden. Die Ratenzahlungen werden wiederum mit negativem Vorzeichen versehen.:

$$BW_0(R_1) = -R\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 1)} = -1000\cdot 0,9927 = -992,7$$
$$BW_0(R_2) = -R\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 2)} = -1000\cdot 0,9855 = -985,5$$
$$BW_0(R_3) = -R\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 3)} = -1000\cdot 0,9785 = -978,5$$
$$BW_0(R_4) = -R\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = -1000\cdot 0,9714 = -971,4$$
$$BW_0(R_5) = -R\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 5)} = -1000\cdot 0,9615 = -961,5$$
$$BW_0(R_6) = -R\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 6)} = -1000\cdot 0,9505 = -950,5$$
$$BW_0(R_7) = -R\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 7)} = -1000\cdot 0,9388 = -938,8$$
$$BW_0(R_8) = -R\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 8)} = -1000\cdot 0,9262 = -926,2$$
$$BW_0(R_9) = -R\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 9)} = -1000\cdot 0,9140 = -914,0$$
$$BW_0(R_{10}) = -R\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 10)} = -1000\cdot 0,9014 = -901,4$$
$$BW_0(R_{11}) = -R\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 11)} = -1000\cdot 0,8884 = -888,4$$
$$BW_0(R_{12}) = -R\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 12)} = -1000\cdot 0,8750 = -875,0$$
$$BW_0(K_{12}) = K_12\cdot\hat{q}_{(0\leftarrow 12)} = 12846,44\cdot 0,8750 = 11240,64$$

Die Barwerte jeder Zahlung sind zu addieren.

$$BW_0 = \sum_{t=1}^{12} BW_0(R_t) + BW_0(K_{12}) = -11283,90 + 11240,64 = -43,26$$

Der Barwert des Sparplanes zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt -43,26 EUR.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass der Barwert identisch dem Wert der Preisfunktion im Zeitpunkt $t = 0$ ist:

$$P_0 = BW_0 = \sum_{t=1}^{12} BW_0(R_t) + BW_0(K_{12}) = -11283,90 + 11240,64 = -43,26$$

Allgemein kann formuliert werden, wenn die Anzahl der Zinsperioden gleich n und die Anzahl der Ratenzahlungen innerhalb einer Zinsperiode gleich m sind.

$$BW_0 = \sum_{t=1}^{n\cdot m} BW_0(R_t) + BW_0(K_{n\cdot m}) = -R \cdot \sum_{t=1}^{n\cdot m} \hat{q}_{(0\leftarrow t)} + K_{n\cdot m} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow n\cdot m)} \tag{2.3}$$

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n\cdot m} BW_0(R_t) + BW_0(K_{n\cdot m}) = -R \cdot \sum_{t=1}^{n\cdot m} \hat{q}_{(0\leftarrow t)} + K_{n\cdot m} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow n\cdot m)} \tag{2.4}$$

**3. Variable jährliche Zahlungen bei gegebenen Jahreszinssatz**:

Dieser Sparplan unterscheidet sich von konstanten Jahresrenten bei gegebenen Jahreszinssatz nur dadurch, dass die Ratenzahlung nicht mehr konstant ist, sondern sich gemäß einer fest fixierten Regel ständig verändert. Wir beschränken uns hier auf einen konstanten Zuwachs gegenüber der vorherigen Einzahlung. Das obige Beispiel (4 jährliche Einzahlungen von 1000 EUR am Jahresende bei gegebenen Jahreszinssatz) wird dahin gehend modifiziert, dass nun jedes Jahr die Einzahlung um 100 EUR wächst.

Zur Barwertberechnung sind die variablen Höhen der Einzahlungen zu berücksichtigen. Sie haben Einfluss auf den Endwert des Sparplanes und auf die Barwerte der einzelnen Zahlungen:

$$K_4 = 1000 \cdot 1,05^3 + 1100 \cdot 1,05^2 + 1200 \cdot 1,05 + 1300 = 4930,38$$

Jeder der Zahlungen wird mit den laufzeitabhängigen Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(0\leftarrow t)}$ mit $t = 1, 2, 3, 4$ abgezinst. Die Abzinsfaktoren sind identisch mit den Abzinsfaktoren bei konstanten Einzahlungen

$$\begin{aligned}
BW_0(R_1) &= -R_1 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} = -1000 \cdot 0,9714 = -971,40 \\
BW_0(R_2) &= -R_2 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} = -1100 \cdot 0,9262 = -1018,82 \\
BW_0(R_3) &= -R_3 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} = -1200 \cdot 0,8750 = -1050,00 \\
BW_0(R_4) &= -R_4 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = -1300 \cdot 0,8262 = -1074,06 \\
BW_0(K_4) &= K_4 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = 4930,38 \cdot 0,8262 = 4073,48
\end{aligned}$$

Die Barwerte jeder Zahlung sind zu addieren:

$$BW_0 = BW_0(R_1) + BW_0(R_2) + BW_0(R_3) + BW_0(R_4) + BW_0(K_4) = -4114,28 + 4073,48 = -40,80$$

Der Wert der Preisfunktion im Zeitpunkt $t = 0$ ist identisch dem Barwert $BW_0$.

$$P_0 = BW_0 = BW_0(R_1) + BW_0(R_2) + BW_0(R_3) + BW_0(R_4) + BW_0(K_4) = -4114,28 + 4073,48 = -40,80$$

In analoger Weise ist bei anderen Bildungsgesetzen zur Modifikation der Einzahlungen, so z.B. bei exponentiellen Wachstumsprozessen, zu verfahren. In diesem Zusammenhang soll auf dem **??** verwiesen. Die im Anhang **??** hergeleiteten Formeln sind nicht zu verwenden, da wir im Unterschied zum dortigen Vorgehen (Diskontieren auf der Grundlage von Nominalzinssätzen) jetzt laufzeitabhängige Nullkuponzinssätze zum Diskontieren verwenden.

**4. Konstante unterjährige Zahlungen mit variabler Verzinsung**

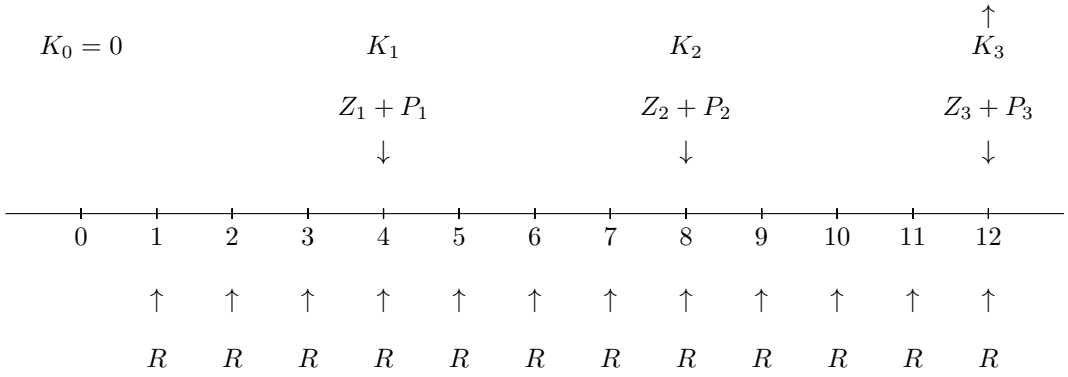
Es existieren viele Modifikationen von Sparplänen, die Varianten mit variabler Verzinsung anbieten. Hier soll exemplarisch das sogenannte Prämiensparen. Dabei erfolgt am Ende der jeweiligen Zinsperiode eine Prämienzahlung, die sich auf die Einzahlungen des laufenden Jahres beziehen und deren Höhe jährlich steigt. Das Beispiel dieses Abschnittes zu unterjährigen Zahlung wird entsprechend modifiziert:

1. am Ende des ersten Jahres werden 5% der im Jahr getätigten Einzahlungen als Prämie den Zinsen zugeschlagen.

2. am Ende des zweiten Jahres werden 10% der im Jahr getätigten Einzahlungen als Prämie den Zinsen zugeschlagen.

3. am Ende des dritten Jahres werden 15% der im Jahr getätigten Einzahlungen als Prämie den Zinsen zugeschlagen.

Damit sind folgende Zahlungen zu leisten:




Dabei bezeichnen:

| | |
|---|---|
| $K_t$ | Kapital am Ende der Zinsperiode t, t=1,2,3 |
| $Z_t$ | Zinsen für die Zinsperiode t, t=1,2,3 |
| $P_t$ | Prämie für die Zinsperiode t, t=1,2,3 |
| $R$ | Vierteljahresraten |

Man erhält folgende unregelmäßigen Zahlungen:

$$\begin{aligned}
R_1 &= 1000 \\
R_2 &= 1000 \\
R_3 &= 1000 \\
R_4 + P_1 &= 1200 \\
R_5 &= 1000 \\
R_6 &= 1000 \\
R_7 &= 1000 \\
R_8 + P_2 &= 1400 \\
R_9 &= 1000 \\
R_10 &= 1000 \\
R_11 &= 1000 \\
R_12 + P_3 &= 1600
\end{aligned}$$

Zur Barwertberechnung werden die schon berechneten Nullkuponzinssätze bzw. die Nullkuponabzinsfaktoren verwendet und damit die Barwerte der Einzahlungen $BW_0(R_t)$ berechnet. Da sich nur $R_4$, $R_8$ und $R_12$ gegenüber dem Beispiel zur unterjährigen Einzahlungen ändern, müssen nur 3 Teilbarwerte neu berechnet werden. Dazu betrachten wir die Prämienzahlungen und bestimmen deren Barwerte :

(a) die abgezinsten Prämienzahlungen $BW_0^*(P_t)$:

$$
\begin{aligned}
BW_0^*(P_1) &= -P_1 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} = -200 \cdot 0,9714 = -194,28 \\
BW_0^*(P_2) &= -P_2 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} = -400 \cdot 0,9262 = -370,48 \\
BW_0^*(P_3) &= -P_3 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} = -600 \cdot 0,8750 = -525,00 \\
BW_0^*(P) &= BW_0^*(P_1) + BW_0^*(P_2) + BW_0^*(P_3) = -194,28 - 370,48 - 525,00 = -1089,76
\end{aligned}
$$

(b) der Endwert der Prämienzahlungen $EW$ und der abgezinsten Endwert der Prämienzahlungen $BW_0^*(EW)$:

$$
\begin{aligned}
EW &= P_1 \cdot (1+i_{nom})^2 + P_2 \cdot (1+i_{nom}) + P_3 = 200 \cdot 1,05^2 + 400 \cdot 1,05 + 600 = 1240,50 \\
BW_0^*(EW) &= EW \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} = 1240,50 \cdot 0,8750 = 1085,44
\end{aligned}
$$

(c) der Barwert der Prämienzahlungen $BW_0(P)$:

$$
BW_0(P) = BW_0^*(P) + BW_0^*(EW) = -1089,76 + 1085,44 = -4,32
$$

Der Barwert des Beispiels 3 (Variable jährliche Zahlungen bei gegebenen Jahreszinssatz) ist nun um den Barwert der Prämienzahlung zu erweitern:

$$
BW_0 = -43,26 - 4,32 = -47,58
$$

Der Barwert bei diesem Prämiensparmodell ist um 4,32 EUR niedriger als bei konstanten Einzahlungen und beträgt -47,58 EUR .

Preisfunktion $P_0$ und Barwert $BW_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ im Prämiensparmodell lauten:

$$
\begin{aligned}
P_0 = BW_0 &= \sum_{t=1}^{12} BW_0(R_t) + BW_0(K_{12}) + BW_0^*(P) + BW_0^*(EW) = \\
&= -11283,90 + 11240,64 - 1089,76 + 1085,44 = -47,58
\end{aligned}
$$

### 2.1.2 Festgeld

Festgeld ist ein einfaches Finanzprodukt, dass in unterschiedlichen Ausprägungen existiert. Ein fester Geldbetrag wird zu einer festgelegten Laufzeit verzinst. Am Ende der Laufzeit wird der angelegte Geldbetrag zurückgezahlt. Entweder erfolgt die Zinszahlung am Ende der Laufzeit oder am Ende jeder Zinsperiode. Die Zinsperiode ist in der Regel 1 Jahr, kann aber auch unterjährig festgelegt werden. Der periodenspezifische Zinssatz kann fix oder variabel sein.

Wir beschränken uns auf den einfachen Fall: Zinsperiode 1 Jahr, fixer Zinssatz, Zinszahlungstermin ist am Ende der Laufzeit. Der Endwert einer solchen Festgeldanlage kann einfach berechnet werden:

$$K_T = K_0 \cdot (1 + i_{nom})^T$$

Zur Barwertberechnung ist der Endwert mit dem Nullkupon-Abzinsfaktor $\hat{q}_{(0\leftarrow T)}$ abzuzinsen:

$$BW_0 = K_T \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)}$$

Beispiel:

Nominalwert (Einzahlungsbetrag) $K_0 = 10000$ EUR
Nominalzinssatz $i_{nom} = 5\%$
Laufzeit = 4 Jahre Nullkuponzinssatz mit Restlaufzeit von 4 Jahren $(1 + i_{real}(0 \rightarrow 4)) = 0{,}0489$
Nullkuponabzinsfaktor mit Restlaufzeit von 4 Jahren $\hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = 0{,}8262$

$$K_4 = 10000 \cdot 1,05^4 = 12155,06$$
$$BW_0 = 12155,06 \cdot 0,8262 = 10042,51$$

Der Barwert beträgt damit 10042,51 EUR und ist größer als der Nominalbetrag. Da der reale Zinssatz mit einer Restlaufzeit von 4 Jahren zum Zeitpunkt $t = 0$ ($4,89\%$ geringer ist als der Nominalzinssatz der Festgeldanlage ($5\%$), sind die Bedingungen der Festgeldanlage zum Zeitpunkt $t = 0$ besser als marktüblich.

Es ist auch eine andere Betrachtungsweise möglich. Streng genommen finden 2 Zahlungen statt: eine Einzahlung von 10000 EUR im Zeitpunkt $t = 0$ und eine Auszahlung Von 12155,06 EUR im Zeitpunkt $t = 4$. Um diese Finanzströme zu bewerten, bilden wir die sogenannte **Preisfunktion**, die ausschließlich den Ertrag des Finanzproduktes berücksichtigt. Aus Sicht des Sparers haben beide Zahlungen unterschiedliches Vorzeichen: Überlassung eines Geldbetrages mit negativem Vorzeichen (-10000 EUR), Erhalten eines Geldbetrages (+12155,06 EUR). Die Preisfunktion bildet die abgezinsten Beträge beider Zahlungen. Dabei ist zu beachten, dass der Betrag von 10000 EUR nicht abzuzinsen ist, da sich Barwert und Eiznahlung auf den gleichen Zeitpunkt beziehen.

Die folgende Grafik zeigt die Finanzstöme:




Die Preisfunktion $P(0)$ lautet:

$$P(0) = -K_0 + K_4 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)}$$
$$P(0) = -10000 + 12155,06 \cdot 0,8262 = -10000 + 10042,51 = 42,51$$

Die Interpretation ist ähnlich der des Barwertes $BW_0$ der Auszahlung: Der positive Betrag weist darauf hin, dass durch die Festgeldanlage mehr verdient wird, als es die Marktbedingungen im Zeitpunkt $t = 0$) erwarten lassen.

Die Preisfunktion für die Sparpläne im Unterabschnitt 2.1.1 ist mit dem Barwert $BW_0$ identisch, da im Zeitpunkt $t = 0$) keine Einzahlungen erfolgen ($K_0 = 0$).

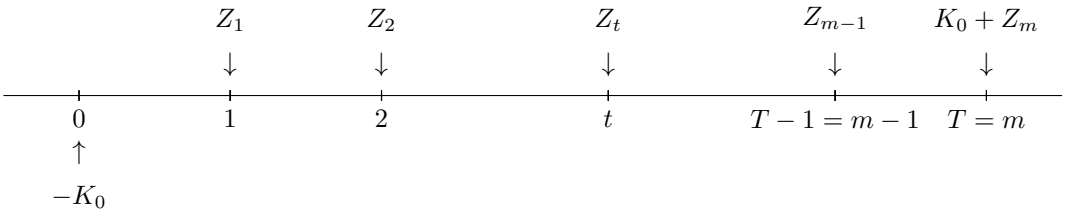
## 2.2 Kredite

Gegenstand dieses Abschnittes ist die Barwertberechnung und die Bestimmung der Preisfunktion von unterschiedlichen Formen eines Kredites. Der Kreditnehmer erhält im Zeitpunkt $t = 0$ von einem Kreditinstitut einen Geldbetrag $K_0$ und verpflichtet sich diese Schuld bis zum Ende der Laufzeit mit aufgelaufenen Zinsen zurück zu zahlen. Dabei kommen unterschiedliche Verfahren zur Anwendung, die z.T. schon im Kapitel Tilgungsrechnung (**??**) vorgestellt wurden.

### 2.2.1 Zinsschuld

Wird am Ende der Laufzeit der Überlassungsbetrag vollständig zurückgezahlt, während am Ende jeder Zinsperiode die Zinsen zu entrichten sind spricht man von einer **Zinsschuld** oder einer **Zinsanleihe**. Die Tilgung erfolgt am Ende der Laufzeit. Insgesamt sind bis zum Ende der Laufzeit T genau m Zahlungen zu erfolgen, Die Finanzströme sind in der folgenden Grafik dargestellt. Dabei werden die Zahlungen, die der Kreditgeber vorzunehmen hat mit positiven Vorzeichen versehen, während der erhaltene Betrag ($K_0$) ein negatives Vorzeichen erhält. Das wäre aus der Sicht des Kreditgebers (des Finanzinstitutes). Aus der Sicht des Kunden sähe es umgekehrt aus: Das Kreditinstitut zahlt den Überlassungsbetrag (positives Vorzeichen) und erhält Zinsen und Tilgung (negatives Vorzeichen). Im weiteren nehmen wir immer die Position des Kreditinstitutes (hier des Kreditgebers) ein.

Grafisch erggibt sich folgendes Bild:




Der Barwert der ausstehen Zahlungen des Kunden (Kreditnehmer) im Zeitpunkt $t = 0$ ergibt sich als Summe der abgezinsten Zinsbeträge mit dem Nullkuponzinssätzen bzw. Nullkuponabzinsfaktoren. Die Höhe der Zinszahlungen selbst wird dagegen mit dem Nominalzinssatz berechnet:

$$Z_t = K_0 \cdot i_{nom}$$
$$BW_0 = \sum_{t=1}^{m} BW_0(Z_t) + K_0 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow m)}$$

$$BW_0 = \sum_{t=1}^{m} Z_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} + K_0 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow m)} \tag{2.5}$$

Die Preisfunktion hat folgende Form:

$$P(0) = -K_0 + BW_0 = -K_0 + \sum_{t=1}^{m} Z_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} + K_0 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow m)} \tag{2.6}$$

**Beispiel:**

Eine Zinsschuld von 20000 EUR wird mit einem Jahreszinssatz von 5% verzinst. Die Laufzeit des Kredites beträgt 4 Jahre. Die Zinsen werden am Ende der Zinsperiode, am Ende des Jahres, ausgezahlt. Die Zinszahlungen erfolgen nachschüssig. Die jährlichen Zinsen sind konstant und belaufen sich auf $0,05 \cdot 20000$ EUR = 1000 EUR. Jede der Zinszahlungen ist mit den Nullkupon-Abzinsfaktoren abzuzinsen, ebenso der Nominalbetrag $K_0$, der am Ende der Laufzeit zurückgezahlt wird:

$$\begin{aligned}
BW_0(Z_1) &= Z_1 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} = 1000 \cdot 0,9714 = 9714,40 \\
BW_0(Z_2) &= Z_2 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} = 1000 \cdot 0,9262 = 9262,20 \\
BW_0(Z_3) &= Z_3 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} = 1000 \cdot 0,8750 = 8750,00 \\
BW_0(Z_4) &= Z_4 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = 1000 \cdot 0,8262 = 8250,00 \\
BW_0(K_0) &= K_0 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = 20000 \cdot 0,8262 = 16524,00
\end{aligned}$$

Die Barwerte jeder Zahlung sind zu addieren:

$$\begin{aligned}
BW_0 &= BW_0(R_1) + BW_0(R_2) + BW_0(R_3) + BW_0(R_4) + BW_0(K_0) = \\
&= 971,40 + 926,20 + 875,00 + 825,00 + 16524,00 = 20121,6
\end{aligned}$$

Der Barwert $BW_0$ aller Zahlungen des Kreditnehmers, der mit Hilfe der Nullkuponzinssätze berechnet wurde, beträgt 20121,60 EUR. Nicht berücksichtigt wurde, dass der Kreditnehmer zum Zeitpunkt $t = 0$ die Kreditsumme $K_0$ ausgezahlt wurde. Der Barwert aller Zahlungen, auch die der Kreditsaumme wird in der Preisfunktion $P_0$ berücksichtigt:

$$\begin{aligned}
P(0) &= -K_0 + BW_0 = -K_0 + \sum_{t=1}^{T} Z_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} + K_0 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)} \\
P(0) &= -20000 + 20121,60 = 121,60
\end{aligned}$$

Aus der Sicht des Kreditgebers erwirtschaften seine Zahlungen (Zinsen + Rückzahlung der Kreditsumme - abgezinst zum Zeitpunkt $t = 0$) geringfügig mehr als die zum Zeitpunkt $t = 0$ ausgezahlte Kreditsumme , wenn die Marktbedingungen zum Zeitpunkt $t = 0$ herangezogen werden.

Es lässt sich eben falls der Barwert des Finanzproduktes für den Zeitpunkt $t = 3$ bestimmen. Der Bewertungszeitraum ist nach wie vor der Zeitpunkt $t = 0$. Es stehen dann noch 2 Zahlungen aus: die Zinsen für die dritte Zinsperiode und die Abschlusszahlung von Nominalbetrag und Zinsen der vierten Zinsperiode. Letztere sind mit dem zukünftigen Abzinsfaktor auf den Zeitpunkt $t = 3$ abzuzinsen, da der Bewertungszeitpunkt in der Zukunft liegt. Die Zinszahlung für die dritte Zinsperiode ist nicht abzuzinsen. Der zukünftige Abzinsfaktor $\hat{q}_{(3\leftarrow 4)}$ beträgt 0,9442. Vergleiche dazu Unterabschnitt 1.5.4-

$$\begin{aligned}
BW_3(Z_3) &= Z_3 = 1000 \\
BW_3(Z_4) &= Z_4 \cdot \hat{q}_{(3\leftarrow 4)} = 1000 \cdot 0,9442 = 944,20 \\
BW_3(K_0) &= K_0 \cdot \hat{q}_{(3\leftarrow 4)} = 20000 \cdot 0,9442 = 18884 \\
BW_3 &= BW_3(Z_4) + BW_3(Z_4) + BW_3(K_0) = 1000 + 944,20 + 18884,00 = 20828,20
\end{aligned}$$

Möchte man den Kredit vorfristig ablösen, wäre der Preis zu Marktbedingungen 20828,20 EUR. Man muss berücksichtigen, dass nach unseren Überlegungen die Zinsen für die dritte Zinsperiode noch nicht gezahlt wurden. Sonst beliefe sich der Betrag auf 19884,00 EUR. Es bleibt jedoch offen, ob das Kreditinstitut bereit ist, auf die entfallenen Zinsen zu verzichten.

### 2.2.2 Ratenschuld

Ratenschulden wurden bereits im **??** behandelt. Jetzt steht die Barwertberechnung und die Preisfunktion im Mittelpunkt der Betrachtung. Im Unterschied zur Zinsschuld werden veränderliche Annuitäten gezahlt, die sowohl Zinsen und Tilgungsbetrag enthalten. Der Tilgungsbetrag wird gleichmäßig auf die Tilgungsperioden verteilt.

Die Laufzeit einer Schuld sei in m Zinsperioden bzw. Zinszahlungen unterteilt. Am Ende jeder dieser Perioden erfolgt die Zinsberechnung und die Zahlung der Annuität $AN_j = TB + Z_j,\ j = 1, 2, ..., m$. Gegeben sei der periodenspezifische Zinssatz.

Der Tilgungsbetrag wird berechnet, in dem die Schuld $K_O$ durch die Anzahl der Zinsperioden dividiert wird:

$$TB_i = \frac{K_0}{m} \quad i = 1, 2, ..., m$$
$$TB_i = TB = \quad const.$$

Die Restschuld $RS_t$ berechnet sich aus Anfangsschuld $K_0$ und den Tilgungsbeträgen $TB$. Die Zinsen $Z_t$ werden aus der Restschuld $RS_t$ und den Nominalzinssatz $i_{nom}$ abgeleitet (ausführlich im **??**):

$$RS_t = K_0 - t \cdot TB = K_0 \cdot (1 - \frac{t}{m})$$
$$Z_t = RS_{t-1} \cdot i_{nom} = K_0 \cdot (1 - \frac{t-1}{T}) \cdot i_{nom}$$
$$A_t = TB + Z_t$$

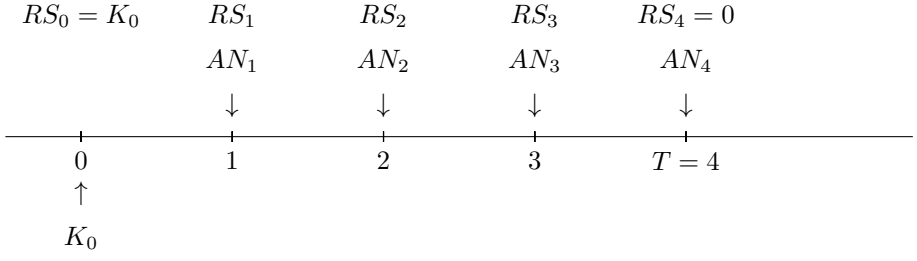
**Beispiel**

Eine Schuld von 80000 EUR soll durch gleiche Tilgungsraten in 4 Jahren getilgt werden. Die Verzinsung erfolgt jährlich bei einem gegebenen Jahreszinssatz von 5%. Die Zinsen werden am Ende jeder Zinsperiode fällig. Zu berechnen sind die jährlichen Annuitäten.

Der konstante Tilgungsbetrag für alle Zins(zahlungs)perioden beträgt $TB = \frac{80000}{4} = 20000$. Die Größen $RS_j$, $Z_j$ und $AN_j\ \forall j$ sind tabellarisch aufgeführt:

| $j$ | $RS_j$ | $TB$ | $Z_j$ | $AN_j$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 80000 | | | |
| 1 | 60000 | 20000 | 4000 | 24000 |
| 2 | 40000 | 20000 | 3000 | 23000 |
| 3 | 20000 | 20000 | 2000 | 22000 |
| 4 | 0 | 20000 | 1000 | 21000 |

Grafisch ergibt sich folgendes Bild:




Zur Berechnung des Barwertes ist jede Annuität mit den Nullkuponabzinsfaktoren auf den Zeitpunkt $t = 0$ abzuzinsen:

$$
\begin{aligned}
BW_0(AN_1) &= AN_1 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} = 24000 \cdot 0,9714 = 23313,60 \\
BW_0(AN_2) &= AN_2 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} = 23000 \cdot 0,9262 = 21302,60 \\
BW_0(AN_3) &= AN_3 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} = 22000 \cdot 0,8750 = 19250,00 \\
BW_0(AN_4) &= AN_4 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = 21000 \cdot 0,8262 = 17350,20
\end{aligned}
$$

Der Barwert $BW_0$ aller Einzahlungen des Kreditnehmers wird durch Addition der abgezinsten Annuitäten berechnet:

$$
BW_0 = BW_0(AN_1) + BW_0(AN_2) + BW_0(AN_3) + BW_0(AN_4) = \quad = 23313,60 + 21302,60 + 19250,00 + 17350,20 =
$$

Die Preisfunktion berücksichtigt den überlassenen Kreditbetrag $K_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ und es gilt:

$$
\begin{aligned}
P(0) &= -K_0 + BW_0 = -K_0 + BW_0(AN_1) + BW_0(AN_2) + BW_0(AN_3) + BW_0(AN_4) \\
P(0) &= -80000 + 81216,40 = 1216,40
\end{aligned}
$$

Aus Sicht des Kreditnehmers ist der Ratenkredit gemessen an den Marktbedingungen zu teuer.

Allgemein kann formuliert werden:

$$
BW_0 = \sum_{t=1}^{m} AN_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} \tag{2.7}
$$

$$
P(0) = -K_0 + BW_0 = -K_0 + \sum_{t=1}^{m} AN_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} \tag{2.8}
$$

Man kann, wie bei der Zinsschuld, den Barwert zum Zeitpunkt $t = 3$ berechnen, wenn der Bewertungszeitpunkt bei $t = 0$ bleibt. Es stehen noch zwei Zahlungen aus: die Annuität $AN_3$ und die Abschlusszahlung $AN_4$. Erstere ist nicht abzuzinsen, letzter mit dem Abzinsfaktor $\hat{q}_{(3\leftarrow 4)} = 0,9442$.

$$
\begin{aligned}
BW_3(AN_3) &= AN_2 = 22000 \\
BW_4(AN_4) &= AN_4 \cdot \hat{q}_{(3\leftarrow 4)} = 21000 \cdot 0,9442 = 19828,20 \\
BW_3 &= BW_3(AN_3) + BW_3(AN_4) = 22000 + 19828,20 = 41828,20
\end{aligned}
$$

Auch hier ist zu beachten, dass die dritte Annuität noch nicht gezahlt ist. Inklusiv der dritten Annuität könnte nach Marktbedingungen der Kredit im Zeitpunkt $t = 0$ durch die Zahlung von 41828,20 EUR ersetzt werden.

### 2.2.3 Anuitätenschuldschuld

Die Annuitätenschuld, d.h. Tilgungspläne mit konstanter Annuität, wurde ausführlich im **??** behandelt. Hier beschränken wir uns auf die Barwertberechnung und die Preisfunktion. Der wesentliche Unterschied zur Ratentilgung ist die Konstanz der Annuität. Die Anzahl der Annuitätenzahlungen betrage m. Es wurde gezeigt, dass sich die konstante Annuität $AN$ aus Anfangsschuld $K_0$ und Nominalzinssatz $i_{nom}$ errechnet:

$$AN = K_0 \cdot (1 + i_{nom})^m \cdot \frac{i_{nom}}{(1 + i_{nom})^m - 1}$$

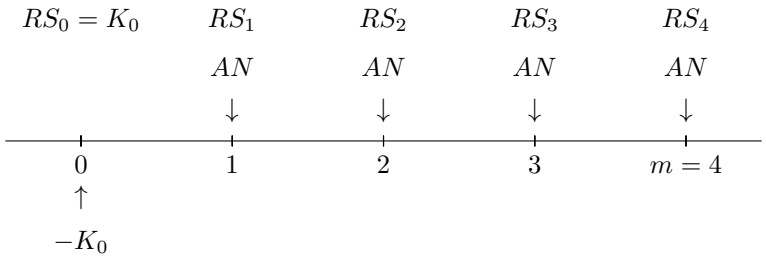
Zur Bestimmung des Barwertes zum Zeitpunkt $t = 0$ werden wiederum die Nullkuponabzinsfaktoren herangezogen. Die Annuitäten am Ende jeder Zinsperiode werden mit dem entsprechenden Abzinsfaktor multipliziert und die so erhaltenen Teilbarwerte addiert:

$$BW_0(AN_t) = AN \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)}$$
$$BW_0 = \sum_{t=1}^{m} AN \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} = AN \cdot \sum_{t=1}^{m} \hat{q}_{(0\leftarrow t)}$$

**Beispiel**
Eine Schuld von 80000 EUR soll durch gleiche Annuitäten in 4 Jahren getilgt werden. Die Verzinsung erfolgt jährlich bei einem gegebenen Jahreszinssatz von 5%. Die Zinsen werden am Ende jeder Zinsperiode fällig. Die konstante jährliche Annuitäten ist folgende:

$$AN = K_0 \cdot (1 + i_{nom})^m \cdot \frac{i_{nom}}{(1 + i_{nom})^m - 1}$$
$$= 80000 \cdot (1,05)^4 \cdot \frac{0,05}{(1,05)^4 - 1} = 22560,95$$

Grafisch ergibt sich für den Tilgungsprozess folgendes Bild:




Zur Berechnung des Barwertes ist jede Annuität mit den Nullkuponabzinsfaktoren auf den Zeitpunkt $t = 0$ abzuzinsen:

$$BW_0(AN_1) = AN \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} = 22560,95 \cdot 0,9714 = 21915,71$$
$$BW_0(AN_2) = AN \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} = 22560,95 \cdot 0,9262 = 20895,95$$
$$BW_0(AN_3) = AN \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} = 22560,95 \cdot 0,8750 = 19740,83$$
$$BW_0(AN_4) = AN \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = 22560,95 \cdot 0,8262 = 18639,86$$

Der Barwert aller Einzahlungen (Annuitäten) wird durch Addition der abgezinsten Annuitäten berechnet:

$$BW_0 = BW_0(AN_1) + BW_0(AN_2) + BW_0(AN_3) + BW_0(AN_4) =$$
$$= 21915,71 + 20895,95 + 19740,83 + 18639,86 = 81192,35$$

Für die Preisfunktion gilt:

$$P(0) = -K_0 + BW_0 = -K_0 + BW_0(AN_1) + BW_0(AN_2) + BW_0(AN_3) + BW_0(AN_4)$$
$$P(0) = -80000 + 81192,35 = 1192,35$$

Aus Sicht des Kreditnehmers ist der Ratenkredit gemessen an den Marktbedingungen zum Zeitpunkt $t = 0$ zu teuer.

Allgemein gilt:

$$BW_0 = \sum_{t=1}^{m} AN_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} \tag{2.9}$$

$$P(0) = -K_0 + BW_0 = -K_0 + \sum_{t=1}^{m} AN_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} \tag{2.10}$$

Man kann, wie bei der Zinsschuld und der Ratentilgung den Barwert zum Zeitpunkt $t = 3$ berechnen, wenn der Bewertungszeitpunkt $t = 0$ ist:

$$\begin{aligned} BW_3(AN) &= AN_2 = 22560,95 \\ BW_4(AN) &= AN \cdot \hat{q}_{(3\leftarrow 4)} = 22560,95 \cdot 0,9442 = 21.302,04 \\ BW_3 &= BW_3(AN) + BW_4(AN) = 22560,95 + 21.302,04 = 43863,00 \end{aligned}$$

Auch hier ist zu beachten, dass die dritte Annuität noch nicht gezahlt ist. Inklusiv der dritten Annuität könnte nach Marktbedingungen der Kredit im Zeitpunkt $t = 0$ durch die Zahlung von 43863,00 EUR ersetzt werden.

## 2.3 Außerbörsliche Termingeschäfte

In Termingeschäften vereinbaren zwei Vertragspartner, die Erfüllung des Vertrages (Zahlung oder Lieferungen) über mehr als zwei Handelstage hinaus auf einen vereinbarten Zeitpunkt zu verschieben. Unterschiedliche Zahlungen oder Lieferungen können Gegenstand eines Termingeschäftes sein:

- Zahlung von Fremdwährungen (Die Vertragsparteien vereinbaren dden Austausch zweier Währungen zu einem fixierten Wechselkurs zu einem bestimmten Zeitpunkt)

- Lieferung von Waren gegen eine Geldzahlung zu einem zukünftigen Zeitpunkt.

Termingeschäfte können unter der Beteiligung der Börse abgeschlossen werden. Sie sind dann in der Regel standardisiert und werden in der Form von Wertpapieren abgewickelt. Diese Wertpapiere sind handelbar.Es existieren auch standardisierte Termingeschäfte, die ohne Beteiligung der Börse gehandelt werden, sogenannte OTC-Geschäfte (over-the-counter). Handelbare Termingeschäfte werden im **??** ausführlich besprochen. Hier werden ausschließlich Termingeschäfte untersucht, welches außerbörslich abgewickelt werden und nicht handelbar sind.

### 2.3.1 Außerbörsliche Termingeschäfte in Fremdwährungen

Zwei Vertragsparteien vereinbaren zu einen bestimmten Termin in der Zukunft zwei Geldbeträge in unterschiedlichen Währungen zu einen festen Wechselkurs auszutauschen. Beiden Parteien ist der tatsächliche Wechselkurs zum Austauschtermin nicht bekannt. Die Vorteile einer solchen Vereinbarung liegt auf der Hand: Soll eine Zahlung in Fremdwährung in einem zukünftigen Zeitpunkt erfolgen, kann man auf diese Weise schon zum Vertragsabschluss die Bedingungen des Austausches von Heimatwährung in Fremdwährung absichern. Formal werden zwei Zahlungen zum Zeitpunkt $t = 0$ vereinbart:

| | |
|---|---|
| $A_t(1)$ | Zahlung eines Geldbetrages in Währung 1 zum Zeitpunkt $t$ |
| $A_t(2)$ | Erhalt eines Geldbetrages in Währung 2 zum Zeitpunkt $t$ |
| $t = 0$ | Zeitpunkt des Vertragsabschlusses |

Die Finanzströme werden aus der Sicht des Zahlers in Währung 1 bzw. des Erhalters der Zahlung in Währung 2 untersucht. Deshalb wird der Betrag der Zahlung in Währung 1 mit negativem Vorzeichen versehen, der Betrag in Währung 2 dagegen mit positivem Vorzeichen. Der Wechselkurs von Währung 1 zu Währung 2 (Betrag der Währung 1 für eine Einheit der Währung 2) wird mit $wk_t$ (Währung 1, Währung 2) bzw. $wk_t(1,2)$ bezeichnet Es gilt:

$$wk_t(1,2) = \frac{A_t(1)}{A_t(2)}$$

Dabei sind $A_t(1)$ der Betrag in Währung 1 (des Währungsraums 1) und $A_t(1)$ der Betrag in Währung 2 (des Währungsraums 2), die vereinbarungsgemäß zum Zeitpunkt t getauscht werden.

Grafisch lassen sich die Finanzströme folgendermaßen darstellen:




Zur Bestimmung des Barwertes werden die Abzinsfaktoren bzw. die Nullkuponzinsen für beide Währungsräume (Währung 1 und Währung 2) benötigt:

$i_{1,real(0\to t)}$ - Nullkupon-Zinssatz im Währungsraum 1
$\hat{q}_{1(0\leftarrow t)}$ - Nullkupon-Abzinsfaktor im Währungsraum 1
$i_{2,real(0\to t)}$ - Nullkupon-Zinssatz im Währungsraum 2
$\hat{q}_{2(0\leftarrow t)}$ - Nullkupon-Abzinsfaktor im Währungsraum 2

Der Barwert kann nun bestimmt werden. Dabei ist zu beachten, dass der Barwert in der Währung des Währungsraum 1 berechnet wird. Häufig ist die Währung im Währungsraum 1 die sogenannte Heimatwährung. Grundsätzlich kann man aber auch den Barwert in der Währung des Währungsraum 2 bestimmen.

$$BW_0 = A_t(1) \cdot \hat{q}_{1(0\leftarrow t)} + A_t(2) \cdot wk_0(1,2) \cdot \hat{q}_{2(0\leftarrow t)} \tag{2.11}$$

Die Preisfunktion - auch in der Währung de Währungsraums 1 - ist identisch mit dem Barwert $BW_0$:

$$P_0 = A_t(1) \cdot \hat{q}_{1(0\leftarrow t)} + A_t(2) \cdot wk_0(1,2) \cdot \hat{q}_{2(0\leftarrow t)} \tag{2.12}$$

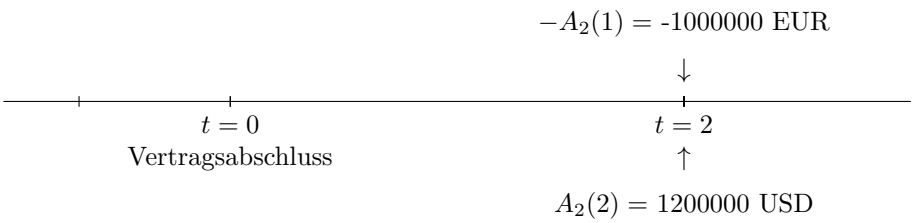
**Beispiel:**

Es wird zum Zeitpunkt $t = 0$ vereinbart, in zwei Jahren $t = 2$ 1000000 EUR in 1200000 USD zu tauschen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ gelten folgende Marktbedingungen:

$wk_0(EUR, USD) = 0,84\frac{EUR}{USD}$
$i_{EUR,real(0\to 2)} = 0,0391$
$\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 2)} = 0,9262$
$i_{USD,real(0\to 2)} = 0,040$
$\hat{q}_{USD(0\leftarrow 2)} = 0,9246$

Die Nullkuponzinssätze für den USD-Währungsraum wurden angenommen und nicht aus Nullkuponanleihen bzw. Kuponanleihen berechnet.

Grafisch lassen sich die Finanzströme folgendermaßen darstellen:




$$BW_0 = A_2(1) \cdot \hat{q}_{EUR(0\leftarrow 2)} + A_2(2) \cdot wk_0(EUR, USD) \cdot \hat{q}_{USD(0\leftarrow 2)}$$
$$BW_0 = -1000000 \cdot 0,9262 + 1200000 \cdot 0,84 \cdot 0,9246 = -926200 + 931996,80 = 5796,80$$

Der Barwert beträgt 5796,80 EUR. Aus Sicht des Zahlers von 1000000 EUR scheint das Geschäft leicht vorteilhaft. Der Berechnung liegen Annahmen zur Entwicklung des Wechselkurses ($wk_2(EUR, USD) = 1000000EUR/1200000USD = 0,833$) zu Grunde. Wie sich der Wechselkurs tatsächlich entwickelt, ist beiden Vertragsparteien nicht bekannt. Ein Barwert des Geschäftes nahe Null zum Vertragsabschluss wäre fair für beide Seiten und entspräche auch den realen Zinssätzen mit einer Laufzeit von 2 Jahren für beide Währungsräume.

$$BW_0 = -1000000 \cdot 0,9262 + A_2(2) \cdot 0,84 \cdot 0,9246 = -926200 + 931996,80 = 0$$
$$A_2(2) = -\frac{-926200}{0,84 \cdot 0,9246} = 1192536,28$$

Das bedeuten, unter Markterwartungen im Zeitpunkt $t = 0$ würde ein Tausch von 1000000 EUR in 1192536,28 USD einen Barwertes des Geschäftes von 0 EUR ergeben.

### 2.3.2 Außerbörsliche Termingeschäfte mit Waren

Außerbörsliche Termingeschäfte mit Waren erfordern Informationen über Rohstoffpreise, die im Rahmen dieses Buches nicht besprochen werden können. Im Unterschied zu Termingeschäften mit Geldbeträgen muss davon ausgegangen werden, das Waren keine Zinsen produzieren und damit der Finanzstrom nur aus einer Zahlung, die zu einem zukünftigen Zeitpunkt erfolgt. Nur diese Zahlung kann abgezinst werden und bestimmt den Barwert des Termingeschäftes.

Ein Termingeschäft mit Waren liegt vor, wenn zwei Vertragspartner vereinbaren, dass ein gewisse Menge Ware $M_t$ gegen eine Geldbetrag $A_t$ geliefert werden, wobei die Lieferung der Ware als auch die Zahlung des Geldbetrages in der Zukunft liegen, im Moment $t$. Ware und Geld werden zum vereinbarten Preis $p$ im Moment $t$ ausgetauscht. Der vereinbarte Preis muss nicht mit dem tatsächlichen Preis der Ware $p_t$ identisch sein, dieser ist zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses beiden Partnern nicht bekannt. Bekannt dagegen ist der Preis der Ware $p_0$ im Moment des Vertragsabschlusses.

Grafisch ergibt sich folgendes Bild der Fianz- und Warenströme:



Der Barwert der einzigen Zahlung $A_t$ kann durch Abzinsen mit den Nullkuponabzinsfaktoren $\hat{q}_{(0\leftarrow t)}$ berechnet werden:

$$BW_0(A_t) = A_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} \tag{2.13}$$

Die Preisfunktion $P_0$ lautet:

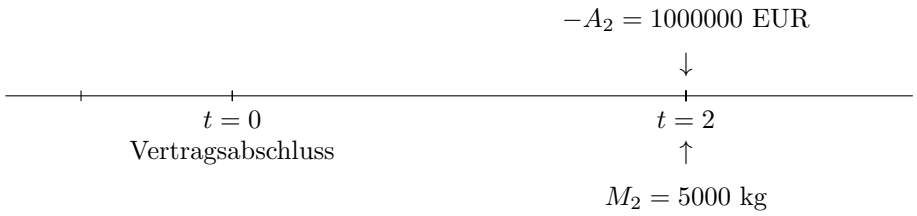
$$P_0 = A_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} + M_t \cdot p_0 \tag{2.14}$$

Wie im Termingeschäft mit Fremdwährungen wird der zu zahlende Betrag $A_t$ mit negativem Vorzeichen versehen.

**Beispiel:**

Es wird vereinbart, dass nach 2 Jahren gegen die Zahlung von 1000000 EUR ein Rohstoff im Umfang von $M = 5000$ kg geliefert wird. Der Preis der Ware im Zeitpunkt $t = 2$ berägrt $p_2 = \frac{200\,EUR}{kg}$. Gleichzeitig ist bekannt, dass der Preis der Ware im Zeitpunkt $t = 0$, also zum Vertragsabschluss $p_0 = \frac{180\,EUR}{kg}$ ist.

Grafisch ergibt sich folgendes Bild der Fianz- und Warenströme:




Zum Abzinsen wird der Nullkuponabzinsfaktor mit einer Restlaufzeit von 2 Jahren genutzt ($\hat{q}_{(0\leftarrow 2)} = 0,9534$). Der Barwert $BW_0(A_2)$ beträgt:

$$\begin{aligned} BW_0(A_2) &= A_2 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} \\ BW_0(A_2) &= -1000000 \cdot 0,9534 = -953400 \end{aligned}$$

Die Preisfunktion lautet:

$$\begin{aligned} P_0 &= A_2 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} + M \cdot p_0 \\ P_0 &= -1000000 \cdot 0,9534 + 5000 \cdot 180 = -953400 + 900000 = -53.400 \end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ scheint das Geschäft für den Käufer der Ware nicht vorteilhaft zu sein, wenn unterstellt wird, dass der Preis der Ware sich nicht ändert. Er geht aber davon aus, dass er bei einem Preis von $p_2 = \frac{200\,EUR}{kg}$ den dann fairen Preis von 1000000 EUR zu zahlen hätte. Ob das Geschäft tatsächlich vorteilhaft oder verlustbringend ist, wird sich erst zeigen, wenn der tatsächliche Rohstoffpreis $p_2$ bekannt ist, also zum Zeitpunkt $t = 2$.

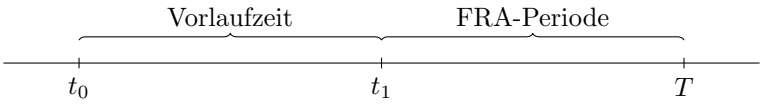
## 2.4 Forward Rate Agreements - Zinstermingeschäfte

**Forward Rate Agreements (FRAs)** sind spezielle Termingeschäfte, bei denen die Vertragsparteien vereinbaren, für eine zukünftige Periode Zinszahlungen auszutauschen. Dabei wird der Festzinssatz -

der sogenannte **FRA-Zinssatz** - bereits vor Beginn der Zinsperiode festgelegt. Der variable Zinssatz wird zu einem in der Zukunft liegenden Zeitpunkt an Hand eines Referenzzinssatzes festgestellt. In der darauffolgenden Zinsperiode wird ein vorher festgelegtes Kapital (Nominalwert) sowohl zum gefixten Referenzzinssatz als auch zum Festzinssatz (FRA-Zinssatz) verzinst. Am Ende der FRA-Zinsperiode zahlt der Käufer des FRA dem Verkäufer den Nominalwert plus Zinsen und der Verkäufer seinerseits den Nominalwert plus Zinsen. Da beide Parteien den gleichen Nominalwert und die Zinsen austauschen, reduziert sich der tatsächliche Austausch auf die Zinsdifferenz. Das hat für den Käufer (meistens ein Unternehmen) einer FRA den Vorteil, dass er unabhängig vom Marktzins einen festen Zinsaufwand (z.B. für einen Kredit) hat, besonders aber auch dann, wenn der Referenzzinssatz größer als der im Vertrag vereinbarte FRA-Zinssatz ist. In diesem Fall muss der Verkäufer (die Bank) die Zinsdifferenz ausgleichen. Auch für den Verkäufer (häufig eine Bank) kann der Vertrag vorteilhaft sein, nämlich dann, wenn der Referenzzinssatz kleiner als der vereinbarte FRA-Zinssatz ist, weil dann der Käufer die Zinsdifferenz ausgleichen muss.

Bei Forward Rate Agreements handelt es sich um ein derivatives Finanzprodukt. Derivative Finanzprodukte beziehen sich auf ein Basisposition (underlying), aus denen sich Zahlungen ableiten lassen. Bei Forward Rate Agreements ist die Basisposition der Nominalwert, aus dem Zinsen und schließlich auch die Ausgleichszahlung abgeleitet werden. Die Basisposition wird nicht ausgetauscht, bestimmt aber wesentlich die Ausgleichszahlung, wie später gezeigt wird.

Es werden zwei Zeitperioden (bzw. drei Zeitpunkte) festgelegt:



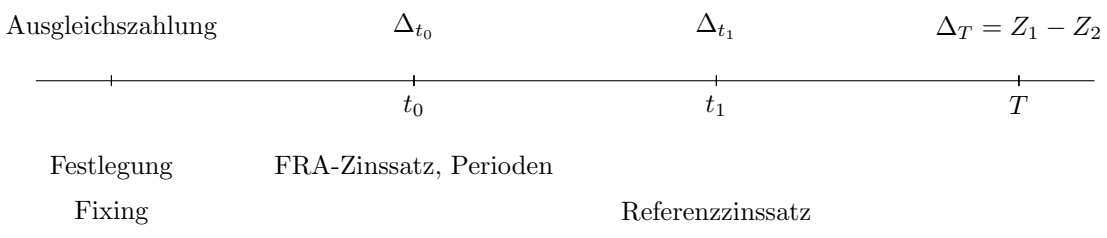

Die beiden Zeitperioden bestimmen auch die Bezeichnung des FRA (Forward Rate Agreements). Die Zeitperioden werden in Monaten gemessen. Ein FRA mit einer Vorlaufzeit von $t_1 - t_0$ Monaten und einer FRA-Zinsperiode von $T - t_1$ Monaten erhält die Notation $t_1 - t_0/T$ . Zum Beispiel: Bei einer Vorlaufzeit von 3 Monaten und einer FRA-Zinsperiode von 6 Monaten lautet die Notation 3/9.

Es wird zum Zeitpunkt $t_0$ eine Vereinbarung über den FRA-Zinssatzes $i_{FRA}(t_1 \to T))$ und die Höhe des Nominalwertes N getroffen. Gleichzeitig wird der Beginn und das Ende der Vorlaufzeit und der FRA-Zinsperiode festgelegt. Ein Kapitalaustausch findet nicht statt. Im Zeitpunkt $t_1$ erfolgt das Fixing des Referenzzinssatzes $(i_{REF}(t_1 \to T))$. Zum Zeitpunkt $T$ werden die Zinsen für jede Vertragspartei berechnet und eine Ausgleichszahlung $\Delta_T$ berechnet. Die Ausgleichszahlung wird in der Regel zum Zeitpunkt $t_1$ vorgenommen. Dazu ist es nötig, den für den Zeitpunkt T berechneten Betrag auf den Zeitpunkt $t_1$ abzuzinsen. Zum Abzinsen verwendet man Abzinsfaktoren $\frac{1}{1+i_{REF}(t_1 \to T) \cdot \frac{T-t_1}{360}}$, die auf dem Referenzzinssatz $i_{REF}(t_1 \to T)$ basieren. :

- wenn der Referenzzinssatz größer ist als der FRA-Zinssatz muss der Verkäufer des FRA (die Bank) die Zinsdifferenz ausgleichen. $(i_{REF}(t_1 \to T) > i_{FRA}(t_1 \to T)))$

- wenn der FRA-Zinssatz größer ist als der Referenzzinssatz muss der Käufer des FRA die Zinsdifferenz ausgleichen. $(i_{FRA}(t_0 \to T)) > i_{REF}(t_1 \to T))$

Die zur Berechnung wichtigen Termine und Zahlungen sind in der nachfolgenden Grafik dargestellt:



Bezeichnungen:

| | |
|---|---|
| $t_0$ | Vertagsabschluss |
| $t_1$ | Fixing day, Beginn der FRA-Zinsperiode |
| $T$ | Erfüllungs- oder Abrechnungstag, Ende der FRA-Zinsperiode |
| $(t_0, t_1)$ | Vorlaufzeit |
| $(t_1, T)$ | FRA-Periode |
| $Z_1$ | Zinsen zum Festzinssatz (FRA-Zinssatz) |
| $Z_2$ | Zinsen zum variablen Zinssatz (gefixten Referenzzinssatz) |
| $\Delta_T$ | Ausgleichszahlung zum Zeitpunkt T |
| $\Delta_{t_1}$ | Ausgleichszahlung zum Zeitpunkt $t_1$ (abgezinster Betrag der Ausgleichszahlung zum Zeitpunkt $t_1$) |
| $\Delta_{t_0}$ | Ausgleichszahlung zum Zeitpunkt $t_0$ (abgezinster Betrag der Ausgleichszahlung zum Zeitpunkt $t_0$) |

Zwischen fixing day und Beginn der FRA-Zinsperiode liegen in der Regel zwei Handelstage, hier wird das jedoch vernachlässigt.

Es sind nun die Zinsen beider Parteien zu berechnen. Dazu benötigt man neben den beiden Zinssätzen (FRA-Zinssatz $i_{FRA}(t_1 \to T)$) und den zum Zeitpunkt $t_1$ gefixten Referenzzinssatz $i_{REF}(t_1 \to T)$ den Nominalwert $N$ des Geschäftes. Von der Dauer der FRA-Zinsperiode hängt ab, ob die Zinsen einfach, exponentiell oder gemischt verzinst werden. Da häufig die Zinsperiode unterjährig ist, wählen wir die einfache Verzinsung. Als "day-count-convention" wird 30/360 gewählt. Referenzzinssatz und FRA-Zinssatz werden als Jahreszinssätze angegeben.

$$Z_1 = N \cdot i_{FRA}(t_1 \to T)) \cdot \frac{T - t_1}{360} \tag{2.15}$$

$$Z_2 = N \cdot i_{REF}(t_1 \to T)) \cdot \frac{T - t_1}{360} \tag{2.16}$$

$$\Delta_T = Z_1 - Z_2 = N \cdot \big[ i_{FRA}(t_1 \to T)) \cdot \frac{T - t_1}{360} - i_{REF}(t_1 \to T)) \cdot \frac{T - t_1}{360} \big]$$

$$\Delta_{t_1} = \Delta_T \cdot \frac{1}{1 + i_{REF}(t_1 \to T) \cdot \frac{T - t_1}{360}} =$$

$$= N \cdot \big[ i_{FRA}(t_1 \to T)) \cdot \frac{T - t_1}{360} - i_{REF}(t_1 \to T)) \cdot \frac{T - t_1}{360} \big] \cdot \frac{1}{1 + i_{REF}(t_1 \to T) \cdot \frac{T - t_1}{360}} \tag{2.17}$$

**Beispiel:**

Ein Unternehmen kauft zum Zeitpunkz $t_0 = 0$ ein FRA (Long FRA - 3/9) mit einer Vorlaufzeit von 3 Monaten und einer FRA-Zinsperiode von 6 Monaten. Als Referenzzinssatz wird der EURIBOR festgelegt. Zunächst ist der "'faire"' FRA-Zinssatz $i_{FRA}(3 \to 9)$ zu bestimmen. Dazu benötigt man die Referenzzinssätze $i_{EURIBOR}(0 \to 3)$ und $i_{EURIBOR}(0 \to 9)$, die der aktuellen Zinskurve zu entnehmen sind. Sie betragen:

$$i_{EURIBOR}(0 \to 3) = 0,02$$
$$i_{EURIBOR}(0 \to 9) = 0,03$$

Die Berechnung erfolgt entsprechend dem Vorgehen im Unterabschnitt 1.5.4:

$$
\begin{aligned}
(1 + i_{EURIBOR}(0 \to 9) \cdot \frac{270}{360}) &= (1 + i_{EURIBOR}(0 \to 3) \cdot \frac{90}{360}) \cdot (1 + i_{FRA}(3 \to 9) \cdot \frac{180}{360}) \\
(1 + 0,03 \cdot \frac{270}{360}) &= (1 + 0,02 \cdot \frac{90}{360}) \cdot (1 + i_{FRA}(3 \to 9) \cdot \frac{180}{360}) \\
1,0225 &= 1,005 \cdot (1 + i_{FRA}(3 \to 9) \cdot \frac{180}{360}) \\
1,0174 - 1 &= i_{FRA}(3 \to 9) \cdot \frac{180}{360} \\
0,0174 \cdot \frac{360}{180} &= i_{FRA}(3 \to 9) \\
i_{FRA}(3 \to 9) &= 0,0348
\end{aligned}
$$

Der faire FRA-Zinssatz, errechnet mit Kenntnisstand zum Tag des Vertragsabschlusses $t = 0$, beträgt $3,48\%$. Dieser wird auch für das Geschäft vereinbart. Nach 3 Monaten wird der EURIBOR mit einer Laufzeit von 6 Monaten fest gestellt ($i_{EURIBOR}(3 \to 9) = 3,25\%$).

Es können nun die Zinsen beider Parteien und die Ausgleichszahlung berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= N \cdot i_{FRA}(3 \to 9)) \cdot \frac{180}{360} = 1000000 \cdot 0,0348 \cdot \frac{180}{360} = 17400 \\
Z_2 &= N \cdot i_{EURIBOR}(3 \to 9) \cdot \frac{180}{360} = 1000000 \cdot 0,0325 \cdot \frac{180}{360} = 16250 \\
\Delta_9 &= Z_1 - Z_2 = 17400 - 16250 = 1150 \\
\Delta_3 &= \Delta_9 \cdot \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(3 \to 9) \cdot \frac{180}{360}} = 1150 \cdot \frac{1}{1 + 0,0325 \cdot \frac{180}{360}} = 1131,61
\end{aligned}
$$

Die Zinsdifferenz am Ende der Laufzeit $\Delta_9$ beträgt 1150 EUR. Dieser Betrag ist mit $\frac{1}{1+i_{EURIBOR}(3 \to 9)}$ abzuzinsen. Die Ausgleichszahlung beträgt dann 1131,61 EUR und ist vom Käufer am Beginn der FRA-Zinsperiode zu begleichen.

Es findet nur eine Zahlung statt: die abgezinste Ausgleichszahlung zum Zeitpunkt $t_1$. Der Barwert $BW_{t_0}$ der Ausgleichszahlung zum Zeitpunkt $t_0$ ist gleich Null. Zu diesem Zeitpunkt ist der gefixte Wert des Referenzzinssatzes nicht bekannt, so dass auf den zukünftigen Zinssatz (fairen Zinssatz) zurückgegriffen werden muss, der $3,48\%$ beträgt. Da für das Geschäft dieser Zinssatz vereinbart wurde, stimmen FRA-Zinssatz und der erwartete Wert des Referenzzinssatzes überein, so dass es zu keiner Ausgleichszahlung kommt. Das Bild ändert sich natürlich, wenn nicht der "faire" Zinssatz als FRA-Zinssatz gewählt wird, z.B. $i_{FRA}(3 \to 9)) = 0,03$. Dann ergäbe sich folgender Barwert $BW_{t_0}$:

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= N \cdot i_{FRA}(3 \to 9)) \cdot \frac{180}{360} = 1000000 \cdot 0,03 \cdot \frac{180}{360} = 15000 \\
Z_2 &= N \cdot i_{EURIBOR,FUTUR}(3 \to 9) \cdot \frac{180}{360} = 1000000 \cdot 0,0348 \cdot \frac{180}{360} = 17400 \\
\Delta_9 &= Z_1 - Z_2 = 15000 - 17400 = -2400 \\
\Delta_3 &= \Delta_9 \cdot \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(3 \to 9) \cdot \frac{180}{360}} = -2358,95 \\
BW_{t_0} &= \Delta_3 \cdot \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(0 \to 3) \cdot \frac{90}{360}} = -2358,95 \cdot \frac{1}{1 + 0,02 \cdot \frac{90}{360}} = -2347,21
\end{aligned}
$$

Beim Kenntnisstand zum Zeitpunkt $t_0$ erwartet der Käufer eine Ausgleichszahlung von 2358,95 EUR, deren Wert zum Vertragsabschluss 2347,21 EUR beträgt.

Obwohl der Nominalbetrag nicht eingezahlt bzw. mit Zinsen am Ende der Zinsperiode wieder erhalten wird, können diese "'fiktiven"' Zahlungen zur Berechnung des Barwertes des Geschäftes herangezogen

werden. Dazu stellen wir uns auf die Seite des Käufers eines FRA (long FRA). Der Käufer zahlt "'fiktiv"' im Zeitpunkt $t_1$ den Nominalbetrag N und entnimmt zum Zeitpunkt $T$ den Betrag $N + N \cdot i_{FRA}(t_1 \to T))$. Zur Barwertberechnung sind alle drei Beträge zum Bewertungszeitpunkt (hier Tag des Vertragsabschlusses $t_0$). Damit ergeben sich folgende drei Zahlungen:

1. N zum Zeitpunkt $t_1$
2. -N zum Zeitpunkt $T$
3. Die Zinsen der Festzinsseite $N \cdot i_{FRA}(t_1 \to T))$ zum Zeitpunkt $T$

Die abgezinsten Beträge (zum Zeitpunkt $t_0$ - dem Bewertungstag -) sind:

1. $N \cdot \frac{1}{1+i_{EURIBOR}(t_0 \to t_1) \cdot \frac{t_1 - t_0}{360}}$
2. $-N \cdot \frac{1}{1+i_{EURIBOR}(t_0 \to T) \cdot \frac{T - t_0}{360}}$
3. $N \cdot i_{FRA}(t_1 \to T) \cdot \frac{T-t_1}{360} \cdot \frac{1}{1+i_{EURIBOR}(t_0 \to T) \cdot \frac{T - t_0}{360}}$

Für das Beispiel gilt:

$$
\begin{aligned}
N \cdot \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(0 \to 3) \cdot \frac{90}{360}} &= 1000000 \cdot \frac{1}{1 + 0,02 \cdot \frac{90}{360}} = 1000000 \cdot 0,995025 = 995025 \\
-N \cdot \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(0 \to 9) \cdot \frac{270}{360}} &= 1000000 \cdot \frac{1}{1 + 0,03 \cdot \frac{270}{360}} = -1000000 \cdot 0,977995 = -977995 \\
-N \cdot i_{FRA}(3 \to 9) \cdot \frac{180}{360} \cdot \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(0 \to 9) \cdot \frac{270}{360}} &= -1000000 \cdot 0,0348 \cdot \frac{180}{360} \cdot \frac{1}{1 + 0,03 \cdot \frac{270}{360}} = -1131,61
\end{aligned}
$$

Zur Bestimmung des Barwertes des Geschäftes zum Zeitpunkt $t_0$ sind alle drei Zahlungen auf diesen Zeitpunkt abzuzinsen:

$$BW_{t_0} = 995025 - 977995 - 1131,61 = 15898,39$$

Der Barwert des Geschäftes beträgt 15898,39 EUR.

Aus der Sicht der variablen Zinsseite ergibt sich zum Zeitpunkt $t_1$ folgendes Bild: Der erhaltene "'fiktive"' Betrag wird zum Zeitpunkt T mit Zinsen zurückgezahlt. Da der Referenzzinssatz sowohl zur Berechnung der Zinsen als auch zum Diskontieren auf den Zeitpunkt $t_1$ verwendet wird, ist der abgezinste Betrag identisch dem Nominalwert N.

Die Preisfunktion entspricht dem Barwert des Geschäftes:

$$
\begin{aligned}
PW_{t_0} = {} & N \cdot \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(t_0 \to t_1) \cdot \frac{t_1 - t_0}{360}} - N \cdot \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(t_0 \to T) \cdot \frac{T - t_0}{360}} + \\
& - N \cdot i_{FRA}(t_1 \to T) \cdot \frac{T - t_1}{360} \cdot \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(t_0 \to T) \cdot \frac{T - t_0}{360}} \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(t_0 \to T) \cdot \frac{T - t_0}{360}} \\
PW_{t_0} = {} & N \cdot \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(t_0 \to t_1) \cdot \frac{t_1 - t_0}{360}} - \\
& - N \cdot (1 + i_{FRA}(t_1 \to T)) \cdot \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(t_0 \to T) \cdot \frac{T - t_0}{360}}
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

## 2.5 Zinsswaps

**Zinsswaps** sind derivative Finanzinstrumente, die eine gewisse Ähnlichkeit mit Forward Rate Agreements haben. Es wird vereinbart, dass beide Seiten zu einem bestimmten Zeitpunkt Zinszahlungen austauschen, diesmal Festzinsen gegen variable Zinsen. Beim FRA fixieren beide Seiten einen Fixzinssatz, der nach einem gewissen Zeitraum mit einem Referenzzinssatz verglichen wird und eine Ausgleichszahlung generiert. Im gewissen Sinne handelt es sich um eine Wette über die Höhe des Referenzzinssatzes zu einem zukünftigen Zeitraum. Beim Swap dagegen geht es um reinen Tausch von Festzinsen zu variablen Zinsen oder umgekehrt. Die variablen Zinsen sind an einem Referenzzinssatz gebunden, welcher zu einem festen Zeitpunkt festgestellt wird. Beim Swap erfolgt - nicht wie beim FRA nur ein Austausch der Zinsen in Form einer Ausgleichszahlung, sondern es werden mehrere Zinszahlungen vereinbart. In diesem Sinne ist die Festzinsseite einer festverzinslichen Anleihe ähnlich, die periodisch nach einem Nominalzinssatz konstante Zinserträge abwirft. Die variable Seite dagegen ähnelt einer Floating Rate Note (FRN), die periodisch variable Zinsen erwirtschaftet.

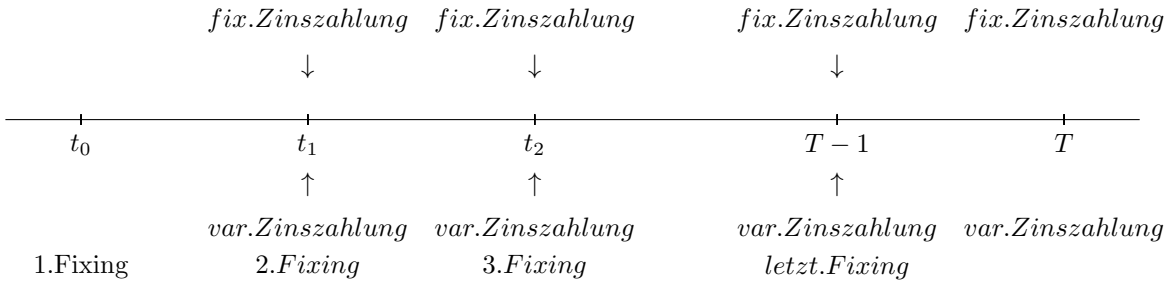
Es wird zwischen **Payer- und Recieverswap** unterschieden. Beim *Payerswap* zahlt man feste Zinsen und erhält variable Zinsen, beim **Recieverswap** werden variable Zinsen gezahlt und man erhält feste Zinsen.

### 2.5.1 Plain Vanilla Swaps

Man unterscheidet eine Reihe von speziellen Swaps, einige davon werden im folgenden behandelt. Die wohl einfachste Form ist der Plain Vanilla Swap. Die eine Seite erhält die Zinsen (Festzinsen) auf Basis des im Voraus definierten Festzinssatzes (Swapsatzes). Die andere Seite erhält die variablen Zinsen auf der Basis eines Referenzzinssatzes. Der Nominalwert ist fest und wird zu Vertragsbeginn ($t_0$) festgelegt. Der Referenzzinssatz wird zum ersten Mal zu einem festgelegten Zeitpunkt $t_0$ gefixt. Die Zinsperiode beginnt - wie beim FRA nach etwa 2 Handelstagen. In unserer Darstellung werden wir diese Zeitdifferenz zwischen Fixing und Beginn der Zinsperiode vernachlässigen. Der Austausch der Zinszahlungen erfolgt am Ende der Zinsperiode (nachschüssige Zinszahlung). In der Regel werden mehr als eine Zinsperiode vereinbart. Auf den Austausch der Nominalwerte (diese sind für beide Seiten gleich), kann verzichtet werden, da die anfallenden Zinsen jeweils zum Zinszahlungstermin ausgetauscht werden und damit keine Akkumulation des Nominalwertes erfolgt.

Es wird zum Zeitpunkt $t_0$ eine Vereinbarung über den Swapinssatzes $i_{SWAP}$ und die Höhe des Nominalwertes N getroffen. Im Zeitpunkt $t_0$ erfolgt das erste Fixing des Referenzzinssatzes ($i_{REF}(t_0 \to t_1)$) und es erfolgen am Ende der Zinsperiode $t_1$ die ersten Zinszahlungen. Zum Zeitpunkt $t_1$ wird wiederum der Referenzzinssatz gefixt ($i_{REF}(t_1 \to t_2)$) und am Ende der zweiten Zinsperiode die Zinszahlungen durchgeführt. Die letzte Zinsperiode dauert vom Zeitpunkt $T-1$ bis zum Zeitpunkt $T$, der gefixte Referenzzinssatz ($i_{REF}(T-1 \to T)$) bestimmt die letzten Zinszahlungen zum Zeitpunkt $T$.

In der nachfolgenden Grafiken sind die Zinszahlungen eines Plain Vanilla Swaps dargestellt:




Die Zinsen werden für die Festzinsseite $Z_{fix}$ und die variablen Seite getrennt $Z_{j,var}$ berechnet. Wir setzen dabei voraus, dass die Zinsperiode ein Jahr beträgt und die Jahreszinssätze gegeben sind. Es fließen nicht die eigentlichen Zinsen, sondern die Zinsdifferenz $\Delta_{(t_j,t_{j+1})} = Z_{fix} - Z_{(t_j,t_{j+1},var)}$, die entweder von der Festzinsseite (wenn $\Delta_{(t_j,t_{j+1})} < 0$) oder von der variablen Zinsseite $\Delta_{(t_j,t_{j+1})} > 0$ zu tragen sind.

$$
\begin{aligned}
Z_{fix} = Z_{(t_j,t_{j+1},fix)} &= N \cdot i_{SWAP} = const \\
Z_{(t_j,t_{j+1},var)} &= N \cdot i_{REF}(t_j \to t_{j+1}) \\
\Delta_{(t_j,t_{j+1})} &= Z_{(t_j,t_{j+1},fix)} - Z_{(t_j,t_{j+1},var)}
\end{aligned}
$$

Die Barwertbestimmung kann zunächst für die Festzinsseite und variable Seite getrennt erfolgen. Sie entspricht auf der Festzinsseite einer festverzinslichen Anleihe, auf der variablen Seite einem Floater. Dazu wird auf den Unterabschnitt 2.8.1 bzw. auf den Abschnitt 2.9 verwiesen. Als Bewertungszeitpunkt wird $t_0$ gewählt.

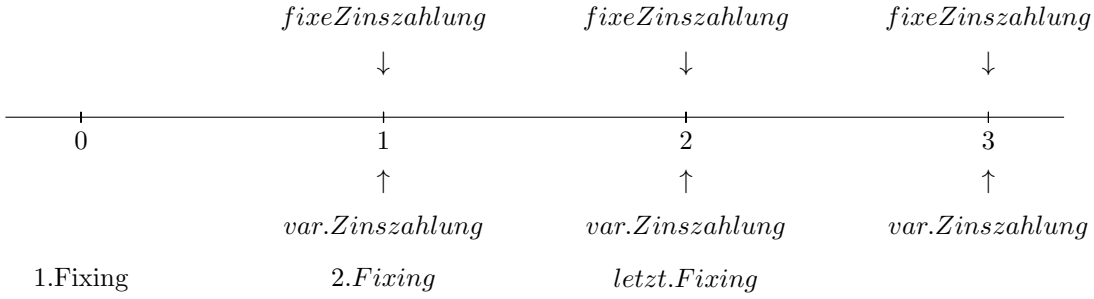
Dazu nutzen wir die Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(t_0 \leftarrow t)}$ mit $t = t_1, t_2, ..., t_j, ..., T$, die auf der Basis der Nullkupon-Zinskurve abgeleitet wurden. Dadurch ist es möglich, die bereits berechneten Abzinsfaktoren aus Unterabschnitt 1.5.2 zu nutzen. Das entspricht nicht der üblichen Praxis, wo entweder Nullkupon-ERIBOR- oder Nullkupon-LIBOR-Zinskurven (bei Laufzeiten des Swaps bis zu einem Jahr) oder sogenannte SWAP-Kurven bei längeren Laufzeiten zur Bestimmung der Abzinsfaktoren zur Anwendung kommen.
[1]. Die Nutzung der Null-Kupon-Abzinsfaktoren vereinfacht die Darlegung und erlaubt, die bisherigen Abzinsfaktoren auch weiterhin anwenden zu können.

$$
\begin{aligned}
BW_0(Z_{(t_j,t_{j+1},fix)}) &= Z_{(t_j,t_{j+1},fix)} \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow t_{j+1})} && (2.19) \\
BW_0(Z_{(t_j,t_{j+1},var)}) &= Z_{(t_j,t_{j+1},var)} \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow t_{j+1})} && (2.20) \\
BW_0(\Delta_{(t_j,t_{j+1})}) &= (Z_{(t_j,t_{j+1},fix)} - Z_{(t_j,t_{j+1},var)}) \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow t_{j+1})} \\
BW_0 &= \sum_{t=t_1}^{T} \left[ BW_0(Z_{(t_j,t_{j+1},fix)}) - BW_0(Z_{(t_j,t_{j+1},var)}) \right] && (2.21) \\
BW_0 &= \sum_{t=t_1}^{T} BW_0(\Delta_{(t_j,t_{j+1})})
\end{aligned}
$$

Die variablen Zinssätze $i_{REF}(t_j \to t_{j+1})$ sind zum Zeitpunkt $t = t_j$ nicht bekannt (mit Ausnahme von $(t_j = t_0)$). Es werden deshalb die Forwardzinssätze verwendet. Zu beachten ist, dass die zukünftigen Zinssätze aus der gleichen Zinskurve resultieren, wie die Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(0 \leftarrow t_j)}$.

**Beispiel:**

Zunächst wird ein Swap bewertet, deren Zinsperioden genau ein Jahr betragen. Die Laufzeit des Swaps betrage 3 Jahre. Es handelt sich um einen Payer-Swap, d.h. man zahlt feste Zinsen und erhält variable Zinsen. Der Nominalwert des Swaps beträgt 100000 EUR. Der vereinbarte Festzinssatz betrage 5%. Als Referenzzinssatz wird der Zinssatz der Nullkupon-Zinskurve gewählt. Die nachfolgende Grafik zeigt die entsprechenden Zahlungen:




Zur Berechnung des Barwertes ziehen wir die Nullkuponzinssätze aus dem Unterabschnitt 1.5.2 heran.

[1]Sowohl die Konstruktion als auch der Aufbau dieser Zinsstrukturkurven ist der bisher verwendeten Nullkuponzinskurve ähnlich, siehe [Inv21]

| Restlaufzeit | Nullkuponzinssatz | Abzinsfaktoren |
|---|---|---|
| 1 Jahr | $0,0294$ | 0,9714 |
| 2 Jahre | $0,0391$ | 0,9262 |
| 3 Jahre | $0,0455$ | 0,8750 |

Die Zinsen der Festzinsseite werden mit Hilfe des Nominalweres und dem Festzinssatz (Swapsatz) berechnet:

$$Z_{fix} = N \cdot i_{SWAP} = 100000 \cdot 0,05 = 5000$$

Die Festzinsen betragen für jede der Zinsperioden 5000 EUR .

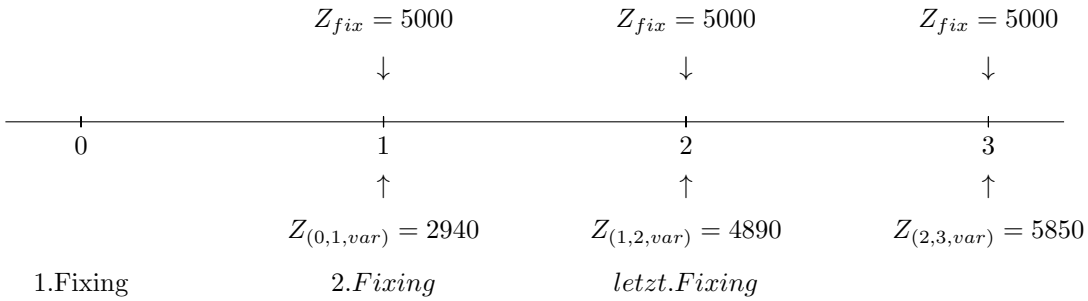
Um die variable Seite für das 2. und 3. Fixing zu berechnen benötigen wir die zukünftigen Zinssätze. Für das erste Fixing (bzw. für die erste Zinsperiode) sind ist der variable Zinssatz bekannt und beträgt $2,94\%$. (vgl. dazu Abschnitt 2.9):

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 0 | **0,0294** | $0,0391$ | $0,0455$ |
| 1 | | **0,0489** | $0,0536$ |
| 2 | | | **0,0585** |

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
Z_{(t_j,t_{j+1},var)} &= N \cdot i_{REF}(t_j \to t_{j+1}) \\
Z_{(0,1,var)} &= N \cdot i_{REF}(0 \to 1) = 100000 \cdot 0,0294 = 2940 \\
Z_{(1,2,var)} &= N \cdot i_{REF}(1 \to 2) = 100000 \cdot 0,0489 = 4890 \\
Z_{(2,3,var)} &= N \cdot \frac{i_{REF}(2 \to 3)}{} = 100000 \cdot 0,0585 = 5850
\end{aligned}$$

Wir konkretisieren die Grafik der Finanzströme mit den konkreten Werten:




Jetzt erfolgt die Barwertberechnung der Festzinsseite ( die Festzinsen werden mit den Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(0\leftarrow t_j)}$) diskontiert:

$$\begin{aligned}
BW_0(Z_{fix,t_j}) &= Z_{fix} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t_j)} \\
BW_0(Z_{fix,1}) &= 5000 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} = 5000 \cdot 0,9714 = 4857 \\
BW_0(Z_{fix,2}) &= 5000 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} = 5000 \cdot 0,9262 = 4631 \\
BW_0(Z_{fix,3}) &= 5000 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} = 5000 \cdot 0,8750 = 4375 \\
BW_0(Z_{fix}) &= 4857 + 4631 + 4375 = 13863
\end{aligned}$$

und die Barwertberechnung der variablen Seite (auch hier werden Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(0\leftarrow t_j)}$ zum Diskontieren genutzt:

$$\begin{aligned}
BW_0(Z_{(t_j,t_{j+1},var)}) &= Z_{(t_j,t_{j+1},var)} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t_j)} \\
BW_0(Z_{(0,1,var)}) &= Z_{(0,1,var)} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} = 2940 \cdot 0,9714 = 2855,92 \\
BW_0(Z_{(1,2,var)}) &= Z_{(1,2,var)} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} = 4890 \cdot 0,9262 = 4529,12 \\
BW_0(Z_{(2,3,var)}) &= Z_{(2,3,var)} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} = 5850 \cdot 0,8750 = 5118,75 \\
BW_0(Z_{var}) &= 2855,92 + 4529,12 + 5118,75 = 12503,78
\end{aligned}$$

Der Barwert $BW_0$ beträgt:

$$BW_0 = BW_0(Z_{fix}) - BW_0(Z_{var}) = 13863 - 12503,78 = 1359,22$$

Die Preisfunktion ist in diesem Fall identisch mit dem Barwert:

$$P_0 = BW_0 = BW_0(Z_{fix}) - BW_0(Z_{var}) = 1359,22$$

Der Barwert und der Wert der Preisfunktion beträgt 1359,22 EUR. Damit entspricht der vereinbarte Festzinssatz nicht den Marktbedingungen und kann nicht als fair bezeichnet werden. Wir können aber posteriori den "fairen" Festzinssatz bestimmen.

$$\begin{aligned}
BW_0 &= BW_0(Z_{fix}) - BW_0(Z_{var}) = BW_0(Z_{fix}) - 12503,78 = 0 \\
BW_0(Z_{fix,fair}) &= 12503,78 \\
Z_{fix} &= N \cdot i_{SWAP,fair} \\
BW_0(Z_{fix,fair}) &= 100000 \cdot i_{SWAP,fair} \cdot 0,9714 + 100000 \cdot i_{SWAP,fair} \cdot 0,9262 + \\
&= +100000 \cdot i_{SWAP,fair} \cdot 0,8750 \\
BW_0(Z_{fix,fair}) &= 100000 \cdot i_{SWAP,fair} \cdot (0,9714 + 0,9262 + 0,8750) \\
i_{SWAP,fair} &= \frac{12503,78}{277.260} = 0,0451
\end{aligned}$$

Der "faire" Festzinssatz sollte $4,51\%$ betragen. Unter diesen Umständen würde der Barwert der Festzinsseite gleich dem Barwert der variablen Seite (mit umgekehrten Vorzeichen) sein und 12503,78 EUR betragen. Daraus ergibt sich ein Barwert $BW_0$ des Swaps zum Zeitpunkt $t = 0$ vom Wert 0. Mit anderen Worten: Um einen marktgerechten Festzinssatz zu verwenden, muss in diesem Beispiel der ursprüngliche Festzinssatz von $5\%$ auf $4,51\%$ korrigiert werden:

$$\begin{aligned}
BW_0(Z_{var}) &= 12503,78 \\
BW_0(Z_{fix,fair}) &= 100000 \cdot i_{SWAP,fair} \cdot (0,9714 + 0,9262 + 0,8750) = \\
&= 100000 \cdot 0,0451 \cdot (0,9714 + 0,9262 + 0,8750) = 12503,78 \\
BW_0 &= BW_0(Z_{fix}) - BW_0(Z_{var}) = 0
\end{aligned}$$

Die Preisfunktion ist identisch mit dem Barwert:

$$P_0 = BW_0 = BW_0(Z_{fix}) + BW_0(Z_{var}) = 0$$

Der Barwert zu einem anderen Zeitpunkt kann auch bei einem Zinssatz von $4,51\%$ von Null abweichen, z. B. zum Zeitpunkt $t = 2$. Es stehen dann noch zwei Zahlungen aus (eine mit festen Zinssatz, eine mit variablen Zinssatz - jeweils zum Zeitpunkt $t = 3$). Zum Zeitpunkt $t = 2$ ist der variable Zinssatz bereits bekannt. Sollte dieser gleich dem Fixzinssatz sein - was sehr unwahrscheinlich ist - , ergäbe sich wiederum ein Barwert $BW_2 = 0$, sonst ein Wert verschieden von Null.

Es sei angenommen, dass der tatsächliche variable Zinssatz $i_{REF}(2 \to 3) = 0,05$ beträgt. Daraus ergeben sich folgende Zinsen der variablen und festen Seite:

$$Z_{(2,3,fest)} = N \cdot i_{SWAP} = 100000 \cdot 0,0451 = 4510$$
$$Z_{(2,3,var)} = N \cdot i_{REF}(2 \to 3) = 100000 \cdot 0,050 = 5000$$

Die entsprechenden Barwerte lauten, wobei der Abzinsfaktor $\hat{q}_{(2\leftarrow 3)} = \frac{1}{1+i_{REF}(2\to 3)} = \frac{1}{1+0,0585} = 0,9942$ ist :

$$BW_2(Z_{fix,3}) = 5000 \cdot \hat{q}_{(2\leftarrow 3)} = 4520 \cdot 0,9942 = 4483,84$$
$$BW_2(Z_{(2,3,var)}) = Z_{(2,3,var)} \cdot \hat{q}_{(2\leftarrow 3)} = 5000 \cdot 0,9942 = 4970,92$$

und:

$$BW_2 = BW_2(Z_{fix,3}) - BW_2(Z_{(2,3,var)}) = 4493,71 - 4970,92 = -487,08$$

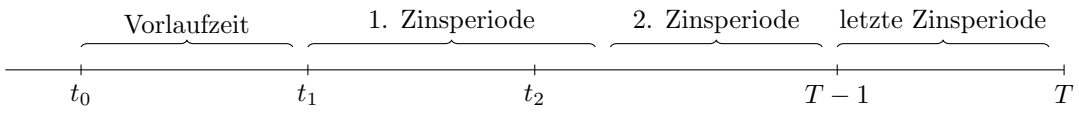
Der Barwert beträgt -487,08 EUR, obwohl zum Zeitpunkt $t = 0$ ein fairer Swapsatz vereinbart wurde.

Die Preisfunktion ist in diesem Fall identisch mit dem Barwert:

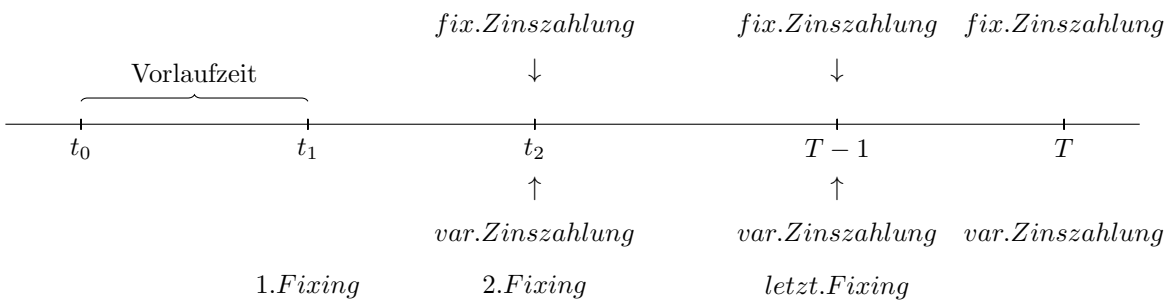
$$P_2 = BW_2 = BW_2(Z_{fix}) - BW_2(Z_{var}) = -487,08$$

### 2.5.2 Forward Swaps

Ein Forward-Swap unterscheidet sich vom Plain Vanilla Swap dadurch, dass der eigentliche Swap erst nach einer Vorlaufzeit beginnt. In der nachfolgenden Grafik ist die Periodisierung eines Forwardswaps dargestellt:




Es wird zum Zeitpunkt $t_0$ eine Vereinbarung über den Swapsatzes $i_{SWAP}$ und die Höhe des Nominalwertes N getroffen. Gleichzeitig wird der Beginn und das Ende der Vorlaufzeit und die Länge und Anzahl der Zinsperioden festgelegt. Im Zeitpunkt $t_1$ erfolgt das erste Fixing des Referenzzinssatzes ($i_{REF}(t_1 \to t_2)$) und es erfolgen zum Zeitpunkt $t_2$ die ersten Zinszahlungen. Zum Zeitpunkt $t_2$ wird wiederum der Referenzzinssatz gefixt ($i_{REF}(t_2 \to t_3)$) und zum Zeitpunkt $t_3$ die Zinszahlungen für die zweite Zinsperiode durchgeführt: Die letzte Zinsperiode dauert vom Zeitpunkt $T-1$ bis zum Zeitpunkt $T$, der gefixte Referenzzinssatz ($i_{REF}(T-1 \to T)$) bestimmt die letzten Zinszahlungen zum Zeitpunkt $T$.




Die Berechnung der Zinszahlungen und der Barwerte beider Seiten ist unter Berücksichtigung der Vorlaufzeit anzupassen.

$$Z_{fix} = Z_{(t_j,t_{j+1},fix)} = N \cdot i_{SWAP} = const \tag{2.22}$$

$$Z_{(t_j,t_{j+1},var)} = N \cdot i_{REF}(t_j \to t_{j+1}) \tag{2.23}$$

$$\Delta_{(t_j,t_{j+1})} = Z_{(t_j,t_{j+1},fix)} - Z_{(t_j,t_{j+1},var)}$$

Die Barwertbestimmung kann zunächst für die Festzinsseite und variable Seite getrennt erfolgen.

Dazu nutzen wir die Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(t_0 \leftarrow t)}$ mit $t = t_1, t_2, ..., t_j, ..., T$, die auf der Basis der Nullkupon-Zinskurve abgeleitet wurden. Dadurch ist es möglich, die bereits berechneten Abzinsfaktoren aus Unterabschnitt 1.5.2 zu nutzen.

$$BW_0(Z_{(t_j,t_{j+1},fix)}) = Z_{(t_j,t_{j+1},fix)} \cdot \hat{q}_{(t_0 \leftarrow t_{j+1})} \tag{2.24}$$

$$BW_0(Z_{(t_j,t_{j+1},var)}) = Z_{(t_j,t_{j+1},var)} \cdot \hat{q}_{(t_0 \leftarrow t_{j+1})} \tag{2.25}$$

$$BW_0(\Delta_{(t_j,t_{j+1})}) = (Z_{(t_j,t_{j+1},fix)} - Z_{(t_j,t_{j+1},var)}) \cdot \hat{q}_{(t_0 \leftarrow t_{j+1})}$$

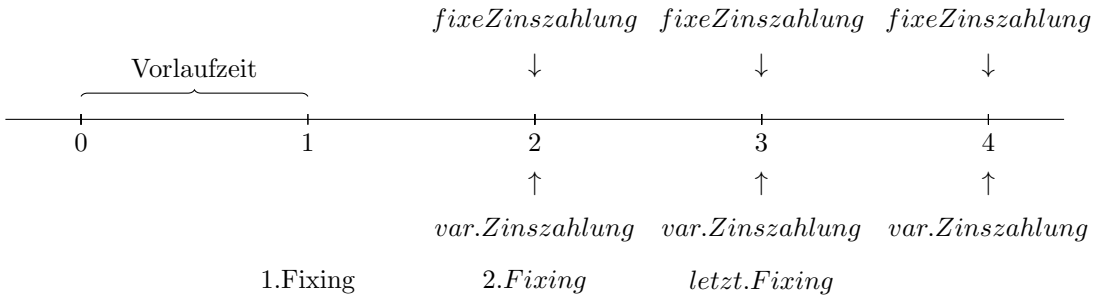
$$BW_0 = \sum_{t=t_2}^{T} BW_0\left[(Z_{(t_j,t_{j+1},fix)}) - BW_0(Z_{(t_j,t_{j+1},var)})\right] \tag{2.26}$$

$$BW_0 = \sum_{t=t_2}^{T} BW_0(\Delta_{(t_j,t_{j+1})})$$

Die variablen Zinsen $i_{REF}(t_j \to t_{j+1})$ sind zum Zeitpunkt $t = t_j$ nicht bekannt (auch für $(t_j = t_0)$). Es werden deshalb die Forwardzinsen verwendet.

**Beispiel:**

Es wird ein Swap bewertet, deren Zinsperioden genau ein Jahr betragen, auch die Vorlaufzeit ist ganzjährig (hier 1 Jahr). Die Laufzeit des Swaps betrage 4 Jahre (inklusive der Vorlaufzeit). Es handelt sich um einen Payer-Swap, d.h. man zahlt feste Zinsen und erhält variable Zinsen. Der Nominalwert des Swaps beträgt 100000 EUR. Der vereinbarte Festzinssatz betrage 5%. Als Referenzzinssatz wird die Nullkupon-Zinskurve gewählt. Die nachfolgende Grafik zeigt die entsprechenden Zahlungen:



Zur Berechnung des Barwertes ziehen wir die Nullkuponzinssätze aus dem Unterabschnitt 1.5.2 heran. Im Unterschied zu Plain-Vanilla-Swaps benötigen wir auch die Nullkuponzinssätze und Abzinsfaktoren mit einer Restlaufzeit von 4 Jahren. Darüber hinaus ist der variable Zinssatz für alle Zinsperioden zum Zeitpunkt $t = 0$ nicht bekannt und es muss auch für die erste Zinsperiode die zukünftigen Zinssätze genutzt werden. Im Vergleich dazu wurde bei Plain Vanilla Swaps für die erste Zinsperiode der zum Zeitpunkt $t = 0$ gefixte Zinssatz verwendet.

| Restlaufzeit | Nullkuponzinssatz | Abzinsfaktoren |
|---|---|---|
| 1 Jahr | $0,0294$ | 0,9714 |
| 2 Jahre | $0,0391$ | 0,9262 |
| 3 Jahre | $0,0455$ | 0,8750 |
| 4 Jahre | $0,0489$ | 0,8262 |

Die Festzinsseite:

$$Z_{fix} = N \cdot i_{SWAP} = 100000 \cdot 0,05 = 5000$$

Die Festzinsen betragen 5000 EUR .

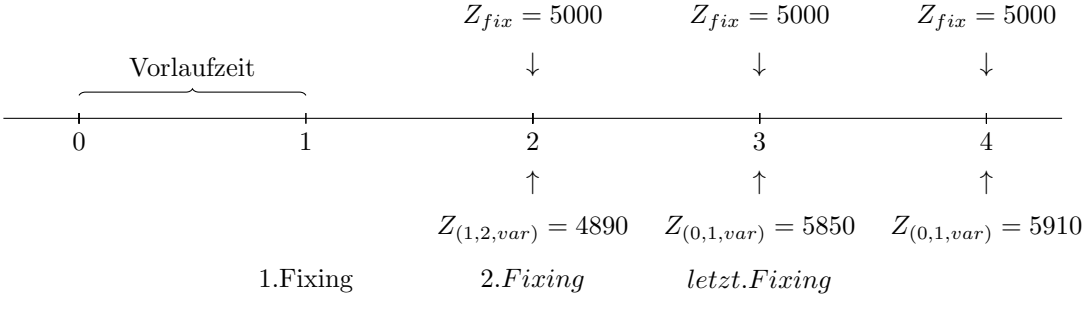
Um die variable Seite zu berechnen benötigen wir die zukünftigen Zinssätze:

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $0,0294$ | $0,0391$ | $0,0455$ | $0,0489$ |
| 1 | | **0,0489** | $0,0536$ | $0,0554$ |
| 2 | | | **0,0585** | $0,0588$ |
| 3 | | | | **0,0591** |

Damit gilt:

$$\begin{aligned} Z_{(t_j,t_{j+1},var)} &= N \cdot i_{REF}(t_j \to t_{j+1}) \\ Z_{(1,2,var)} &= N \cdot i_{REF}(1 \to 2) = 100000 \cdot 0,0489 = 4890 \\ Z_{(2,3,var)} &= N \cdot i_{REF}(2 \to 3) = 100000 \cdot 0,0585 = 5850 \\ Z_{(3,4,var)} &= N \cdot i_{REF}(3 \to 4) = 100000 \cdot 0,0591 = 5910 \end{aligned}$$

Wir konkretisieren das Schema der Finanzströme mit den konkreten Werten:




Zur Barwertberechnug - sowohl der Festzinsseite als auch der variablen Seite - sind die zukünftigen Abzinsfaktoren zu verwenden. Diese sind dem Unterabschnitt 1.5.4 entnommen.

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | **0,9714** | **0,9262** | **0,8750** | **0,8262** |
| 1 | | $0,9534$ | $0,9008$ | $0,8505$ |
| 2 | | | $0,9447$ | $0,8920$ |
| 3 | | | | $0,9442$ |

Jetzt erfolgt die Barwertberechnung der Festzinsseite zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$
\begin{aligned}
BW_0(Z_{fix,t_j}) &= Z_{fix} \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow t_j)} \\
BW_0(Z_{fix,2}) &= 5000 \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow 2)} = 5000 \cdot 0,9262 = 4631 \\
BW_0(Z_{fix,3}) &= 5000 \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow 3)} = 5000 \cdot 0,8750 = 4375 \\
BW_0(Z_{fix,4}) &= 5000 \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow 4)} = 5000 \cdot 0,8262 = 4131 \\
BW_0(Z_{fix}) &= 4631 + 4375 + 4131 = 13137
\end{aligned}
$$

und die Barwertberechnung der variablen Seite zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$
\begin{aligned}
BW_0(Z_{(t_j,t_{j+1},var)}) &= Z_{(t_j,t_{j+1},var)} \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow t_j)} \\
BW_0(Z_{(1,2,var)}) &= Z_{(1,2,var)} \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow 2)} = 4890 \cdot 0,9262 = 4529,12 \\
BW_0(Z_{(2,3,var)}) &= Z_{(2,3,var)} \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow 3)} = 5850 \cdot 0,8750 = 5118,75 \\
BW_0(Z_{(3,4,var)}) &= Z_{(3,4,var)} \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow 4)} = 5910 \cdot 0,8262 = 4882,84 \\
BW_0(Z_{var}) &= 4529,12 + 5118,75 + 4882,84 = 14530,71
\end{aligned}
$$

Der Barwert $BW_0$ beträgt:

$$
BW_0 = BW_0(Z_{fix}) - BW_0(Z_{var}) = 13137 - 14530,71 = -1393,71
$$

Der Barwert beträgt $-1393,71$ EUR. Diesmal muss fixe Seite ausgleichen.

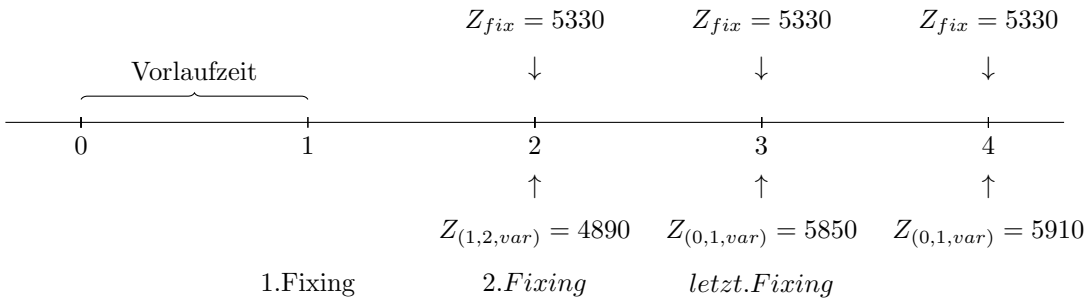
Um einen Barwert $BW_0 = 0$ zu erzielen, muss der Festzinssatz angepasst werden:

$$
\begin{aligned}
BW_0 &= BW_0(Z_{fix}) - BW_0(Z_{var}) = BW_0(Z_{fix}) - 14530,71 = 0 \\
BW_0(Z_{fix,fair}) &= 14530,71 \\
Z_{fix} &= N \cdot i_{SWAP,fair} \\
BW_0(Z_{fix,fair}) &= 100000 \cdot i_{SWAP,fair} \cdot 0,9262 + 100000 \cdot i_{SWAP,fair} \cdot 0,8750 + \\
&\quad + 100000 \cdot i_{SWAP,fair} \cdot 0,8262 \\
BW_0(Z_{fix,fair}) &= 100000 \cdot i_{SWAP,fair} \cdot (0,9262 + 0,8750 + 0,8262) \\
i_{SWAP,fair} &= \frac{14530,71}{262740} = 0,0553
\end{aligned}
$$

Der "faire" Festzinssatz sollte $5,53\%$ betragen. Die Zinsen auf der Festzinsseite betragen nun:

$$
Z_{fix} = N \cdot i_{SWAP} = 100000 \cdot 0,0553 = 5330
$$

Die neuen Zahlungsströme sind in der folgenden Grafik dargestellt:




Der Barwert zum Zeitpunkt $t = 0$ hat den Wert 0, keine Ausgleichszahlung ist nötig.

Auch für Forward Swaps kann die Preisfunktion angegeben werden, sie ist identisch mit dem Barwert.

$$P_0 = BW_0 = BW_0(Z_{fix}) - BW_0(Z_{var})$$

Wie bei Plain Vanilla Swaps können auch Barwerte zu anderen Zeitpunkten berechnet werden. Exemplarisch wird $t = 1$ gewählt, also der Beginn der ersten Zinsperiode oder das Ende der Vorlaufzeit. Wie bei der Bewertung zum Zeitpunkt $t = 0$ stehen noch 3 Zinszahlungen (fix und vaiabel) aus. Für die Berechnung der festen Zinsen wählen wir den "fairen Zinssatz"von $5,53\%$ :

$$Z_{fix} = N \cdot i_{SWAP} = 100000 \cdot 0,0553 = 5330$$

Für die variablen Zinsen ist zu beachten, dass der Bewertungszeitpunkt $t = 1$ ist und zu diesem Zeitpunkt der variable Zinssatz $i_{REF}(1 \to 2)$ festgestellt werden kann. Wir nehmen an, dass der gefixte Zinssatz $i_{REF}(1 \to 2) = 0,0489$ beträgt, d.h. gleich dem zukünftigen Zinssatz $i_{REF}(1 \to 2)$ ist. Die anderen beiden variablen Zinssätze entnehmen wir der Tabelle der zukünftigen Zinssätze:

$$\begin{aligned} i_{REF}(1 \to 2) &= 0,0489 \\ i_{REF}(2 \to 3) &= 0,0585 \\ i_{REF}(3 \to 4) &= 0,0585 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich folgende Teilbarwerte der festen und variablen Seite. Die Abzinsfaktoren sind der Tabelle aus Unterabschnitt 1.5.4 entnommen, diesmal auf den Zeitpunkt $t = 1$:

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,9714 | 0,9262 | 0,8750 | 0,8262 |
| 1 | | **0,9534** | **0,9008** | **0,8505** |
| 2 | | | 0,9447 | 0,8920 |
| 3 | | | | 0,9442 |

Barwert der Festzinsseite zum Zeitpunkt $t = 1$:

$$\begin{aligned} BW_1(Z_{fix,2}) &= 5330 \cdot \hat{q}_{(1 \leftarrow 2)} = 5330 \cdot 0,9534 = 5081,62 \\ BW_1(Z_{fix,3}) &= 5330 \cdot \hat{q}_{(1 \leftarrow 3)} = 5330 \cdot 0,9008 = 4801,26 \\ BW_1(Z_{fix,4}) &= 5330 \cdot \hat{q}_{(1 \leftarrow 4)} = 5330 \cdot 0,8505 = 4533,16 \\ BW_0(Z_{fix}) &= 5081,62 + 4801,26 + 4533,16 = 14416,04 \end{aligned}$$

Barwertberechnung der variablen Seite zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$
\begin{aligned}
Z_{(1,2,var)} &= N \cdot i_{REF}(1 \to 2) = 100000 \cdot 0,0489 = 4890 \\
Z_{(2,3,var)} &= N \cdot i_{REF}(2 \to 3) = 100000 \cdot 0,0585 = 5850 \\
Z_{(3,4,var)} &= N \cdot i_{REF}(3 \to 4) = 100000 \cdot 0,0591 = 5910
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
BW_0(Z_{(1,2,var)}) &= Z_{(1,2,var)} \cdot \hat{q}_{(1\leftarrow 2)} = 4890 \cdot 0,9534 = 4662,13 \\
BW_1(Z_{(2,3,var)}) &= Z_{(2,3,var)} \cdot \hat{q}_{(1\leftarrow 3)} = 5850 \cdot 0,9008 = 5269,68 \\
BW_1(Z_{(3,4,var)}) &= Z_{(3,4,var)} \cdot \hat{q}_{(1\leftarrow 4)} = 5910 \cdot 0,8505 = 5026,45 \\
BW_1(Z_{var}) &= 4662,13 + 5269,68 + 5026,45 = 14958,26
\end{aligned}
$$

Der Barwert $BW_1$ beträgt:

$$
BW_1 = BW_1(Z_{fix}) - BW_1(Z_{var}) = 14416,04 - 14958,26 = -542,22
$$

Obwohl der "'faire Zinssatz"' verwendet wurde ist der Barwert $BW_1$ von Null verschieden. Das erklärt sich dadurch, das nicht zum Zeitpunkt $t = 0$ sondern zum Zeitpunkt $t = 1$ diskontiert wurde.

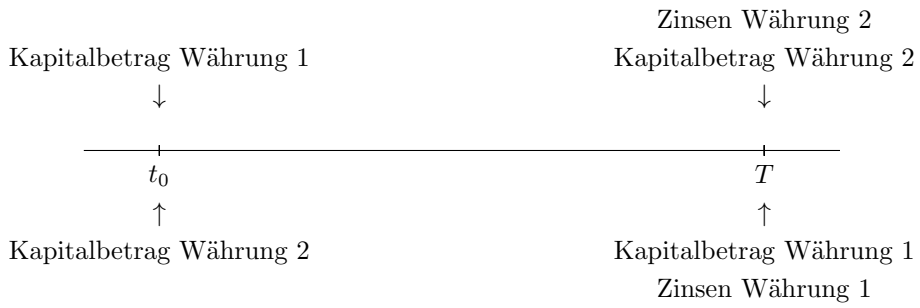
Die Preisfunktion lautet:

$$
P_1 = BW_1 = BW_1(Z_{fix}) - BW_1(Z_{var}) = -542,22
$$

Es existieren weitere Modifikationen von Zinsswaps (in Area Swaps und Constant Maturity Swaps), die jedoch nicht weiter verfolgt werden Es wir auf die spezielle Quellen verwiesen, z.B. siehe [Wie18].

## 2.6 Währungsswaps

Währungsswaps sind ein Tauschgeschäft, bei den die Vertragspartner sich verpflichten, zu einem bestimmten Zeitpunkt zwei Beträge in unterschiedlichen Währungen inklusiv der angefallenen Zinsen auszutauschen. Man unterscheidet Währungsswaps, in denen entweder Festzinssätze in unterschiedlichen Währungen (fixed/fixed currency swap) oder variable Zinssätze getauscht werden(floating/floating currency swap) sowie (cross currency swap) bei der die eine Währung mit einem Festzins versehen, die andere mit einem variablen Zins. Unabhängig von der konkreten Form des Währungsswaps, d.h. der Spezifik des Austausches der Zinsen, werden zu Beginn der Laufzeit Kapitalbeträge in unterschiedlichen Währungen zum tagesaktuellen Wechselkurs getauscht. Sehr häufig sind es Beträge in der Heimatwährung, wenn die Vertragspartner aus unterschiedlichen Ländern kommen. Am Ende der Laufzeit werden die Kapitalbeträge zurückgetauscht, wobei der dann zu verwendende Wechselkurs bei Vertragsabschluss vereinbart wird. Gleichzeitig erfolgt die Verzinsung der Kapitalbeträge entsprechend der Art des Swaps (fixed/fixed oder floating/floating oder floating/fixed bzw, fixed/floating): die anfallenden Zinsen werden am Ende jeder Zinsperiode ausgetauscht. Wir gehen zunächst davon aus, dass die Zinsperiode ein Jahr beträgt und ein Jahreszinssatz bei fixen Zinsen gegeben ist. Bei variablen Zinsen wird der zukünftige Zinssatz verwendet. Die Laufzeit beträgt ebenfalls ein Jahr. Die Finanzströme sind in der nachfolgenden Grafik dargestellt.




Bezeichnungen:

| | |
|---|---|
| $t_0$ | Vertagsabschluss |
| $T$ | Ende der Laufzeit |

Die Kapitalbeträge zum Zeitpunkt $t_0$ werden zum aktuellen Wechselkurs $wk_{t_0}(1,2)$ äquivalent getauscht, zum Zeitpunkt $T$ zum vereinbarten Wechselkurs $wk_T(1,2)$. Dabei bezeichnet $wk_t(1,2)$ den Wechselkurs von Währung 1 zur Währung 2. Auch die Kapitalbeträge und die Zinsen werden so bezeichnet, dass sichtbar ist, in welcher Währung sie berechnet sind $(K_t(1))$ bzw. $(K_t(2))$ sowie $(Z_T(1))$ bzw. $(Z_T(2))$.

Für den Wechselkurs gilt:

$$wk_t(1,2) = \frac{K_t(1)}{K_t(2)}$$

Für die Kapitalbeträge gilt:

$$\begin{aligned}
K_{t_0}(1) &= K_{t_0}(2) \cdot wk_{t_0}(1,2) \\
K_{t_0}(2) &= \frac{K_{t_0}(1)}{wk_{t_0}(1,2)} \\
K_T(1) &= K_T(2) \cdot wk_T(1,2) \\
K_T(2) &= \frac{K_T(1)}{wk_T(1,2)}
\end{aligned}$$

und für die Zinsen:

$$\begin{aligned}
Z_T(1) &= K_{t_0}(1) \cdot i_1(t_0 \to T) \\
Z_T(2) &= K_{t_0}(2) \cdot i_2(t_0 \to T)
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnen:

| | |
|---|---|
| $i_1(t_0 \to T)$ | Zinssatz für die Zinsperiode $(t_0, T)$ in Währung 1 |
| $i_2(t_0 \to T)$ | Zinssatz für die Zinsperiode $(t_0, T)$ in Währung 1 |

Betrachten wir nun die Barwertberechnung. Die Barwertberechnung kann aus der Sicht jeder Vertragspartei erfolgen. Jede der Vertragspartei verfügt zuu Vertagsbeginn über einen Kapitalbetrag in der Heimatwährung, die wir als Währung 1 bezeichnen. Nach dem Kapitaltausch zu Vertragsbeginn verfügen beide Seiten über einen Betrag in Fremdwährung, der Zinsen ebenfalls in Fremdwährung erwirtschaftet. Die Fremdwährung werden wir als Währung 2 bezeichnen. Der Endwert $(K_T(2)$ der Finanzströme in Fremdwährung, also

in Währung 2, beträgt:

$$K_T(2) = K_{t_0}(2) \cdot (1 + i_2(t_0 \to T))$$

Der Endwert in Fremdwährung wird nun zum Wechselkurs $wk_T(1,2)$ in in die Heimatwährung transferiert, man erhält das Äquivalent des Endwertes der Fremdwährung $K_T(2)$ nun in Heimatwährung $K_T^*(1)$:

$$K_T^*(1) = K_T(2) \cdot wk_T(1,2)$$

Für den Besitzer des Kapitals in Währung 1 ergibt sich folgender Endwert $K_T(1)$:

$$K_T(1) = K_{t_0}(1) \cdot (1 + i_1(t_0 \to T))$$

Die Endwerte $K_T^*(1)$ und $K_T(1)$ werden in der Regel nicht übereinstimmen, da die Zinssätze $i_2(t_0 \to T)$ und $i_1(t_0 \to T)$ differieren können. Es stellt sich nun die Frage, welcher Endwert zur Barwertbestimmung mit welchen Abzinsfaktor zu diskontieren ist. Es ergibt sich die gleiche Situation wie bei außerbörslichen Termingeschäften im Abschnitt 2.3, wobei wir dabei die Sicht des Zahlers von EUR eingenommen haben. Beide Endwerte werden mit den jeweiligen wechselkursspezifischen Abzinsfaktoren $\hat{q}_{1,(t_0 \leftarrow T)}$ und $\hat{q}_{2,(t_0 \leftarrow T)}$ diskontiert (d.h. für jede Währung wird ein separater Barwert bestimmt) und dann zu einem gemeinsamen Barwert zusammengeführt.

$$BW_{t_0}(1) = K_T(1) \cdot \hat{q}_{1,(t_0 \leftarrow T)} \tag{2.27}$$
$$BW_{t_0}(2) = K_T(2) \cdot \hat{q}_{2,(t_0 \leftarrow T)} \tag{2.28}$$

Aus Sicht des Zahlers des Kapitalbetrages in Währung 1 bei Vertragsbeginn ergibt sich folgender Barwert:

$$BW_{t_0} = BW_{t_0}(1) - BW_{t_0}(2) \cdot wk_{t_0}(1,2) = K_T(1) \cdot \hat{q}_{1,(t_0 \leftarrow T)} - K_T(2) \cdot wk_{t_0}(1,2) \cdot \hat{q}_{2,(t_0 \leftarrow T)} \tag{2.29}$$

Der Barwert wird in Währung 1 ausgedrückt.

Aus Sicht des Zahlers des Kapitalbetrages in Währung 2 bei Vertragsbeginn ergibt sich folgender Barwert:

$$BW_{t_0} = BW_{t_0}(2) - \frac{BW_{t_0}(1)}{wk_{t_0}(1,2)} = K_T(2) \cdot \hat{q}_{2,(t_0 \leftarrow T)} - \frac{K_T(1)}{wk_{t_0}(1,2)} \cdot \hat{q}_{1,(t_0 \leftarrow T)} \tag{2.30}$$

Der Barwert ist in Währung 2 berechnet.

**Beispiel:**

Das Beispiel lehnt sich an das außerbörsliche Termingeschäft im Abschnitt 2.3 an und wird für Währungsswaps modifiziert.

Es wird im Jahr $t_0$ vereinbart 1000000 EUR zum aktuellen Wechselkurs $wk_{t_0}(EUR, USD) = 0,84 \frac{EUR}{USD}$[2] gegen USD zu tauschen.[3] Damit erhält der Zahler von 1000000 EUR 1190476,19 USD. Nach Ablauf eines Jahres wird der erhaltene Dollarbetrag zum vereinbarten Wechselkurs $wk_T(EUR, USD) = 0,88 \frac{EUR}{USD}$

[2] oder $wk_{t_0}(USD, EUR) = 1,19047619 \frac{USD}{EUR} \approx 1,19 \frac{USD}{EUR}$

[3] für 1 USD erhält man 0,84 EUR bzw. für 1 EUR erhält man etwa 1,19 USD

getauscht. Ebenso werden die Zinsen für 1 Jahr zum gleichen Wechselkurs getauscht. Die Zinssätze (hier Nullkuponzinssätze) in jedem Währungsraum betragen:

$i_{EUR(t_0 \to T)} = 0,04$
$i_{USD(t_0 \to T)} = 0,05$

Die Nullkuponzinsen mit einer Restlaufzeit von 1 Jahr sind:

| Währung | Nullkuponzinssatz | Abzinsfaktoren |
|---|---|---|
| EUR | 0,0294 | 0,9714 |
| USD | 0,035 | 0,9662 |

Die Nullkuponzinssätze für den USD-Währungsraum wurden angenommen und nicht aus Nullkuponanleihen bzw. Kuponanleihen berechnet.

$$K_T(USD) = K_{t_0}(USD) \cdot (1 + i_{USD}(t_0 \to T)) = 1190476,19 \cdot 1,05 = 1250000$$
$$K_T(EUR) = K_{t_0}(EUR) \cdot (1 + i_{EUR}(t_0 \to T)) = 1000000 \cdot 1,04 = 1040000$$

$$BW_{t_0}(USD) = K_T(USD) \cdot \hat{q}_{USD,(t_0 \leftarrow T)} = 1250000 \cdot 0,9662 = 1207750$$
$$BW_{t_0}(EUR) = K_T(EUR) \cdot \hat{q}_{EUR,(t_0 \leftarrow T)} = 1040000 \cdot 0,9714 = 1010256$$

Aus Sicht des Zahlers des Kapitalbetrages in EUR bei Vertragsbeginn ergibt sich folgender Barwert:

$$BW_{t_0}(EUR) = BW_{t_0}(EUR) - BW_{t_0}(USD) \cdot wk_{t_0}(EURUSD) = 1010256 - 1207750 \cdot 0,84 = -4254,00$$

Der Barwert beträgt -4254 EUR.

Aus Sicht des Zahlers des Kapitalbetrages in Währung USD bei Vertragsbeginn ergibt sich folgender Barwert:

$$BW_{t_0}(USD) = BW_{t_0}(USD) - \frac{BW_{t_0}(EUR)}{wk_{t_0}((EUR,USD))} = 1207750 - \frac{1010256}{0,84} = 5064,29$$

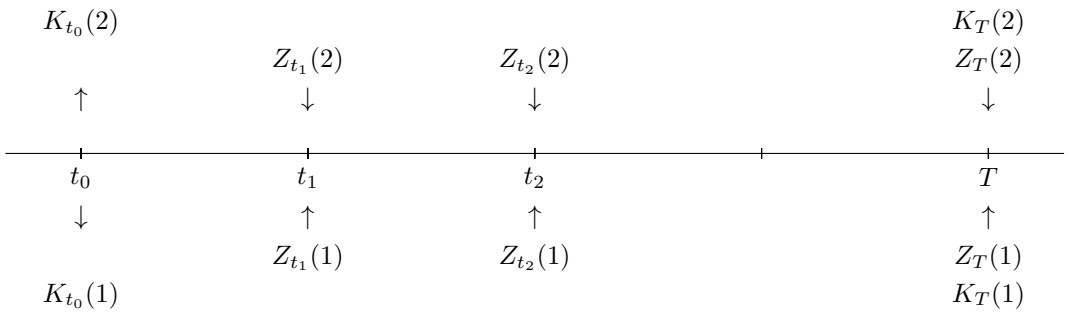
Der Barwert beträgt 5064,29 USD, das sind 4254 EUR zum Wechselkurs zum Zeitpunkt $t_0$. Es gilt selbstverständlich:

$$BW_{t_0}(EUR) = BW_{t_0}(USD) \cdot wk_{t_0}(EURUSD) = 5064,29 \cdot 0,84 = 4254,00$$

bzw.

$$BW_{t_0}(USD) = BW_{t_0}EUR) \cdot \frac{1}{wk_{t_0}(EURUSD)} = 4254,00 \cdot \frac{1}{0,84} = 5064,29$$

Es wird nun der Fall untersucht, dass **mehr als ein Zinszahlungstermin** vorliegt. Falls die Laufzeit ein Vielfaches der Zinsperiode beträgt erfolgen die Zinszahlungen am Ende jeder Zinsperiode in der Fremdwährung, also der Währung, die nach dem Tausch der jeweilige Vertragspartner für den Kapitalbetrag maßgeblich ist. Die dann sich ergebenden Finanzströme sind in folgenden Grafik dargestellt.




Bezeichnungen:

| | |
|---|---|
| $t_0$ | Vertagsabschluss, Austausch der Kapitalbeträge |
| $t$ | Zinszahlungstermine $t = t_1, t_2, ..., T$ |
| $T$ | Ende der Laufzeit, Austausch der Kapitalbeträge |
| $K_{t_0}(1)$ | Kapital in Währung 1 zum Zeitpunkt $t_0$ |
| $K_{t_0}(2)$ | Kapital in Währung 2 zum Zeitpunkt $t_0$ |
| $K_T(1)$ | Kapital in Währung 1 zum Zeitpunkt $T$ |
| $K_T(1)$ | Kapital in Währung 2 zum Zeitpunkt $T$ |
| $Z_{t_1}(1)$ | Zinsen für die Zinsperiode $(t_0, t_1)$ in Währung 1 zum Zinszahlungstermin $t_1$ |
| $Z_{t_2}(1)$ | Zinsen für die Zinsperiode $(t_1, t_2)$ in Währung 1 zum Zinszahlungstermin $t_2$ |
| $Z_T(1)$ | Zinsen für die Zinsperiode $(T-1, T)$ in Währung 1 zum Zinszahlungstermin $T$ |
| $Z_{t_1}(2)$ | Zinsen für die Zinsperiode $(t_0, t_1)$ in Währung 2 zum Zinszahlungstermin $t_1$ |
| $Z_{t_2}(2)$ | Zinsen für die Zinsperiode $(t_1, t_2)$ in Währung 2 zum Zinszahlungstermin $t_2$ |
| $Z_T(2)$ | Zinsen für die Zinsperiode $(T-1, T)$ in Währung 2 zum Zinszahlungstermin $T$ |

Die Kapitalbeträge entsprechen dem im Zeitpunkt $t = t_0$ getauschten Beträge, da die Zinszahlungen für jede Zinsperiode separat berechnet werden, lediglich ist zu beachten, dass der Wechselkurs am Ende der Laufzeit nicht unbedingt mit dem Wechselkurs zu Beginn der Laufzeit übereinstimmen muss:

$$K_T(1) = K_0(2) \cdot wk_T(1,2)$$
$$K_T(2) = \frac{K_T(1)}{wk_T(1,2)}$$

Zur Berechnung der Zinsen muss zwischen der Art des Zins- bzw. Kapitalaustausches (fixed/fixed oder floating/floating oder floating/fixed bzw. fixed/floating) unterschieden werden:

**1. fixed/fixed**:

Werden fixe Zinsen getauscht, müssen die fixen Zinssätze ($i_{fix,1}(t_j \to t_{j+1})$ für Währung 1 und $i_{fix,2}(t_j \to t_{j+1})$ für Währung 2 jeweils in der Zinsperiode $(t_j, t_{j+1})$) für jede der Währungen vereinbart sein.

$$Z_{fix}(1) = K_{t_0}(1) \cdot i_{fix,1}(t_j \to t_{j+1})$$
$$Z_{fix}(2) = K_{t_0}(2) \cdot i_{fix,2}(t_j \to t_{j+1})$$

**2. floating/floating**:

Werden variable Zinsen vereinbart, müssen Referenzzinssätze für jede Währung vereinbart werden, die jeweils am fixing day bestimmt werden. Wie auch bei Swaps ist der erste fixing day am Ende der ersten Zinsperiode (oder am Anfang der zweiten Zinsperiode). Die gefixten Zinssätze für jede Währung ist dann für die Zinsperiode $(t_1, t_2)$ zur Berechnung der Zinsen anzuwenden. Der gefixte Zinssatz für Währung 1 wird mit $i_{REF,1}(t_1 \to t_2)$ und für Währung 2 mit $i_{REF,2}(t_1 \to t_2)$ bezeichnet. Für die Zinsperiode $(t_j, t_{j+1})$) lauten die Zinssätze $i_{REF,1}(t_j \to t_{j+1})$ und $i_{REF,1}(t_j \to t_{j+1})$. Die Zinsberechnungen sind die

folgende:

$$Z_{REF,(t_j,t_{j+1})}(1) = K_{t_0}(1) \cdot i_{REF,1}(t_j \to t_{j+1})$$
$$Z_{REF,(t_j,t_{j+1})}(2) = K_{t_0}(2) \cdot i_{REF,2}(t_j \to t_{j+1})$$

**3. floating/fixed oder fixed/floating**:

Nur die Zinsberechnung unterscheidet sich von den vorangegangenen Darstellungen. Für einen der Vertragspartner werden Zinsen auf der Basis eines variablen Zinssatzes $i_{REF,1}(t_j \to t_{j+1})$ berechnet, für den anderen Vertragspartner kommt ein fester zinssatz zur Anwendung $i_{fix,2}(t_j \to t_{j+1})$ :

$$Z_{REF,(t_j,t_{j+1})}(1) = K_{t_0}(1) \cdot i_{REF,1}(t_j \to t_{j+1})$$
$$Z_{fix}(2) = K_{t_0}(2) \cdot i_{fix,2}(t_j \to t_{j+1})$$

Der Barwert kann für jede Währung separat berechnet werden. Dazu sind alle Zinszahlungen und der am Ende auszutauschende Kapitalbetrag abzuzinsen.

$$BW_{t_0}(1) = \sum_{j=1}^{T-1} Z_j(1) \cdot \hat{q}_{1,(0\leftarrow j)} + (K_{t_0}(1) + Z_j(1)) \cdot \hat{q}_{1,0\leftarrow T)} \tag{2.31}$$

$$BW_{t_0}(2) = \sum_{j=1}^{T-1} Z_j(2) \cdot \hat{q}_{2,(0\leftarrow j)} + (K_{t_0}(2) + Z_j(2)) \cdot \hat{q}_{(2,0\leftarrow T)} \tag{2.32}$$

Aus Sicht des Zahlers des Kapitalbetrages in Währung 1 bei Vertragsbeginn ergibt sich folgender Barwert:

$$BW_{t_0} = BW_{t_0}(1) - BW_{t_0}(2) \cdot wk_{t_0}(1,2) \tag{2.33}$$

Der Barwert wird in Währung 1 ausgedrückt. Aus Sicht des Zahlers des Kapitalbetrages in Währung 2 bei Vertragsbeginn ergibt sich folgender Barwert:

$$BW_{t_0} = BW_{t_0}(2) - \frac{BW_{t_0}(1)}{wk_{t_0}(1,2)} \tag{2.34}$$

Dieser Barwert wird in Währung 2 ausgedrückt.

**Beispiel:**

Es wird im Jahr $t_0 = 0$ vereinbart 1000000 EUR zum aktuellen Wechselkurs $wk_{t_0}(EUR, USD) = 0,84\frac{EUR}{USD}$ gegen USD zu tauschen. Damit erhält der Zahler von 1000000 EUR 1190476,19 USD. Nach Ablauf zweier Jahre wird der erhaltene Dollarbetrag zum Wechselkurs $wk_T(EUR, USD) = 0,88\frac{EUR}{USD}$ wieder zurückgetauscht. Hinsichtlich der Zinsen wird vereinbart: Der Dollarbetrag wird zum festen Jahreszinssatz von $3,5\%$ verzinst, es existieren zwei Zinszahlungstermin $t_1 = 1$ und $T = 2$ an denen der Besiter des Dollarbetrages die Zinsen in USD ausgezahlt werden. Der EUR-Betrag wird anhand eines Referenzzinssatzes zu den Zeitpunkten $t_0 = 0$ und $t_1 = 1$ berechnet und an den EURO-Besitzer zu den Zinsterminen in EUR ausgezahlt. Der Einfachheit halber sei der Referenzzinssatz der Nullkuponzinssatz:

Zum Zeitpunkt $t = 0$ gelten folgende Marktbedingungen:

$wk_0(EUR, USD) = 0,84\frac{EUR}{USD}$

$i_{EUR,real(0\to1)} = 0,0294$
$\hat{q}_{EUR(0\leftarrow1)} = 0,9714$
$i_{EUR,real(1\to2)} = 0,0391$
$\hat{q}_{EUR(1\leftarrow2)} = 0,9262$
$i_{USD,real(0\to1)} = 0,035$
$\hat{q}_{USD(0\leftarrow1)} = 0,9662$
$i_{USD,real(1\to2)} = 0,040$
$\hat{q}_{USD(1\leftarrow2)} = 0,9246$

Die Nullkuponzinssätze für den USD-Währungsraum wurden angenommen und nicht aus Nullkuponanleihen bzw. Kuponanleihen berechnet.

Zunächst werden die Zinsen berechnet:

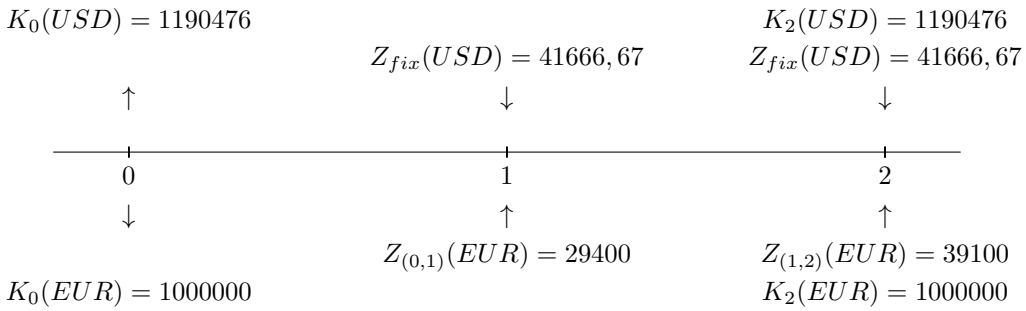
1. USD:

$$Z_{fix}(USD) = K_{00}(USD) \cdot i_{fix,USD}$$
$$Z_{fix}(USD) = 1190476,19 \cdot 0,035 = 41666,67$$

2. EUR:

$$Z_{(0,1)}(EUR) = K_0(EUR) \cdot i_{EUR,real(0\to1)}$$
$$Z_{(1,2)}(EUR) = K_0(EUR) \cdot i_{EUR,real(1\to2)}$$
$$Z_{(0,1)}(EUR) = K_0(EUR) \cdot i_{EUR,real(0\to1)} = 1000000 \cdot 0,0294 = 29400$$
$$Z_{(1,2)}(EUR) = K_0(EUR) \cdot i_{EUR,real(1\to2)} = 1000000 \cdot 0,0391 = 39100$$

Die Kapitalbeträge in EUR ($K_0(EUR) = 1000000$) und USD ($K_0(USD) = 1190476,19$) beim Vertragsabschluss bzw. am Laufzeitende sind bekannt. In der folgenden Grafik sind alle Finanzströme dargestellt:




Nun sind die Barwerte für EUR und USD separat zu bestimmen:

$$BW_0(USD) = Z_{fix}(USD) \cdot \hat{q}_{USD,(0\leftarrow1)} + (K_0(USD) + Z_{fix}(USD)) \cdot \hat{q}_{USD,0\leftarrow2)}$$
$$BW_0(USD) = 41666,67 \cdot 0,9662 + 1232142,86 \cdot 0,9246 = 1179497,62$$
$$BW_0(EUR) = Z_{(0,1)}(EUR) \cdot \hat{q}_{EUR,(0\leftarrow1)} + (K_0(EUR) + Z_{1,2})(EUR)) \cdot \hat{q}_{EUR,0\leftarrow2)}$$
$$BW_0(EUR) = 29400 \cdot 0,9714 + 1039100 \cdot 0,9262 = 990973,58$$

Aus Sicht des Zahlers des Kapitalbetrages in EUR bei Vertragsbeginn ergibt sich folgender Barwert:

$$BW_0 = BW_0(EUR) - BW_0(USD) \cdot wk_0(EUR, USD) = 990973,58 - 1179497,62 \cdot 0,84 = 195,57$$

Der Barwert beträgt 195,57 EUR.

Aus Sicht des Zahlers des Kapitalbetrages in Währung USD bei Vertragsbeginn ergibt sich folgender Barwert:

$$BW_0 = BW_0(USD) - \frac{BW_0(EUR)}{wk_0((EUR, USD))} = 1179497,62 - \frac{990973,58}{0,84} = -232,83$$

Der Barwert beträgt -232,83 USD, das sind -195,57 EUR zum Wechselkurs zum Zeitpunkt $t_0$.

Die Preisfunktion ist in diesem Fall identisch mit dem Barwert:

$$P_0 = BW_0 = BW_0(EUR) - BW_0(USD) \cdot wk_0(EUR, USD) = 195,57$$

bzw.

$$P_0 = BW_0 = BW_0(USD) - \frac{BW_0(EUR)}{wk_0((EUR, USD))} = -232,83$$

Der Barwert $BW_1$ kann analog berechnet werden. Es stehen nur noch Zahlungen für den Zeitpunkt $T = 2$ aus. Diese müssen dann mit den Nullkuponabzinsfaktoren $\hat{q}_{EUR,(1\leftarrow 2)}$ bzw. $\hat{q}_{USD,(1\leftarrow 2)}$ diskontiert werden
Zum Zeitpunkt $t = 1$ werden folgende Marktbedingungen erwartet:

$wkt_1(EUR, USD) = 0,83 \frac{EUR}{USD}$
$i_{EUR,real(1\rightarrow 2)} = 0,0489$[4]
$\hat{q}_{EUR(1\leftarrow 2)} = 0,9534$[5]
$i_{USD,real(1\rightarrow 2)} = 0,05$[6]
$\hat{q}_{USD(1\leftarrow 2)} = 0,9524$[7]

Es werden wiederum die Barwerte für jede Währung berechnet:

$$BW_1(USD) = (K_0(USD) + Z_{fix}(USD)) \cdot \hat{q}_{USD,1\leftarrow 2}$$
$$BW_1(USD) = 1232142,86 \cdot 0,9524 = 1173492,86$$
$$BW_1(EUR) = (K_0(EUR) + Z_{(1,2)}(EUR)) \cdot \hat{q}_{EUR,1\leftarrow 2}$$
$$BW_1(EUR) = 1039100 \cdot 0,9534 = 990677,94$$

Aus Sicht des Zahlers des Kapitalbetrages in EUR bei Vertragsbeginn ergibt sich folgender Barwert:

$$BW_1 = BW_1(EUR) - BW_1(USD) \cdot wk_1(EUR, USD) = 990.677,94 - 1173492,86 \cdot 0,83 = 16679,58$$

[4] bekannt als zukünftiger Zinssatz aus Unterabschnitt 1.5.4
[5] bekannt als zukünftiger Abzinsfaktor aus Unterabschnitt 1.5.4
[6] hier angenommen
[7] berechnet aus $i_{USD,real(1\rightarrow 2)}$

Der Barwert beträgt 16679,58 EUR. Die Preisfunktion lautet:

$$P_1 = BW_1 = BW_1(EUR) - \frac{BW_1(USD)}{wk_1((EUR, USD))}$$

Aus Sicht des Zahlers des Kapitalbetrages in Währung USD bei Vertragsbeginn ergibt sich folgender Barwert:

$$BW_1 = BW_1(USD) - \frac{BW_1(EUR)}{wk_1((EUR, USD))} = 1173492,86 - \frac{990.677,94}{0,83} = -20095,02$$

Der Barwert beträgt -20095,02 USD, das sind -16679,58 EUR zum Wechselkurs zum Zeitpunkt $t_1$.

Die Preisfunktionen lautet:

in EUR

$$P_1 = BW_1 = BW_1(EUR) - \frac{BW_1(USD)}{wk_1((EUR, USD))} = 16679,58$$

bzw. in USD

$$P_1 = BW_1 = BW_1(USD) - \frac{BW_1(EUR)}{wk_1((EUR, USD))} = -20095,02$$

## 2.7 Goldswaps

Bei einem Goldswap (Gold-Tausch) verleiht man für eine vereinbarte Dauer und festgelegten Preis Gold gegen Devisen. Dies hilft kriselnden Ländern sich kurzfristig Liquidität zu verschaffen. Besonders in Ländern, die über Goldreserven verfügen oder sogar selbst Gold fördern, verleihen die Zentralbanken kurzfristig Gold, um ihre Volkswirtschaft mit Fremdwährungen zu versorgen. Sie erhalten dafür frei konvertierbare Fremdwährungen, die allerdings nach Ablauf der vereinbarten Frist mit Zinsen zurückzuzahlen sind . Besonders einfach gestaltet sich das Geschäft, wenn die Goldreserven - zumindest teilweise - in ausländischen Banken deponiert sind. Diese bieten besonders verschuldeten Entwicklungsländern Goldswaps an. Es handelt sich dabei um ein Warentermingeschäft, das außerbörslich abgewickelt wird (OTC-Geschäfte). Die Vertragsgestaltung ist nicht standardisiert. Zur Bewertung eines Goldswaps benötigt man neben den Zinssätzen der Fremdwährung auch den Goldpreis. Dieser wird an den Börsen täglich notiert.

Ein Goldswap funktioniert wie ein Währungsswaps, wobei der Goldpreis als Wechselkurs zu einer Fremdwährung zu interpretieren ist. Das besondere am Goldswap ist die Tatsache, dass Gold im Unterschied zum Kapital in Fremdwährung keine Zinsen produziert.

Beispiel:

Eine Zentralbank, die über Goldreserven verfügt, möchte ein Teil dieser Goldreserve gegen EUR tauschen. Das Geschäft wird am Londoner Goldmarkt (ein OTC-Markt) abgewickelt. Gewöhnlich werden 5000 Unzen (eine Feinunze Gold - 1 oz - hat ein Gewicht von 31,1034768 g) gehandelt. 5000 Feinunzen entsprechen etwa 155517 g = 155,517 kg. Die Zentralbank leiht für 1 Monat einer Bank 5000 Feinunzen Gold und erhält dafür zum aktuellen Kurs EUR/USD von 0,84 und einem Goldpreis von 1780 USD / Feinunze Gold 7476000 EUR ($K_{t_0}(EUR)$). Nach einem Monat ist ein EUR-Betrag + Zinsen zurückgezahlt,

wobei als Referenzzinssatz Euribor mit einer Laufzeit von 1 Monat gewählt wird. Das Fixing wird zu Vertragsbeginn vorgenommen. Es wird vereinbart, am Ende der Laufzeit den Gegenwert von 5000 Unzen Feingold zum aktuellen Goldpreis und aktuellen Wechselkurs zurückzuzahlen. Der gefixte Euribor beträgt 0,0275 p/a ($i_{EURIBOR}(t_0) = 0,0275$). Der Wechselkurs am Laufzeitende beträgt $0,83 \frac{EUR}{USD}$, der Goldpreis einer Unze Feingold 1750 USD. Die Zentralbank hat dann unter Beachtung des aktuellen Goldpreises und Wechselkurs 7262500 EUR ($1750 \cdot 0,83 \cdot 5000$) plus Zinsen zu zahlen.

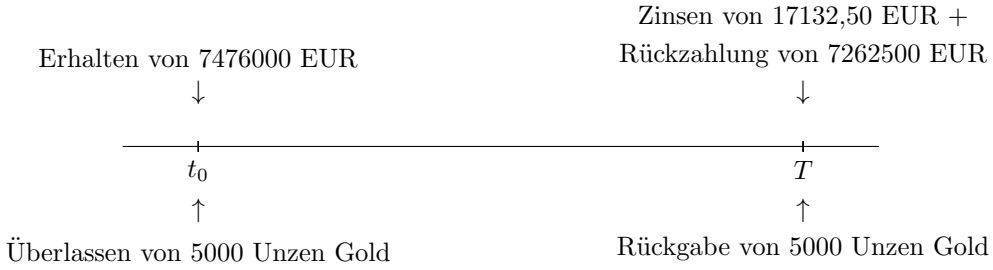
Die Zinsen betragen:

$$Z_T(EUR) = K_{t_0}(EUR) \cdot i_{EURIBOR}(t_0 \to T) = K_{t_0}(EUR) \cdot i_{EURIBOR}(t_0) \cdot \frac{1}{12} =$$
$$= 7476000 \cdot 0,0275 \cdot \frac{1}{12} = 17132,50$$

Der zurückzuzahlende Betrag in EUR beläuft sich auf $7262500+17132,50 = 7279632,50$ EUR. Offensichtlich hat die Zentralbank ein vorteilhaftes Geschäft gemacht, denn der anfangs erhaltene EURO-Betrag ist deutlich höher als der zum Laufzeitende zu zahlende Betrag. Man muss allerdings beachten, das zum Vertragsabschluss Goldpreis und Wechselkurs nicht bekannt waren. Die Zentralbank ging möglicherweise von einem fallenden Goldpreis und einem fallenden Wechselkurs EUR/USD aus und hatte damit Recht.

Wäre der Goldpreis gestiegen (auf 1800 USD) und der EUR/USD-Kurs ebenfalls angewachsen auf 0,85 EUR/USD, dann ergibt sich ein Rückkaufpreis von 7650000 EUR ($1800 \cdot 0,85 \cdot 5000 = 7650000$). Es wären $7650000 + 17132,50 = 7667132,50$ EUR beim Rückkauf der 5000 Feinunzen zu zahlen gewesen, also deutlich mehr als man anfangs erhalten hat. Es wird deutlich, dass ein Goldswap sehr risikobehaftet ist, da Unsicherheit hinsichtlich Wechselkurs und Goldpreis besteht.

Die Finanzströme aus der Sicht der Zentralbank sind in der folgenden Grafik dargestellt:




Häufig schließt sich dem Goldswap ein weiterer Goldswap mit analogen Bedingungen an, so dass die Zentralbank über einen längeren Zeitraum den Finanzbedarf an Fremdwährung abdecken kann.

Die Barwertbestimmung gestaltet sich schwierig, da sowohl Goldpreis und Wechselkurs zu Beginn der Laufzeit nicht bekannt sind und mit Hilfe finanzmathematischer Instrumente nicht vorhergesagt werden können. Wie werden deshalb das Beispiel so modifizieren, dass alle zukünftigen Zahlungen bereits zu Beginn der Laufzeit bekannt sind. Folgende Modifikationen werden vorgenommen:

1. Der Goldpreis wird nicht auf Dollar- sondern Eurobasis bestimmt. Damit entfällt die Notwendigkeit den Wechselkurs zu berücksichtigen.

2. Es wird nicht, wie im Beispiel, der aktuelle Goldpreis am Laufzeitende zur Berechnung der Rückzahlung verwendet, sondern ein Goldpreis vereinbart, zu dem das Gold zurückgekauft werden soll.

Der in EUR dotierte Goldpreis sei $1495,20 \frac{EUR}{Feinunze\ Gold}$ am Beginn der Laufzeit. (bei einem Goldpreis von 1780 $\frac{USD}{Feinunze\ Gold}$ und einem Wechselkurs von $wk_{t_0}(EUR, USD) = 0,84 \frac{EUR}{USD}$).

Wir verwenden die oben beschriebene Situation für den Zeitpunkt T, fassen aber Goldpreis und Wechselkurs am Ende der Laufzeit nicht als Risikofaktor auf, sondern als vereinbarte Größe. Daraus resultiert folgender Goldpreis in EUR: 1495,00 $\frac{EUR}{Feinunze\ Gold}$ (Der Goldpreis in USD ist gleich 1750 $\frac{USD}{Feinunze\ Gold}$, der Wechselkurs betrage $wk_{t_0}(EUR, USD) = 0,83\frac{EUR}{USD}$ und der Goldpreis in EUR $1750 \cdot 0,83\frac{EUR}{USD} = 1452,50\frac{USD}{Feinunze\ Gold}$).

Zum Zeitpunkt $t_0$ der Barwertberechnung steht nur eine Zahlung aus: 7279632,50 EUR zum Zeitpunkt T. Im Gegenzug erhält die Zentralbank die 5000 Feinunzen Gold zurück. Der Barwert der einzigen Zahlung kann berechnet werden, indem die Zahlung von 7279632,50 EUR mit Hilfe des Euribors abgezinst wird.

$$\begin{aligned} BW_{t_0} &= 7279632,50 \cdot \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(t_0 \to T)} = \\ &= 7279632,50 \cdot \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(t_0) \cdot \frac{1}{12}} = \\ &= 7279632,50 \cdot \frac{1}{1 + 0,0275 \cdot \frac{1}{12}} = 7262988,15 \end{aligned}$$

Der Barwert der einzigen, noch ausstehenden, Zahlung beträgt 7262988,15 EUR. Dieser Betrag ist zu vergleichen mit dem erhaltenen EURO-Betrag zum Zeitpunkt $t = 0$ von 7476000 EUR für das überlassene Gold. Die Preisfunktion beträgt folglich:

$$P_{t_0} = K_{t_0}(EUR) - BW_{t_0} = 7476000 - 7262988,15 = 213011,85$$

Betrachten wir den andere diskutierte Fall. Der Goldpreis in USD ist gleich 1800 $\frac{USD}{FeinunzeGold}$, der Wechselkurs betrage $wk_{t_0}(EUR, USD) = 0,85\frac{EUR}{USD}$ und der Goldpreis in EUR $1800 \cdot 0,85\frac{EUR}{USD} = 1530,00$), ergibt sich folgendes Bild: Für den Rückkauf der 5000 Feinunzen Gold sind nun 7650000 EUR zu zahlen ($1530 \cdot 5000 = 7650000$). Dieser Betrag ist zur Bestimmung des Barwertes der ausstehenden Zahlung mit $\frac{1}{1+i_{EURIBOR}(t_0 \to T) \cdot \frac{1}{12}} = 0,9977$ abzuzinsen.

$$\begin{aligned} BW_{t_0} &= 7667132,50 \cdot \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(t_0 \to T)} = \\ &= 7667132,50 \cdot \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(t_0) \cdot \frac{1}{12}} = \\ &= 7667132,50 \cdot \frac{1}{1 + 0,0275 \cdot \frac{1}{12}} = 7667132,50 \cdot 0,9977 = 7649602,16 \end{aligned}$$

Die Preisfunktion beträgt folglich:

$$P_{t_0} = K_{t_0}(EUR) - BW_{t_0} = 7476000 - 7649602,16 = -173602,16$$

Es wird deutlich, dass unter diesen Umständen das Geschäft für die Zentralbank nicht vorteilhaft ist.

## 2.8 Festverzinsliche Anleihen - Straight Bonds

Weitverbreitetes Finanzprodukte sind **festverzinsliche Anleihen**, die auch **Straight Bonds** genannt werden. In der Regel ist die Zinsperiode ein Jahr. Die Zinszahlungstermine können am Ende der Zinsperiode liegen, dann erfolgt eine jährliche Zinszahlung. Verbreitet sind aber auch unterjährige Zinszahlungen. Bei festverzinslichen Anleihen bleibt der Zinssatz über die gesamte Laufzeit konstant. Eine besondere festverzinsliche Anleihe sind die Nullkupon-Anleihen (Zerobonds), wo der einzige Zinszahlungstermin am Ende der Laufzeit liegt.

Festverzinsliche Anleihen können von vom Staat (Bundesanleihen), von Kommunen (Kommunalanleihen) und anderen öffentlichen Einrichtungen emittiert werden. Darüber hinaus können Banken (Bankobligationen) und Unternehmen (Industrieanleihen bzw. Industrieobligationen) Anleihen begeben. Sie können, müssen aber nicht, an Börsen gehandelt werden, also können den Besitzer wechseln.

Während öffentliche Anleihen weitgehend kein Ausfallrisiko haben sind, muss bei Banken und Unternehmen von einem Bonitätsrisiko ausgegangen werden. Die Risikoproblematik - auch von festverzinslichen Anleihen - wird ausführlich im Kapitel 3 bsprochen.

An dieser Stelle soll von den Besonderheiten, die auf den Emittenten der festverzinslichen Anleihen zurückzuführen sind, nicht weiter eingegangen werden. Hier interessieren ausschließlich die Struktur der Finanzströme und die dadurch resultierenden Spezifikationen bei der Berechnung der Barwerte des Finanzproduktes. Gemeinsam ist allen festverzinslichen Anleihen, dass ein fixiertes Kapitalvolumen - genannt **Nominalwert** - im Laufe der Laufzeit Zinsen erwirtschaftet (dazu wird in konstanter Zinssatz - genannt **Nominalzinssatz** festgelegt), die zu definierten Zinsterminen ausgezahlt werden. Am Ende der Laufzeit erfolgt eine weitere Auszahlung: der Nominalwert der Anleihe.

Folgende Requisiten sind für eine festverzinsliche Anleihe notwendig:

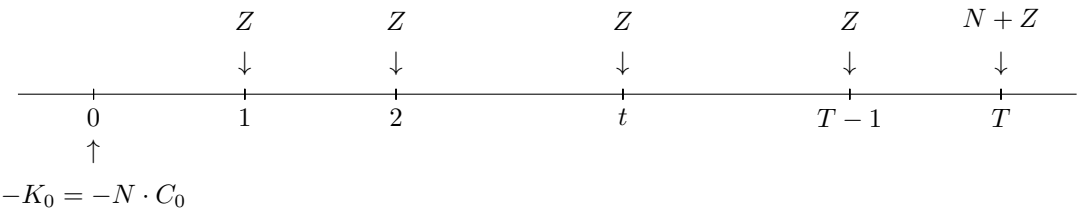
| | | |
|---|---|---|
| Nominalwert | - | $N$ |
| Nominalzinssatz | - | $i_{nom}$ |
| Laufzeit | - | $T$ |
| Zinsperiode | - | jährlich, unterjährig |
| Zinszahlungstermin(e) | - | jährlich. unterjährig, am Ende der Laufzeit |
| Zinshöhe | - | wird aus Nominalwert und Nominalzinssatz unter Berücksichtigung der Zinsperiode und der(s) Zinszahlungstermine(s) berechnet. Bezeichnung: Z |

Die Zinsberechnung erfolgt mit Hilfe der Formel:

$$Z = N \cdot i_{nom} \tag{2.35}$$

Am Ende der Laufzeit wird der Nominalwert der Anleihe zurückgezahlt. Der Erwerber einer festverzinslichen Anleine zahlt am Emissionszeitpunkt den Kaufpreis der Anlage zum Ausgabekurs. Nur wenn der Ausgabekurs $C = 100\%$ ist, ist der Kaufpreis mit dem Nominalwert der Anleihe identisch. Die Anleihe kann, aber muss nicht, zum Emissionszeitpunkt erworben werden. Sie kann zu jedem beliebigen Zeitpunkt zum aktuellen Kurs gekauft werden, wenn sie zur Verfügung steht. Möglicherweise fallen für den Erwerber noch weiter Kosten an, die mit dem technischen Aufwand der Kaufabwicklung zu erklären sind. Diese Kosten werden hier nicht berücksichtigt.

Die Zahlungsströme eine festverzinslichen Anleihe sind in der nachfolgenden Grafik dargestellt. Die Anleihen wird zum Ausgabekurs $C_0$ am Ausgabetag erworben. Der Kaufpreis $K_0$ beträgt $K_0 = N \cdot C_0$. Darüber hinaus setzen wir voraus, dass alle Zinszahlungen $Z_t$ am Ende der Zinsperiode $(t-1, t)$ fällig werden:




Für alle festverzinslichen Anleihen wählen wir als **Beispiel** einen Bonds mit einer Laufzeit von 4 Jahren. Damit können die Nullkuponzinssätze und Nullkupon-Abzinsfaktoren aus dem Unterabschnitt 1.5.2 verwendet werden.

| Restlaufzeit | Nullkuponzinssatz | Abzinsfaktoren |
|---|---|---|
| 1 Jahr | 0, 0294 | 0,9714 |
| 2 Jahre | 0, 0391 | 0,9262 |
| 3 Jahre | 0, 0455 | 0,8750 |
| 4 Jahre | 0, 0489 | 0,8262 |

### 2.8.1 Festverzinsliche Anleihen mit jährlicher Zinszahlung

Eine festverzinsliche Anleihe (Bond) mit jährlichen Zinszahlungen bei Zinsperioden von einem Jahr und einer Laufzeit von T Jahren besteht aus T-1 konstanten Zahlungen (identisch mit den Zinszahlungen $Z_t$), einer einmaligen Zahlung beim Erwerb der Anleihe $K_0$ - mit negativem Vorzeichen - und der letzten Zahlung am Ende der Laufzeit, bestehend aus Zinsen für die letzte Zinsperiode $Z_T$ und den Nominalbetrag $N$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass der Erwerber der Anleihe diese zum Ausgabekurs am Ausgabetag erwirbt. Zur Berechnung des Barwertes $BW_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ ist jede der Zahlungen mit Hilfe der ganzjährigen Nullkupon-Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(0\leftarrow t)}$ mit $t = 0, 1, 2, ..., T$ abzuzinsen. Der so berechnete Barwert bezieht sich auf alle Zahlungen, die der Erwerber eines Bonds ab Zeitpunkt $t = 0$ bekommen wird. Er gibt an, welcher Betrag zum Zeitpunkt $t = 0$ zu zahlen wäre, um den gleichen Effekt wie die Zahlungen aus den Bonds zu erzielen. Kurz der so berechnet Barwert entspricht dem fairen Preis des Bonds.

$$BW_0 = \sum_{j=1}^{T-1} Z_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow j)} + (N + Z_T) \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)} \tag{2.36}$$

Die Preisfunktion, die neben dem Barwert auch die geleistete Zahlung zum Erwerb der Anleihe ($K_0$ - mit negativem Vorzeichen versehen, da der Betrag vom Erwerber zuzahlen ist) berücksichtigt, lautet:

$$P_0 = BW_0 - K_0 = \sum_{j=1}^{T-1} Z_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow j)} + (N + Z_T) \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)} - K_0 \tag{2.37}$$

$K_t$ ist der Betrag, der zum Erwerb der Anleihe im Zeitpunkt $t$ zu zahlen ist.

Der Barwert $BW_0$ zum Ausgabetag $t = 0$ ist der rechnerische oder faire Preis der Anleihe. Welcher Preis an der Börse tatsächlich für die Anleihe gezahlt wird, hängt von weiteren Faktoren, wie Bonität, Nachfrage ab, die an dieser Stelle nicht weiter diskutiert werden sollen. Aus dem Barwert und dem Nominalwert der Anleihe N lässt sich der Kurs $C_0$ berechnen. Ist der Barwert gleich dem Nominalwert N, so ist der Kurs der Anleihe gleich 100%. :

$$C_0 = \frac{BW_0}{N} \tag{2.38}$$

Nun sollen Barwert $BW_t$, die Preisfunktion $P_t$ und der Kurs der Anleihe $C_t$ zum Zeitpunkt t bestimmt werden. Dazu benötigt man die zukünftigen Zinssätze bzw. die zukünftigen Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(t\leftarrow j)}$ mit j =t+1, t+2, ..., T.

$$BW_t = \sum_{j=t+1}^{T-1} Z_t \cdot \hat{q}_{(t\leftarrow j)} + (N + Z_T) \cdot \hat{q}_{(t\leftarrow T)} \tag{2.39}$$

Die Preisfunktion lautet:

$$P_t = BW_t - K_t = \sum_{j=t+1}^{T-1} Z_t \cdot \hat{q}_{(t\leftarrow j)} + (N + Z_T) \cdot \hat{q}_{(t\leftarrow T)} - K_t \tag{2.40}$$

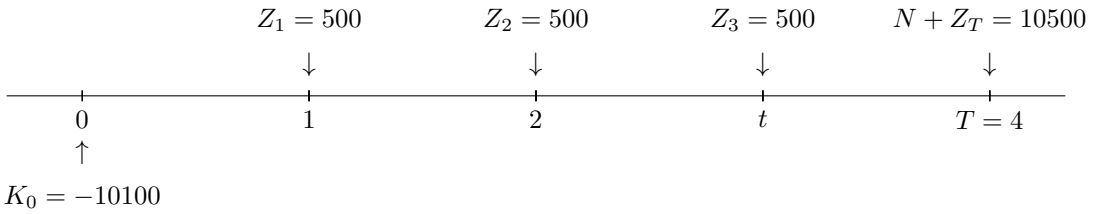
$K_t$ ist der Betrag, der zum Erwerb der Anleihe im Zeitpunkt $t$ zu zahlen ist.

Mit Hilfe des Barwertes $BW_t$ und des Nominalwertes N der rechnerische oder faire Kurs der Anleihe $C_t$ berechnet werden:

$$C_t = \frac{BW_t}{N} \tag{2.41}$$

**Beispiel:**

Die festverzinsliche Anleihe hat eine Laufzeit von 4 Jahren. Die Zinsperiode ist 1 Jahr, die Zinszahlungen erfolgen am Ende der Zinsperiode. Der Nominalzins der Anleihe beträgt 5%. Der Nominalwert der Anleihe ist 10000 EUR. Die jährlichen Zinszahlungen haben die Höhe von $Z = N \cdot i_{nom} = 10000 \cdot 0,05 = 500$. Der Ausgabekurs ist $C_0 = 101\%$. Damit wird die Anleihe zum Preis $K_0$ von 10100 EUR im Zeitpunkt $t = 0$ Es ergeben sich folgende Zahlungsströme:




Jeder der Zahlungen ist zum Zeitpunkt $t = 0$ mit Hilfe der Nullkupon-Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(0\leftarrow t)}$ abzuzinsen:

$$\begin{aligned} BW_0(Z_1) &= Z_1 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} = 500 \cdot 0,9714 = 485,70 \\ BW_0(Z_2) &= Z_2 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} = 500 \cdot 0,9262 = 463,10 \\ BW_0(Z_3) &= Z_3 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} = 500 \cdot 0,8750 = 437,50 \\ BW_0(N + Z_4) &= (N + Z_4) \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = 10500 \cdot 0,8262 = 8675,10 \end{aligned}$$

Der Barwert beträgt:

$$BW_0 = BW_0(Z_1) + BW_0(Z_2) + BW_0(Z_3) + BW_0(N + Z_4) = 10061,4$$

Der Barwert kann genutzt werden, den rechnerischen Ausgabekurs $C_{0,rechn.}$ zu berechnen. Dazu ist der Barwert der Zahlung dem Nominalwert der Anleihe entgegenzusetzen:

$$C_{0,rechn.} = \frac{BW_0}{N} = \frac{10061}{10000} = 1,0061$$

Der rechnerische oder faire Ausgabekurs wäre $100,61\%$, der tatsächliche dagegen $C_0 = 101\%$.

Die Preisfunktion ist :

$$P_0 = BW_0(Z_1) + BW_0(Z_2) + BW_0(Z_3) + BW_0(N + Z_4) + (K_0) = 10061,4 - 10100 = -38,6$$

Das Geschäft scheint zu diesem Zeitpunkt verlustbringend.

Im weiteren werden folgende Aufgaben behandelt:

1. Es wird der Barwert und der faire Preis der Anleihe zum Zeitpunkt $t = 2$ bestimmt. Die Anleihe soll genau 2 Jahre nach dem Ausgabedatum erworben werden.

2. Barwert und der faire Preis der Anleihe soll zu einem beliebigen Zeitpunkt innerhalb der Laufzeit berechnet werden.

**Barwert und der faire Preis der Anleihe zum Zeitpunkt** $t = 2$

Die noch ausstehenden Zahlungen im Zeitpunkt $t = 2$ sind: $Z_3$ und $N + Z_4$. Zum Diskontieren werden die zukünftigen Zinssätze $i_{real}(2 \to 3)$ und $i_{real}(2 \to 4)$ bzw. zukünftigen Nullkupon-Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(2\leftarrow 3)}$ und $\hat{q}_{(2\leftarrow 4)}$ genutzt[8]:

**zukünftige Nullkupon-Zinssätze** $i_{real}(t_1 \to t_2)$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | | 0,0585 | 0,0588 |

**zukünftige Abzinsfaktoren** $\hat{q}_{(t_1\leftarrow t_2)}$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | | 0,9447 | 0,8920 |

Jeder der zukünftigen Zahlungen ist zum Zeitpunkt $t = 2$ mit Hilfe der Nullkupon-Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(t_1\leftarrow t_2)}$ abzuzinsen:

$$BW_2(Z_3) = Z_3 \cdot \hat{q}_{(2\leftarrow 3)} = 500 \cdot 0,9447 = 472,35$$
$$BW_2(N + Z_4) = (N + Z_4) \cdot \hat{q}_{(2\leftarrow 4)} = 10500 \cdot 0,8920 = 9366$$

Der Barwert beträgt:

$$BW_2 = BW_2(Z_3) + BW_2(N + Z_4) = 9838,35$$

Der Barwert kann genutzt werden, den rechnerischen Ausgabekurs $C_{0,rechn.}$ abgeleitet werden.

$$C_{2,rechn.} = \frac{BW_2}{N} = \frac{9838,35}{10000} = 0,9838$$

Der rechnerische oder faire Ausgabekurs wäre 98,38%.

Die Preisfunktion hängt davon ab, welcher Kaufpreis $K_2$ für die Anlage im Moment $t = 2$ gezahlt wird. Entspricht die Höhe der Zahlung dem berechneten fairen (rechnerischen) Kurs, was nicht sein muss, (folglich $K_2 = 9838$ gilt für die Preisfunktion:

$$P_2 = BW_2(Z_3) + BW_2(N + Z_4) + (K_2) = 9838,35 - 9838,35 = 0$$

**Barwert und der faire Preis der Anleihe soll zum Zeitpunkt** $t = 2,25$**:**

[8] siehe Unterabschnitt 1.5.4

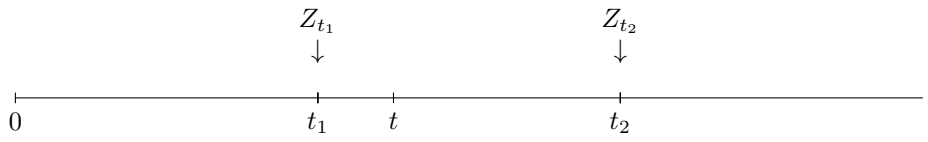
Im Unterabschnitt 1.5.3 wurden bereits die Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(2,25\leftarrow 3)}$ und $\hat{q}_{(2,25\leftarrow 4)}$. Sie dienen dem Abzinsen der ausstehenden Zahlungen zum Moment $t = 2,25$. Der Barwert $BW_{2,25}$ kann nun berechnet werden:

$$BW_{2,25} = Z_3 \cdot \hat{q}_{(2,25\leftarrow 3)} + (N + Z_4) \cdot \hat{q}_{(2,25\leftarrow 4)}$$
$$BW_{2,25} = 500 \cdot 0,9573 + 10500 \cdot 0,9039 = 9969,60$$

Dieser Wert könnte zur Berechnung des fairen, rechnerischen Kurses herabgezogen werden:

$$C_{2,25rechn.} = \frac{BW_{2,25}}{N} = \frac{9969,60}{10000} = 0,9970$$

Der Kurs impliziert, dass ein Käufer zum Zeitpunkt $t = 2,25$ mit der vollständigen Zinszahlung am Zinszahlungstermin $t = 3$ rechnen kann, obwohl er die Anlage nur ein Dreivierteljahr bis zur Zinszahlung gehalten hat. Deshalb muss eine Korrektur vorgenommen werden. Stimmen Bewertungszeitpunk (oder auch Kauf- bzw. Verkaufszeitpunkt) und Zinszahlungstermin nicht überein, werden die sogenannten **Stückzinsen** berechnet. Unter **Stückzinsen** versteht man die Zinsen, die zwischen dem letzten Zinszahlungstermin und Bewertungstermin anfallen. Dazu sind die Tage zwischen letzten Zinszahlungstermin und Bewertungstermin zu bestimmen. Grafisch kann man diesen Sachverhalt folgendermaßen darstellen: $t_1$ und $t_2$ sind zwei benachbarte Zinszahlungstermine, $t$ der Bewertungszeitpunkt.




Das Zeitintervall $[t_1, t]$ gibt den Zeitraum an, der zwischen $t_1$ und $t$ liegt. Würde man die Anleihe zum Zeitpunkt $t$ verkaufen, fallen Zinsen für das Intervall $[t_1, t]$, die dem Käufer der Anleihe nicht zustehen, da er im Zeitpunkt $t_2$ die gesamten Zinsen für das Intervall $[t_1, t_2]$ erhält. Die Zinsen für das Zeitintervall $[t_1, t]$ nennt man Stückzinsen ($Z_{t_1,t}$). Unterstellt man die für diese Anleihen übliche "day-count-convention" 30/360 (ein Jahr hat 360 Tage, ein Monat 30 Tage), kann man die Tage des Intervalls $[t_1, t]$ angeben, die sogenannten Zinstage ($d_{t_1,t}$) Die Stückzinsen betragen:

$$Z_{t_1,t} = \frac{N \cdot i_{nom} \cdot d_{t_1,t}}{360}$$

Für das Beispiel ($t = 2,25$) erhält man:

$$Z_{2,2,25} = \frac{10000 \cdot 0,05 \cdot 90}{360} = 125$$

Die Stückzinsen betragen 125 EUR. Der Käufer muss zum aktuellen Preis der Anleihe noch zusätzlich 125 EUR zahlen.

In diesem Zusammenhang ist zwischen **Clean Price** und **Dirty Price** zu unterscheiden. Der an der Börse notierte Kurs berücksichtigt nicht die Stückzinsen und der gehandelte Preis der Anleihe wird **Clean Price** genannt. Der berechnete Barwert $BW_{2,25}$ enthält die Zinsen für den gesamten Zeitraum $(2, 3)$, d.h. auch die Stückzinsen. Der Barwert bestimmt den rechnerischen Kues $C_{2,25rechn.}$ und kann, aber muss nicht, mit dem tatsächlichen Kurs identisch sein. Würde der an der Börse notierte Kurs zum Zeitpunkt $t = 2,25$ 98% betragen, wäre der **Clean Price** 9800 EUR ($98\% \cdot 10000$). Der tatsächliche **Dirty Price** ergibt sich aus dem **Clean Price** zuzüglich der Stückzinsen ($9800 + 125 = 99125$).

### 2.8.2 Festverzinsliche Anleihen mit unterjährlicher Zinszahlung

Die Zinsperiode beträgt ein Jahr, die Zinszahlungen erfolgen unterjährig. Gegeben ist ein Jahreszinssatz. Der Nominalzinssatz ($i_{nom}$) gleich dem gegebenen Jahreszinssatz. Die unterjährigen Zinsen $Z_j$ werden aus dem Nominalzinssatz N und der Anzahl der Zinszahlungstermine eines Jahres (m) abgeleitet. Als "Day-count-convention" wird 30/360 gewählt.

$$Z_i = N \cdot i_{nom} \cdot \frac{1}{m}$$

Die Barwertberechnung erfolgt mit den unterjährigen Nullkupon-Zinssätzen bzw. Nullkupon-Abzinsfaktoren.

**Beispiel**

Eine festverzinsliche Anleihe mit einer Laufzeit von 3 Jahren und gegebenen Jahreszinssatz von 5% wird jährlich verzinst. Die Zinszahlungen erfolgen vierteljährig, Der Nominalwert der Anleihe beträgt 10000 EUR. Zunächst werden die vierteljährigen Zinszahlungen berechnet.

$$Z_i = 10000 \cdot 0,05 \cdot \frac{1}{4} = 125$$

Die letze Zahlung ergibt sich aus den Zinsen und den zurückzuzahlenden Nominalwert: $N + Z_{12} = 10000 + 125 = 10125$.

Die Barwertberechnung erfolgt mit unterjährigen Nullkupon-Abzinsfaktoren. Dabei wird auf die Berechnung im Unterabschnitt 2.1.1 zurückgegriffen. Der Berechnung unterjährigen Nullkupon-Zinssätze $i_{real}(0 \to t)$ , $t = 1, 2, ..., 12$ liegt die Interpolation der jährlichen Nullkupon-Zinssätze zu Grunde. Man erhält die Nullkupon-Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(0 \leftarrow t)}$ , $t = 1, 2, ..., 12$, die in der nachfolgenden Tabelle angegeben sind:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 8 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,9927 | 0,9855 | 0,9785 | 0,9714 | 0,9615 | 0,9505 | 0,9388 | 0,9262 | 0,9140 | 0,9014 | 0,8884 | 0,8750 |

Zur Barwertberechnung ist jede der Zahlungen mit dem entsprechenden Nullkupon-Abzinsfaktor zu diskontieren.

$$\begin{aligned}
BW_0(Z_1) &= Z \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow 1)} = 125 \cdot 0,9927 = 124,09 \\
BW_0(Z_2) &= Z \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow 2)} = 125 \cdot 0,9855 = 123,19 \\
BW_0(Z_3) &= Z \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow 3)} = 125 \cdot 0,9785 = 122,31 \\
BW_0(Z_4) &= Z \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow 4)} = 125 \cdot 0,9714 = 121,43 \\
BW_0(Z_5) &= Z \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow 5)} = 125 \cdot 0,9615 = 120,19 \\
BW_0(Z_6) &= Z \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow 6)} = 125 \cdot 0,9505 = 118,81 \\
BW_0(Z_7) &= Z \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow 7)} = 125 \cdot 0,9388 = 116,73 \\
BW_0(Z_8) &= Z \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow 8)} = 125 \cdot 0,9262 = 115,78 \\
BW_0(Z_9) &= Z \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow 9)} = 125 \cdot 0,9140 = 114,25 \\
BW_0(Z_{10}) &= Z \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow 10)} = 125 \cdot 0,9014 = 112,68 \\
BW_0(Z_{11}) &= Z \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow 11)} = 125 \cdot 0,8884 = 111,05 \\
BW_0(N + Z_{12}) &= (N + Z) \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow 12)} = 10125 \cdot 0,8750 = 8859,38
\end{aligned}$$

Die Barwerte der Teilzahlungen Sind zu addieren Man erhält $BW_0 = 10159,86$.

Die Preisfunktion $P_0$ berücksichtigt auch die Zahlung zum Erwerb der Anleihe. Würde die Anleihe zum Nominalwert gekauft ($K_0 = N = 10000$) beträgt der Ausgabekurs 100% und die Preisfunktion lautet:

$$P_0 = BW_0 + K_0 = 10159,86 - 10000,00 = 159,86$$

Der faire oder rechnerische Ausgabekurs beträgt:

$$C_{0,rechn.} = \frac{BW_0}{N} = \frac{10159,86}{10000} = 1,015986$$

Mit 101.60% liegt der rechnerische Ausgabekurs über dem tatsächlichen Ausgabekurs.

Allgemein kann formuliert werden:

$$BW_0 = \sum_{t=1}^{n \cdot m} BW_0(R_t) + BW_0(N) = -R \cdot \sum_{t=1}^{n \cdot m} \hat{q}_{(0 \leftarrow t)} + N \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow n \cdot m)} \tag{2.42}$$

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n \cdot m} BW_0(R_t) + BW_0(N) + K_0 = -R \cdot \sum_{t=1}^{n \cdot m} \hat{q}_{(0 \leftarrow t)} + N \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow n \cdot m)} + K_0 \tag{2.43}$$

$$C_{0,rechn.} = \frac{BW_0}{N} \tag{2.44}$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass die Laufzeit der Anleihe n Jahre beträgt und in jedem Jahr m Zinszahlungen stattfinden.

### 2.8.3 Nullkuponanleihen -Zerobonds

Nullkuponanleihen sind Anleihen mit nur zwei Zahlungen: eine Zahlung beim Erwerb der Anleihe und die Rückzahlung des Nominalwertes N der Anleihe und der aufgelaufenen Zinsen $Z$. Die aufgelaufenen Zinsen werden mit Hilfe des Nominalzinssatzes $i_{nom}$ und der Laufzeit bestimmt:

$$Z = N \cdot [(1 + i_{nom})^T - 1]$$

Die Nullkupon-Anleihen wurden bereits ausführlich im Unterabschnitt 1.2.1 besprochen. Hier geht es um die Barwertbestimmung bzw. den die Preisfunktion. Zunächst wird der Erwerb einer Nullkupon-Anleihe am Ausgabetag betrachtet. Wenn die Laufzeit der Nullkupon-Anleihe T Jahre beträgt, ist der Endwert der Anleihe zum Zeitpunkt $t = 0$ mit dem Nullkupon-Abzinsfaktor $\hat{q}_{(0 \leftarrow T)}$ zu diskontieren. An dieser Stelle muss darauf hingewiesen werden, dass der Nullkupon-Abzinsfaktor $\hat{q}_{(0 \leftarrow T)}$ nichts mit dem Nullkupon-Abzinsfaktor $\frac{1}{(1+i_{nom})^T}$ zu tun hat. Letztere wird auf der Basis des Nominalzinssatzes der Anleihe gebildet, währen der der Nullkupon-Abzinsfaktor $\hat{q}_{(0 \leftarrow T)}$ der Nullkupon-Zinskurve entspricht und mit Hilfe der realen Zinssätze $i_{real}(t_1 \rightarrow t_2)$ gebildet wird.

Am Ausgabetag wird eine Nullkuponanleihe zum Ausgabepreis $K_0$, der sich aus dem Ausgabekurs $C_0$ ableiten lässt, gekauft:

$$K_0 = C_0 \cdot N$$

Ob dieser Ausgabekurs dem fairen bzw. rechnerischen Ausgabekurs entspricht, kann durch Berechnung des Barwertes der Nullkuponanleihe $BW_0$ überprüft werden. Zur Barwertberechnung diskontieren wir die zweite Zahlung mit dem Nullkupon-Abzinsfaktor $\hat{q}_{(0\leftarrow T)}$.:

$$BW_0 = (N + Z) \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)} \tag{2.45}$$

Die Preisfunktion lautet:

$$P_0 = BW_0 + K_0 = (N + Z) \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)} + K_0 \tag{2.46}$$

Der faire Kurs wird bestimmt:

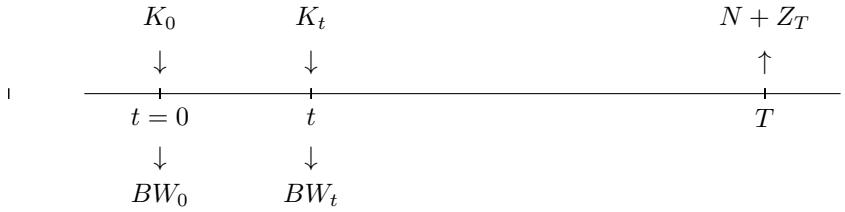
$$C_{0,rechn.} = \frac{BW_0}{N} \tag{2.47}$$

Der rechnerische Kurs muss nicht mit dem Ausgabekurs übereinstimmen, da weitere Faktoren die Abweichung verursachen können. Gleichzeitig muss darauf hingewiesen werden, dass der Ausgabepreis nicht mit dem Nominalwert der Anleihe identisch ist. Das wäre nur dann der Fall, wenn der Ausgabekurs gleich 100% ist.

Vom der Nullkuponanleihe kann jederzeit der Barwert $BW_t$ bestimmt werden, sofern der Nullkupon-Abzinsfaktor aus der Nullkupon-Zinskurve ($\hat{q}_{(t\leftarrow T)}$ zum Zeitpunkt $t$ bekannt ist. Dieser Nullkupon-Abzinsfaktor ist der zukünftige Nullkupon-Abzinsfaktor und kann aus der Nullkupon-Zinskurve abgeleitet werden (siehe dazu Unterabschnitt 1.5.4). Der faire Kurs der Anleihe $C_{t,rechn.}$ zum Zeitpunkt t kann aus dem Nominalwert N und dem Barwert $BW_t$ bestimmt werden. Der Kaufpreis der Anleihe zum Zeitpunkt $t$ (tatsächlich $K_t$ oder rechnerisch $K_{t,rechn.}$ wird mit Hilfe des Kurses $C_t$ oder $C_{t,rechn.}$ abgeleitet:

$$\begin{aligned} BW_t &= (N + Z) \cdot \hat{q}_{(t\leftarrow T)} \\ P_t &= BW_t + K_t = (N + Z) \cdot \hat{q}_{(t\leftarrow T)} + K_t \\ C_{t,rechn.} &= \frac{BW_t}{N} \\ K_t &= C_t \cdot N \\ K_{t,rechn.} &= C_{t,rechn.} \cdot N \end{aligned}$$

Alle Bewertungen der Nullkuponanleihe werden noch einmal in einer Grafik zusammengefasst.




**Beispiel:**

Der Nominalwert der Nullkupon-Anleihe betrage $N = 10000$ EUR, der Jahreszinssatz 5% und die Laufzeit $T = 4$. Es sind die Barwerte, die fairen Kurse und die fairen Kaufpreise der Anleihe zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 2$ zu bestimmen. Die Nullkupon-Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(0\leftarrow 4)}$ und $\hat{q}_{(2\leftarrow 4)}$ sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | 0,8262 |
| 2 | | | | 0,8920 |

Die aufgelaufenen Zinsen betragen:

$$Z = N \cdot [(1 + i_{nom})^T - 1] = 10000 \cdot [1,05^4 - 1] = 2155,06$$

$$\begin{aligned} BW_0 &= (N + Z) \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow 4)} = 12155,06 \cdot 0,8262 = 10042,51 \\ BW_2 &= (N + Z) \cdot \hat{q}_{(2 \leftarrow 4)} = 12155,06 \cdot 0,8920 = 10842,31 \\ C_{0,rechn.} &= \frac{10042,51}{10000} = 1,0043 = 100,43\% \\ C_{2,rechn.} &= \frac{10842,31}{10000} = 1,0842 = 108,42\% \end{aligned}$$

Der faire Kurs der Anleihe am Ausgabetag ist deutlich geringer als zum Zeitpunkt $t = 2$. Würde der Käufer den Betrag von 10842,31 EUR zu Marktbedingungen 2 Jahre anlegen, erhielte er 12155,06 EUR.

Es wird nun angenommen, dass der Ausgabekurs 100% beträgt:

$$K_0 = C_0 \cdot N = 1,0000 \cdot 10000 = 10000$$

Die Preisfunktion für den Zeitpunkt $t = 0$ lautet:

$$P_0 = BW_0 + K_0 = 10042,51 - 10000 = 42,51$$

aus Sicht des Käufers der Nullkupon-Anleihe am Ausgabetag kann mit einem leichten Gewinn gerechnet werden. Es sei nun der Zeitpunkt $t = 2$ betrachtet. Wir nehmen an, dass der Börsenkurs der Anleihe identisch mit dem rechnerischen Kurs ist. Der rechnerische Preis ist gleich dem zu zahlenden Kaufpreis:

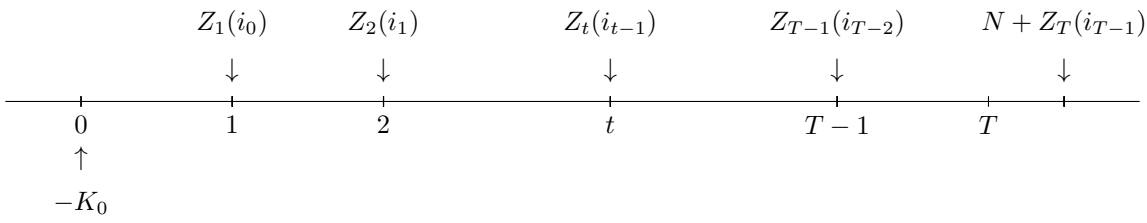
$$\begin{aligned} K_2 &= C_2 \cdot N = 1,0842 \cdot 10000 = 10842 \\ K_{2,rechn.} &= C_{2,rechn.} \cdot N = 1,0842 \cdot 10000 = 10842 \end{aligned}$$

## 2.9 Variabel verzinsliche Anleihen - Floater

Bei festverzinslichen Anleihen gilt der konstante Nominalzinssatz während der gesamten Laufzeit. Bei variabler Verzinsung der Anleihe erfolgt zu bestimmten Zeitpunkten (**fixing days**) eine Anpassung oder Korrektur des Zinssatzes. Diese Korrektur ist am Ausgabetag noch nicht festgelegt und ist an einem Referenzzinssatz gebunden. D.h. am fixing day wird der Wert des Referenzzinssatzes fixiert, in der Regel mit einem Zusatz versehen (z.B. einem Aufschlag von 50 Basispunkten). Dieser Zinssatz gilt dann bis zum nächsten fixing day. Der Referenzzinssatz wird in Abhängigkeit von der Laufzeit festgelegt . Bei kurzen Laufzeiten wird ein Geldmarktzinssatz als Referenzzinssatz gewählt: für europäischen -Raum ist es in der Regel der EURIBOR (Euro Interbank Offered Rate) bzw. der LIBOR (London Interbank Offered Rate), die Zinssätze werden für wichtige Währungen wie z.B. USD, EUR, GBP für Laufzeiten von einem Tag bis zu einem Jahr täglich berechnet und veröffentlicht. Sie spiegeln Durchschnittswerte von Zinssätzen im Geldmarkthandel wieder. Bei langen Laufzeiten im Kapitalmarktgeschäft werden Umlaufrendite (durchschnittliche Rendite ausgewählter öffentlicher Anleihen und sonstiger festverzinslicher Wertpapiere erster Bonität) verwendet. Sie werden für Laufzeiten von 1 bis 10 Jahren, möglich auch darüber hinaus veröffentlicht. Wie später gezeigt wird, vereinfacht sich die Barwertberechnung, wenn als Referenzzinssatz die Nullkuponzinssätze verwendet werden.

Wichtig ist, dass bei Ausgabe der variabel verzinster Anleihe (andere Namen sind floater oder Forward Rates Notes -FRN) sowohl Referenzzinssatz fest gelegt wird, ebenfalls der Aufschlag (Abschlag) auf den Referenzzinssatz. Die konkreten Werte werden am fixing day festgestellt, man sagt auch gefixt.

Es ergibt sich folgendes Profil der Zahlungen:




Dabei bezeichnen:

| | |
|---|---|
| $K_0$ | Kaufpreis der Anleihe |
| $Z_t(i_{t-1})$ | Zinsen für die Zinsperiode $(t-1,t)$ auf Basis des Zinssatzes $i_{t-1}$ |
| $N$ | Nominalwert der Anleihe |
| $T$ | Laufzeit der Anlage |

Die Zinsen für die Zinsperiode $(t-1,t)$ werden wie folgt berechnet. Der Zinssatz $i_{t-1}$ für die Zinsperiode $(t-1,t)$ ergibt sich dabei aus dem fixierten Wert des Referenzzinssatzes $i_{ref,t-1}$ am fixing day $t-1$ und dem vorher definierten Aufschlag $\Delta_{t-1}$ :

$$\begin{aligned} i_{t-1} &= i_{ref,t-1} + \Delta_{t-1} \\ Z_t(i_{t-1}) &= N \cdot i_{t-1} \end{aligned}$$

Die Zinssätze $i_{t-1}$ und $i_{ref,t-1}$ sind zum Zeitpunkt der Ausgabe der Anleihe $t = 0$ nicht bekannt, wohl aber, welcher Referenzzinssatz zum Zeitpunkt $t-1$ zur Berechnung von $i_{t-1}$ angewendet werden muss. Es wäre nun zu klären, wie diese variablen Zinssätze für die Barwertberechnung bestimmt werden können. Grundsätzlich wäre eine Zinsprognose möglich, man kann aber auch die variablen Zinssätze aus der Nullkupon-Zinskurve ableiten. Dabei wird unterstellt, dass der Referenzzinssatz der Nullkupon-Zinskurve entspricht. Die variablen Zinssätze sind nichts anderes als die schon bekannten zukünftigen Nullkuponzinssätze $i_{real}(t-1 \to t)$, wenn der Referenzzinssatz aus der täglich veröffentliche Nullkupon-Zinskurve abgeleitet werden kann:

$$i_{real}(t_1 \to t_2) = \sqrt[t_2-t_1]{\frac{(1+i_{real}(0 \to t_2)^{t_2}}{(1+i_{real}(0 \to t_1)^{t_1}}} - 1$$

bzw.

$$q_{(t_1 \leftarrow t_2)} = \sqrt[t_2-t_1]{\frac{q_{(0 \leftarrow t_2)}^{t_2}}{q_{(0 \leftarrow t_1)}^{t_1}}}$$

**Beispiel:**

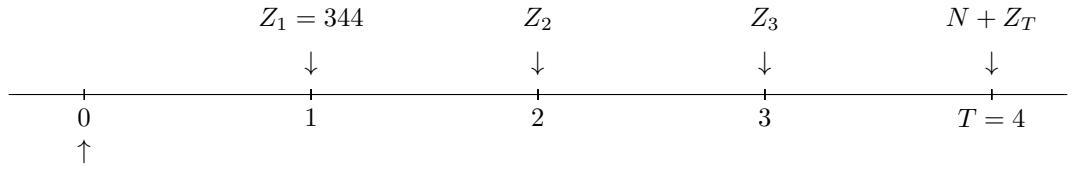
Die variabel verzinsliche Anleihe hat eine Laufzeit von 4 Jahren. Die Zinsperiode ist 1 Jahr, die Zinszahlungen erfolgen am Ende der Zinsperiode. Der variable Zinssatz wird aus der aktuellen Nullkupon-Zinsstrukturkurve bestimmt, d.h. der Referenzzinssatz $i_{ref,t}$ wird als zukünftiger Zinssatz aus der Nullkuponzinskurve abgeleitet. Der Aufschlag zum Referenzzinssatz beträgt $\Delta = 50$ Basispunkte bzw.

$0,5\%$. Der Nominalwert der Anleihe ist 10000 EUR. Die jährlichen Zinszahlungen sind variabel. Der Ausgabekurs ist $C_0 = 100\%$. Damit wird die Anleihe zum Preis $K_0$ von 10000 EUR im Zeitpunkt $t = 0$ gekauft. Der Referenzzinssatz für die erste Zinsperiode $(0, 1)$ ist bekannt und ist gleich dem Nullkuponzinssatz $i_{real}(0 \to 1) = 0,0294$.

Aus dem Wert des Referenzzinssatzes für die erste Zinsperiode $(0, 1)$ lässt sich leicht der variable Zinssatz $i_0$ und die Zinsen für für diese Zinsperiode berechnen:

$$\begin{aligned} i_0 &= i_{ref,0} + \Delta = 0,0294 + 0,0050 = 0,0344 \\ Z_1(i_0) &= N \cdot i_0 = 10000 \cdot 0,0344 = 344 \end{aligned}$$

Für die restlichen Zahlungsströme sind die **zukünftigen** Nullkuponzinssätze heranzuziehen. Es ergeben sich folgende Zahlungsströme:




Alle zukünftigen Zinssätze für die weiteren Berechnungen sind in der folgenden Tabelle dargestellt:

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $0,0294$ | $0,0391$ | $0,0455$ | $0,0489$ |
| 1 | | $0,0489$ | $0,0536$ | $0,0554$ |
| 2 | | | $0,0585$ | $0,0588$ |
| 3 | | | | $0,0591$ |

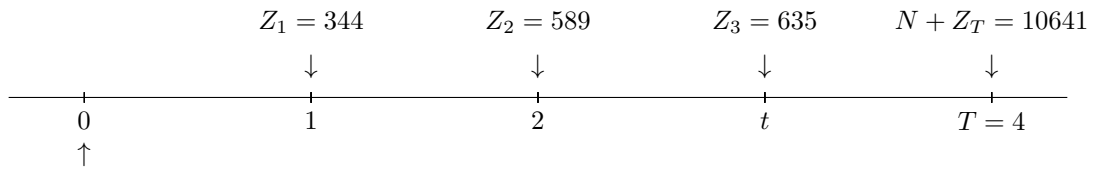
Unter Verwendung ausgewählter zukünftiger Zinssätze lassen sich nun die zu erwartenden Referenzzinssätze bestimmen bestimmen:

$$\begin{aligned} i_{ref,1} &= i_{real}(1 \to 2) = 0,0489 \Rightarrow i_1 = 0,0539 \\ i_{ref,2} &= i_{real}(2 \to 3) = 0,0585 \Rightarrow i_2 = 0,0635 \\ i_{ref,3} &= i_{real}(3 \to 4) = 0,0591 \Rightarrow i_3 = 0,0641 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die zukünftigen Zinszahlungen:

$$\begin{aligned} Z_2(i_1) &= N \cdot i_1 = 10000 \cdot 0,0539 = 539 \\ Z_3(i_2) &= N \cdot i_2 = 10000 \cdot 0,0635 = 635 \\ Z_4(i_3) &= N \cdot i_3 = 10000 \cdot 0,0641 = 641 \end{aligned}$$

Nun kann der Barwert berechnet werden. Alle Zahlungen sind bekannt:



Jeder der Zahlungen ist zum Zeitpunkt $t = 0$ mit Hilfe der Nullkupon-Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(0\leftarrow t)}$ abzuzinsen und die abgezinsten Beträge dann zu addieren:

$$\begin{aligned} BW_0(Z_1) &= Z_1 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} = 344 \cdot 0,9714 = 334,16 \\ BW_0(Z_2) &= Z_2 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} = 539 \cdot 0,9262 = 499,22 \\ BW_0(Z_3) &= Z_3 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} = 635 \cdot 0,8750 = 555,63 \\ BW_0(N + Z_4) &= (N + Z_4) \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = 10641 \cdot 0,8262 = 8791,59 \end{aligned}$$

Die Teilbarwerte werden addiert:

$$BW_0 = BW_0(Z_1) + BW_0(Z_2) + BW_0(Z_3) + BW_0(N + Z_4) = 10180,61$$

Der Barwert beträgt 10.180,61 EUR.

Der Barwert kann genutzt werden, den rechnerischen Ausgabekurs $C_{0,rechn.}$ zu berechnen. Dazu ist der Barwert der Zahlung dem Nominalwert der Anleihe entgegenzusetzen:

$$C_{0,rechn.} = \frac{BW_0}{N} = \frac{10180,61}{10000} = 1,0180$$

Der rechnerische oder faire Ausgabekurs wäre $101,80\%$.

Die Preisfunktion ist :

$$P_0 = BW_0(Z_1) + BW_0(Z_2) + BW_0(Z_3) + BW_0(N + Z_4) + (K_0) = 10180,61 - 10000 = 180,61$$

Würde man auf den Aufschlag von $\Delta = 0,005$ verzichten, ergäbe sich folgendes Bild:

$$\begin{aligned} i_{ref,0} &= i_{real}(0 \to 1) = 0,0294 \Rightarrow i_1 = 0,0294 \\ i_{ref,1} &= i_{real}(1 \to 2) = 0,0489 \Rightarrow i_1 = 0,0489 \\ i_{ref,2} &= i_{real}(2 \to 3) = 0,0585 \Rightarrow i_2 = 0,0585 \\ i_{ref,3} &= i_{real}(3 \to 4) = 0,0591 \Rightarrow i_3 = 0,0591 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die zukünftigen Zinszahlungen:

$$\begin{aligned} Z_1(i_0) &= N \cdot i_0 = 10000 \cdot 0,0294 = 294 \\ Z_2(i_1) &= N \cdot i_1 = 10000 \cdot 0,0489 = 489 \\ Z_3(i_2) &= N \cdot i_2 = 10000 \cdot 0,0585 = 585 \\ Z_4(i_3) &= N \cdot i_3 = 10000 \cdot 0,0591 = 591 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
BW_0(Z_1) &= Z_1 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} = 294 \cdot 0,9714 = 285,59 \\
BW_0(Z_2) &= Z_2 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} = 489 \cdot 0,9262 = 452,91 \\
BW_0(Z_3) &= Z_3 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} = 585 \cdot 0,8750 = 511,88 \\
BW_0(N + Z_4) &= (N + Z_4) \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = 10591 \cdot 0,8262 = 8750,28
\end{aligned}
$$

Der Barwert beträgt:10000,66 $\approx$ 10000

Ein Barwert von $\approx 10000$ lässt sich leicht erklären: Der Zinsberechnung ohne $\Delta$ liegt der gleiche Zinssatz zu Grunde wie zum Abzinsen, man muss folglich den Nominalwert erhalten. Zunächst zeigen wir es für unser Beispiel:

$$
\begin{aligned}
BW_0 &= N \cdot \left(\frac{i_{real}(0 \to 1)}{(1 + i_{real}(0 \to 1))} + \frac{i_{real}(1 \to 2)}{(1 + i_{real}(0 \to 2))^2} + \frac{i_{real}(2 \to 3)}{(1 + i_{real}(0 \to 3))^3} + \right. \\
&= \left. + \frac{i_{real}(3 \to 4)}{(1 + i_{real}(0 \to 4))^4} + \frac{1}{(1 + i_{real}(0 \to 4))^4}\right) = \\
&= N \cdot \left(\frac{q_{(0\leftarrow 1)} - 1}{q_{(0\leftarrow 1)}} + \frac{q_{(1\leftarrow 2)} - 1}{q^2_{(0\leftarrow 2)}} + \frac{q_{(2\leftarrow 3)} - 1}{q^3_{(0\leftarrow 3)}} + \frac{q_{(3\leftarrow 4)} - 1}{q^4_{(0\leftarrow 4)}} + \frac{1}{q^4_{(0\leftarrow 4)}}\right)
\end{aligned}
$$

Da

$$
\begin{aligned}
q_{(t\leftarrow t+1)} &= \frac{q^{t+1}_{(0\leftarrow t+1)}}{q^t_{(0\leftarrow t)}} \\
\frac{q_{(0\leftarrow 1)} - 1}{q_{(0\leftarrow 1)}} &= 1 - \frac{1}{q_{(0\leftarrow 1)}} \\
q_{(1\leftarrow 2)} = \frac{q^2_{(0\leftarrow 2)}}{q_{(0\leftarrow 1)}} &\Longrightarrow \frac{q_{(1\leftarrow 2)} - 1}{q^2_{(0\leftarrow 2)}} = \frac{q^2_{(0\leftarrow 2)}}{q_{(0\leftarrow 1)} \cdot q^2_{(0\leftarrow 2)}} - \frac{1}{q^2_{(0\leftarrow 2)}} = \frac{1}{q_{(0\leftarrow 1)}} - \frac{1}{q^2_{(0\leftarrow 2)}} \\
q_{(2\leftarrow 3)} = \frac{q^3_{(0\leftarrow 3)}}{q^2_{(0\leftarrow 2)}} &\Longrightarrow \frac{q_{(2\leftarrow 3)} - 1}{q^3_{(0\leftarrow 3)}} = \frac{q^3_{(0\leftarrow 3)}}{q_{(0\leftarrow 2)^2} \cdot q^3_{(0\leftarrow 3)}} - \frac{1}{q^3_{(0\leftarrow 3)}} = \frac{1}{q_{(0\leftarrow 2)^2}} - \frac{1}{q^3_{(0\leftarrow 3)}} \\
q_{(3\leftarrow 4)} = \frac{q^4_{(0\leftarrow 4)}}{q^3_{(0\leftarrow 3)}} &\Longrightarrow \frac{q_{(3\leftarrow 4)} - 1}{q^4_{(0\leftarrow 4)}} = \frac{q^4_{(0\leftarrow 4)}}{q_{(0\leftarrow 3)^3} \cdot q^4_{(0\leftarrow 4)}} - \frac{1}{q^4_{(0\leftarrow 4)}} = \frac{1}{q_{(0\leftarrow 3)^3}} - \frac{1}{q^4_{(0\leftarrow 4)}}
\end{aligned}
$$

kann geschrieben werden

$$
BW_0 = N \cdot \left(1 - \frac{1}{q_{(0\leftarrow 1)}} + \frac{1}{q_{(0\leftarrow 1)}} - \frac{1}{q^2_{(0\leftarrow 2)}} + \frac{1}{q^2_{(0\leftarrow 2)}} - \frac{1}{q^3_{(0\leftarrow 3)}} + \frac{1}{q^3_{(0\leftarrow 3)}} - \frac{1}{q^4_{(0\leftarrow 4)}} + \frac{1}{q^4_{(0\leftarrow 4)}}\right) = N
$$

Allgemein gilt:

$$
\begin{aligned}
BW_0 &= N \cdot \left(\sum_{t=0}^{T-1} \frac{q_{(t\leftarrow t+1)} - 1}{q^{t+1}_{(0\leftarrow t+1)}} + \frac{1}{q^T_{(0\leftarrow T)}}\right) \\
&= N \cdot \left(\frac{q_{(0\leftarrow 1)} - 1}{q_{(0\leftarrow 1)}} + \frac{q_{(1\leftarrow 2)} - 1}{q^2_{(0\leftarrow 2)}} + ... + \frac{q_{(0\leftarrow t)} - 1}{q^t_{(0\leftarrow t)}} + ... + \frac{q_{(0\leftarrow T)} - 1}{q^T_{(0\leftarrow T)}} + \frac{1}{q^T_{(0\leftarrow T)}}\right) \\
&= N \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{q_{(0\leftarrow 1)}} + \frac{1}{q_{(0\leftarrow 1)}} - \frac{1}{q^2_{(0\leftarrow 2)}} + \frac{1}{q^2_{(0\leftarrow 2)}} ... - \frac{1}{q^t_{(0\leftarrow t)}} + \frac{1}{q^t_{(0\leftarrow t)}} ... - \frac{1}{q^T_{(0\leftarrow T)}} + \frac{1}{q^T_{(0\leftarrow T)}}\right) = N\right.
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

Die Preisfunktion - unter der Voraussetzung, dass der Nominalwert der Anleihe gleich dem Ausgabepreis ist hat dann den Wert Null. In anderen Fall ist der Nominalwert durch den Ausgabepreis zu ersetzen.

$$P_0 = N - BW_0 = 0$$

Dieses Ergebnis, (Barwert $BW_0 = N$) gilt nur, wenn als Referenzzinssatz der Nullkuponzinssatz ohne Aufschlag $\Delta$ gewählt wird. Die Berechnungen können aber genutzt werden, um den Barwert mit Aufschlag $\Delta$ zu berechnen. Dazu ist die Zinserträge, die durch den Aufschlag von $\Delta$ erzielt werden, zu diskontieren und danach zu addieren:

$$\sum_{t=1}^{T} \Delta \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)}$$

Für das Beispiel betragen die zusätzlichen Zinserträge bei $\Delta = 0,0050$ und einem Nominalwert von 10000 EUR genau 50 EUR ($10000 \cdot 0,0050$. Der Beträge sind für die gesamte Laufzeit ist zu diskontieren und danach zu addieren:

Die Teilbarwerte für die Zinserträge aus den Aufschlag $\Delta$ sind:

$$\begin{aligned}
BW_0(\Delta_1) &= \Delta \cdot N \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} = 0,005 \cdot 10000 \cdot 0,9714 = 50 \cdot 0,9714 = 48,57 \\
BW_0(\Delta_2) &= \Delta \cdot N \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} = 0,005 \cdot 10000 \cdot 0,9262 = 50 \cdot 0,9262 = 46,31 \\
BW_0(\Delta_3) &= \Delta \cdot N \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} = 0,005 \cdot 10000 \cdot 0,8750 = 50 \cdot 0,8750 = 43,75 \\
BW_0(\Delta_4) &= \Delta \cdot N \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = 0,005 \cdot 10000 \cdot 0,8262 = 50 \cdot 0,8262 = 41,31
\end{aligned}$$

Die Teilbarwerte sind zu addieren, um den Barwert aller Zinserträge aus dem Aufschlag $\Delta$ zu erhalten

$$(0,9714 + 0,9262 + 0,8750 + 0,8262) \cdot 50 = 3,5988 \cdot 50 = 179,94$$

Der Barwert der zusätzlichen Zahlungen von 179.94 EUR sind zum Barwert aller Zahlungen ohne Aufschlag von $\Delta = 0,0050$ zu addieren. Man erhält $10000 + 179,94 = 10179,94$. Dieser Wert entspricht näherungsweise dem von uns errechneten Barwert von 10180,61 EUR.

Die Preisfunktion lautet:

$$\begin{aligned}
P_0 = K_0 - BW_0 &= K_0 - N - \sum_{t=1}^{T} \Delta \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} \\
&= K_0 - 10000 - 10179,94 = 179,94
\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt errechnen wir den Barwert zum Zeitpunkt $t = 2,25$. Zum Zeitpunkt $t = 2$ wird der Referenzzinssatz gefixt und der neue Zinssatz für die Periode $(2,3)$ gebildet und die Zinsen berechnet:

$$\begin{aligned}
i_2 &= i_{ref,2} + \Delta = 0,0585 + 0,005 = 0,0635 \\
Z_3(i_2) &= N \cdot i_2 = 10000 \cdot 0,0635 = 635
\end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt $t = 3$ kann der Referenzzinssatz aus der Nullkupon-Zinskurve, identisch zum obigen Beispiel abgeleitet werden:

$$i_3 = i_{ref,3} + \Delta = 0,0591 + 0,005 = 0,0641$$
$$Z_4(i_3) = N \cdot i_3 = 10000 \cdot 0,0641 = 641$$

Diese Zahlungen sind mit den Nullkupon-Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(2,25\leftarrow 3)}$ und $\hat{q}_{(2,25\leftarrow 4)}$ abzuzinsen. Im Unterabschnitt 1.5.3 wurden bereits die Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(2,25\leftarrow 3)}$ und $\hat{q}_{(2,25\leftarrow 4)}$ bestimmt. Sie dienen dem Abzinsen der ausstehenden Zahlungen zum Moment $t = 2,25$. Der Barwert $BW_{2,25}$ kann nun berechnet werden:

$$BW_{2,25} = Z_3 \cdot \hat{q}_{(2,25\leftarrow 3)} + (N + Z_4) \cdot \hat{q}_{(2,25\leftarrow 4)}$$
$$BW_{2,25} = 635 \cdot 0,9573 + 10641 \cdot 0,9039 = 607,89 + 9618,40 = 10226,28$$

Der Barwert $BW_{2,25} = 10226,28$ enthält die gesamten Zinsen $Z_{t_1,t}$ für die Periode $(2,3)$. darin sind die Stückzinsen $Z_{2,2,25}$ für die Periode $(2;2,25)$ mit enthalten, die berücksichtigt werden müssen:

$$Z_{t_1,t} = \frac{N \cdot i_2 \cdot d_{t_1,t}}{360}$$
$$Z_{2,2,25} = \frac{10000 \cdot 0,0585 \cdot 90}{360} = 145,50$$

Die Stückzinsen betragen 145,50 EUR. Soll die Anleihe zum fairen (rechnerischen) Preis muss der verkauft werden, d.h. zum Barwert $BW_{2,25} = 10226,28$, muss der Käufer der Anleihe zusätzlich zum Kaufpreis dem Verkäufer die Stückzinsen ersetzen.

# Kapitel 3

# Risikoberechnung für einfache Finanzprodukte

Wir müssen davon ausgehen, das ökonomische Prozesse, insbesondere finanzielle Prozesse, mit einer gewissen Unsicherheit ablaufen. Niemand ist in der Lage, die Entwicklung finanzieller Parameter, wie z.B. Zinssätze oder Wechselkurse, mit absoluter Sicherheit vorauszusagen. Da nutzen auch nicht gute Prognoseinstrumentarien oder finanzmathematische Verfahren, zukünftige Zinssätze vorauszusagen, immer handelt es sich um eine Voraussage, die genau so eintreten kann oder, wie es in den meisten Fällen der Fall ist, auch nicht. Wie in den vorherigen Kapiteln beschrieben, werden in Finanzinstrumenten vertraglich Konditionen festgelegt, welche Zahlungen in der Zukunft geleistet werden müssen. Die Marktbedingungen in der Zukunft müssen mit den vereinbarten Zahlungsbedingungen nicht vollständig übereinstimmen, obwohl die Vertragsparteien bestrebt sind, möglichst fundierte und treffsichere Voraussagen im Vertrag zu fixieren. Die Diskrepanz zwischen vorhergesagten Entwicklungen der Marktparametern und den tatsächlich eingetretenen führt in der Regel zu Verlusten bei einem der Vertragspartnern, während der andere von der Diskrepanz profitiert. Jeder der Vertragsparteien muss damit rechnen, dass der geschlossene Vertrag verlustbringend ist, und kann andererseits hoffen, dass die Entwicklung der Marktbedingungen ihm finanzielle Vorteile bringen. Im Risikomanagement interessieren nicht die möglichen Gewinn von Finanzmarktkontrakten, wohl aber die finanziellen Verlust. Gelingt es diese im Voraus einzuschätzen, können Gegenmaßnahmen getroffen werden, die die möglichen Verluste weitgehend kompensieren. Vollständig wird es kaum gelingen, aber oft genügt es schon, die Größenordnung zu bestimmen, oder wenigstenz eine Schranke der möglichen Verluste anzugeben.

Es existieren eine Reihe Risiken im Finanzsektor , die wir kurz aufzeigen, um dann eine Fokussierung auf ganz bestimmte Risiken im Zusammenhang mit Finanzmarktprodukten vorzunehmen:

1. Kreditrisiko. Unter dem Kreditrisiko versteht man mögliche Verluste, falls ein Kreditnehmer nicht mit in der Lage ist, seine Rückzahlungsverpflichtungen vollständig oder teilweise zu erfüllen. Dazu zählt neben den klassischen Bankkredit auch das sogenannte Emittentenrisiko, dh. die vollständige oder teilweise Zahlungsunfähigkeit von Emittenten von Wertpapieren, aber auch die Bonitätsverschlechterung des Emittenten. Da häufig auch Staaten Kredite aufnehmen oder Wertpapiere emittieren, spielt auch das Länderrisiko eine wichtige Rolle (Zahlungsunfähigkeit oder Zahlungsunwilligkeit von Ländern).

2. Marktpreisrisiko. Unter dem Marktpreisrisiko versteht man mögliche Verlusten von Banken, und Kreditinstituten, aber auch von Besitzern von Wertpapieren, die durch Veränderung der Marktbedingungen hervorgerufen werden. Es ist möglich, für einzelne Finanzprodukte das Marktpreisrisiko zu einem bestimmten Bewertungsmoment zu bestimmen.

3. operationelles Risiko: "Das operationelle Risiko ist gemäß Artikel 4 Nr. 52 der Capital Requirements Regulation ( CRR ) das Risiko von Verlusten, die durch die Unangemessenheit oder das Versagen von internen Verfahren, Menschen, Systemen oder durch externe Ereignisse verursacht werden, einschließlich Rechtsrisiken." ([Bun21b])

4. Liquiditätsrisiko. "Beim Liquiditätsrisiko unterscheiden die Institute im Wesentlichen zwischen
   · dem **Liquiditätsrisiko** im engeren Sinne (Zahlungsunfähigkeitsrisiko) als der Gefahr, dass die

Bank ihren gegenwärtigen und zukünftigen Zahlungsverpflichtungen nicht mehr vollständig oder nicht fristgerechtnachkommen kann,
· dem **Refinanzierungsrisiko** als die Gefahr, zusätzliche Refinanzierungsmittel nur zu erhöhten Marktzinsen beschaffen zu können,
· dem **Marktliquiditätsrisiko** als der Gefahr, bedingt durch außergewöhnliche Begebenheiten Vermögenswerte nur mit Abschlägen am Markt liquidierenzu können. " (ZITIERFEHLER

In diesem Buch beschränken wir uns im wesentlichen auf das Marktpreisrisiko. Nur für Unternehmensanleihen (siehe **??**) wird zusätzlich das Kreditausfallsrisiko betrachtet.

## 3.1 Grundlagen der Risikoberechnung

Bei der Risikoberechnung geht es um die Quantifizierung der möglichen Verluste bei Eintritt einer Veränderung der Marktbedingungen. Da die konkrete Verlustgröße nicht vorhergesagt werden kann wegen der Ungewissheit der Entwicklung der Marktparameter berechnet man den größtmöglichen Verlust, d.h. eine Verlustobergrenze. Für diese gilt ebenfalls: eine genaue Bestimmung des maximal möglichen Verlustes ist ebenfalls unmöglich und man bedient sich der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Es wird der größtmögliche Verlust bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 95% oder 99% oder $99,9\%$ berechnet. Unsere Berechnungen beziehen sich auf Finanzprodukte oder Portfolios (d.h. eine Menge von Finanzprodukten). Dabei wird unterstellt, dass das Finanzprodukt oder das Portfolio eine gewisse Zeit, in der Regel 1 oder 10 Banktage) unverändert gehalten wird. Einzig die Marktbedingungen können sich ändern.

Zunächst einige Definitionen. Wir betrachten ein Finanzinstrument zu zwei Zeitpunkten $t_0$ und $t_1$. Der Preis des Finanzinstrumentes wir durch die Preisfunktion $P(t)$ und die den Preis bestimmenden Marktparameter (Marktdaten) bestimmt. Mit $y_j(t)$ bezeichnen wir den Wert der Marktdaten j zum Zeitpunkt $t$, $j = 1, 2, ..., n$. Marktdaten können sein: Zinssätze, Wechselkurse oder ähnliche Größen, die den Preis des Finanzproduktes bestimmen. Häufig werden im Zusammenhang mit Risikobetrachtungen die Marktdaten auch als Marktrisikodaten bezeichnet. Damit soll betont werden, dass die Veränderung der Marktdaten ursächlich für mögliche Verluste verantwortlich zeigen. Wir können für die Preisfunktion formulieren:

$$
\begin{aligned}
P(t) &= P\big(y_1(t), y_2(t), ..., y_j(t), ..., y_n(t)\big) \\
P(t_0) &= P\big(y_1(t_0), y_2(t_0), ..., y_j(t_0), ..., y_n(t_0)\big) \\
P(t_1) &= P\big(y_1(t_1), y_2(t_1), ..., y_j(t_1), ..., y_n(t_1)\big)
\end{aligned}
$$

Dabei bezeichnen:

| | |
|---|---|
| $t_0$ | Beginn der Haltedauer |
| $t_1$ | Ende der Haltedauer |
| $t_1 - t_0$ | Haltedauer |

Die Wertveränderung des Finanzinstrumentes während der Haltedauer bezeichnen wir mit $\Delta P(t_0, t_1)$:

$$
\begin{aligned}
\Delta P(t_0, t_1) &= P(t_1) - P(t_0) \\
\Delta P(t_0, t_1) &= P\big(y_1(t_1), y_2(t_1), ..., y_j(t_1), ..., y_n(t_1)\big) - P\big(y_1(t_0), y_2(t_0), ..., y_j(t_0), ..., y_n(t_0)\big)
\end{aligned}
$$

In Abhängigkeit vom Vorzeichen ist die Wertveränderung ein Gewinn (profit) oder ein Verlust (loss). Deshalb wird die Wertveränderung des Finanzinstrumentes auch als **Profit and Loss (PnL)** bezeichnet.

### 3.1.1 Statistische Grundlagen I

**1. Häufigkeitsverteilung und Verteilungsfunktion eines Datensatzes mit Einzelwerten**

Gegeben sei ein Datensatz aus n Einzelwerten $x_j$ mit $j = 1, 2, ..., n$, die der Größe nach geordnet sind:

$$x_1 \leq x_2 \leq ..., x_n$$

Treten identische Einzelwerte auf sind disjunkte Merkmalsausprägungen $\xi_l$ zu bilden und die entsprechend Häufigkeit der Merkmalsausprägungen $n_l = n(\xi_l)$ zu bilden. Die disjunkten Merkmalsausprägungen sind zu ordnen ($\xi_{l_1} > \xi_{l_2}$ wenn $l_1 > l_2$), so dass gilt:

$$\xi_1 \leq \xi_2 \leq ..., \xi_m$$

Es gilt:

$$n = \sum_{l=1}^{m} n_l$$

Die **absolute Häufigkeitsverteilung** ist eine Zuordnung von disjunkten Merkmalsausprägungen zu deren absoluten Häufigkeiten:

$$f : \xi_l \to n_l = f(\xi_l) = n(\xi_l)$$

Die relativen Häufigkeiten $p_l$ werden folgendermaßen gebildet:

$$p_l = p(X = \xi_l) = \frac{n_l}{n}$$
$$n = \sum_{l=1}^{m} n_l \Rightarrow$$
$$1 = \sum_{l=1}^{m} p_l$$

Die **relative Häufigkeitsverteilung** ist eine Zuordnung von disjunkten Merkmalsausprägungen zu deren relativen Häufigkeiten:

$$f : \xi_l \to p_l = f(\xi_l) = p(\xi_l)$$

Tabellendarstellung Häufigkeitsverteilung:

| disjunkte Merkmalsausprägung | absolute Häufigkeiten | relative Häufigkeiten |
|---|---|---|
| $\xi_1$ | $n_1$ | $p_1$ |
| $\xi_2$ | $n_2$ | $p_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\xi_m$ | $n_m$ | $p_m$ |

Beispiel:

Gegeben sei folgender Datensatz, bestehend aus 10 Wertveränderungen eines Portfolios (Profit and Loss - PnL)

| $x_i$ | Merkmalsausprägung |
|---|---|
| $x_1$ | -1000 |
| $x_2$ | - 500 |
| $x_3$ | -500 |
| $x_4$ | -500 |
| $x_5$ | -100 |
| $x_6$ | 0 |
| $x_7$ | 1000 |
| $x_8$ | 2000 |
| $x_9$ | 2000 |
| $x_{10}$ | 2500 |

Einige Werte haben den gleichen Wert ($x_2$ und $x_3$ und $x_4$) und ( $x_8$ und $x_9$). Deshalb unterscheiden wir in disjunkte Merkmalsausprägungen. Die nachfolgende Tabelle enthält die disjunkten Merkmalsausprägungen sowie die dazugehörigen absoluten und relativen Häufigkeiten. Damit sind gleichzeitig die absolute und relative Häufigkeitsverteilung dargestellt:

| disjunkte Merkmalsausprägung | absolute Häufigkeiten | relative Häufigkeiten |
|---|---|---|
| $\xi_1 = -1000$ | 1 | $0,1$ |
| $\xi_2 = -500$ | 3 | $0,3$ |
| $\xi_3 = -100$ | 1 | $0,1$ |
| $\xi_4 = 0$ | 1 | $0,1$ |
| $\xi_5 = 1000$ | 1 | $0,1$ |
| $\xi_6 = 2000$ | 2 | $0,2$ |
| $\xi_7 = 2500$ | 1 | $0,1$ |

Der Begriff der Verteilungsfunktion ist eng mit dem Begriff der Häufigkeitsverteilung verbunden. Zunächst bilden wir die absolute und relative Summenhäufigkeit. Dazu werden die absoluten und relativen Häufigkeiten der disjunkten Merkmalsausprägungen $\xi_l$ verwendet.

**absolute Summenhäufigkeit** $H_l$:

$$H_l = \sum_{r=1}^{l} n_r$$

Interpretation: $H_l$ Merkmalsausprägungen haben einen Wert kleiner oder gleich der disjunkte Merkmalsausprägung $\xi_l$.

**relative Summenhäufigkeit** $F_l$**:**

$$F_l = \sum_{r=1}^{l} p_r$$

Interpretation: $F_l \cdot 100\%$ aller Merkmalsausprägungen haben einen Wert kleiner oder gleich der disjunkte Merkmalsausprägung $\xi_l$.

Beispiel:

Für das oben angeführte Beispiel von 10 Merkmalsausprägungen gilt für $l = 3$:

$$H_3 = \sum_{r=1}^{3l} n_r = 1 + 3 + 1 = 5$$

$$F_3 = \sum_{r=1}^{3} p_r = 0,1 + 0,3 + 0,1 = 0,5$$

Interpretation: 5 Beobachtungen oder 50% aller Beobachtungen haben einen Wert, der $\xi_3 = -500$ nicht überschreitet, sofern der Datensatz geordnet ist.

Zur Definition der Verteilungsfunktion benötigt man die relativen Summenhäufigkeiten.

Definition der **Verteilungsfunktion:**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \forall x : x < \xi_1 \\ F_l = \sum_{r=1}^{l} p_r & \forall x : \xi_l \leq x < \xi_{l+1} \quad l = 1, 2, ..., m-1 \\ 1 & \forall x : x \geq \xi_m \end{cases}$$

mit

| | |
|---|---|
| x | relle Zahl |
| $\xi_1$ | kleinster beobachteter Wert (disjunkte Merkmalsausprägung) |
| $\xi_m$ | groesster beobachteter Wert (disjunkte Merkmalsausprägung) |
| $p_l = p(\xi_l)$ | relative Häufigkeit der Merkmalsausprägungen $X = \xi_l$ |

Interpretation: $F(x)$ ist die relative Summenhäufigkeit, dass die Merkmalsausprägungen eine Wert kleiner oder gleich der reellen Zahl x annehmen.

**Beispiel:**

Zunächst werden die Summenhäufigkeitsverteilungen berechnet: sie sind inder nachfolgenden Tabelle dargestellt:

| disjunkte Merkmalsausprägung | absolute Summenhäufigkeiten $H_l$ | relative Summenhäufigkeiten $F_l$ |
|---|---|---|
| $\xi_1 = -1000$ | 1 | 0,1 |
| $\xi_2 = -500$ | 4 | 0,4 |
| $\xi_3 = -100$ | 5 | 0,5 |
| $\xi_4 = 0$ | 6 | 0,6 |
| $\xi_5 = 1000$ | 7 | 0,7 |
| $\xi_6 = 2000$ | 9 | 0,9 |
| $\xi_7 = 2500$ | 10 | 1,0 |

Man erhält folgende Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \forall x : x < \xi_1 & \forall x : x < -1000 \\ 0,1 & \forall x : \xi_1 \leq x < \xi_2 & \forall x : -1000 \leq x < -500 \\ 0,4 & \forall x : \xi_2 \leq x < \xi_3 & \forall x : -500 \leq x < -100 \\ 0,5 & \forall x : \xi_3 \leq x < \xi_4 & \forall x : -100 \leq x < 0 \\ 0,6 & \forall x : \xi_4 \leq x < \xi_5 & \forall x : 0 \leq x < 1000 \\ 0,7 & \forall x : \xi_5 \leq x < \xi_6 & \forall x : 1000 \leq x < 2000 \\ 0,9 & \forall x : \xi_6 \leq x < \xi_7 & \forall x : 2000 \leq x < 2500 \\ 1 & \forall x : x \geq \xi_7 & \forall x : x \geq 2500 \end{cases}$$

**2. Quantil eines eines Datensatzes mit Einzelwerten**

Gegeben sei die Reihe geordneter Beobachtungen $x_j$ eines Datensatzes:

$$x_1 \leq x_2 \leq \ ..., \leq x_n$$

Definition: Der **Median** $\widetilde{x}$ des Datensatzes ist bei einer ungeraden Anzahl von Beobachtungen:

$$\widetilde{x} = x_{\frac{n+1}{2}}$$

Definition: Der **Median** $\widetilde{x}$ des Datensatzes ist bei einer geraden Anzahl von Beobachtungen:

$$\widetilde{x} \in \left\{x_{\frac{n}{2}}, x_{\frac{n}{2}+1}\right\}$$

häufig

$$\widetilde{x} = \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$$

Interpretation: mindestens 50 % der Beobachtungen sind kleiner oder gleich als $\widetilde{x}$ und mindestens 50 % aller Beobachtungen sind größer oder gleich $\widetilde{x}$.

Es sei darauf hingewiesen, dass bei einer geraden Anzahl von Beobachtungen jeder Wert $\widetilde{x} \in \left\{x_{\frac{n}{2}}, x_{\frac{n}{2}+1}\right\}$ den Median (d.h. den Wert, welcher den Datensatz in zwei Hälften unterteilt) bilden kann. Exemplarisch als Repräsentant wird der Mittelwert aus $x_{\frac{n}{2}}$ und $x_{\frac{n}{2}+1}$ gebildet: $\widetilde{x} = \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$ gebildet.

**Verallgemeinerung des Begriffes Median - das Quantil:**

Der Datensatz soll nun nicht mehr in zwei Hälften unterteilt werden, sondern in beliebige zwei Teile. Dazu wird eine Zahl $p$ mit $0 \leq p \leq 1$ vorgegeben ( beim Median hat $p$ den Wert $0,5$), die maßgeblich für die Bestimmung des Quantils ist.

Diese Verallgemeinerung des Medians heißt **Quantil** und wird mit $x_p$ bzw. $x_{p\cdot 100\ \%}$ bezeichnet.

Interpretation: Mindestens $p \cdot 100$ % der Beobachtungen sind kleiner oder gleich als $x_p$ und mindestens $(1-p)\cdot 100$ % aller Beobachtungen sind größer oder gleich $x_p$. D.h. der Datensatz der geordneten Element besteht aus zwei Teilen:

$$\underbrace{x_1 \leq x_2 \leq \ ..., \ x_k}_{p\cdot 100\ \%} \ \underbrace{\leq x_{k+1} \leq x_{k+2} \leq \ ..., \ x_n}_{(1-p)\ \cdot 100\ \%}$$

Um das Quantil $x_p$ zu bestimmen, ist der Parameter $p$ mit der Anzahl der Einzelwerte des Datensatzes zu multiplizieren. Ist das Produkt ganzzahlig, ist damit der Einzelwert bestimmt, der das Quantil bildet, d.h. der Wert aus dem Datensatz, der beide Teile des Datensatzes trennt.

$$g = n \cdot p$$

Das Quantil ist dann $x_p = x_g$.

Ist jedoch das Produkt nicht ganzzahlig, ist ein Wert zu bestimmen, der zwischen zwei ganzzahligen Einzelwerten liegt. Dazu wird zunächst der ganzzahlige Bestandteil $\widetilde{g}$ von $g$ gebildet werden. Dann gilt :

$$x_p \in \{x_{\widetilde{g}}, x_{\widetilde{g}+1}\}$$

Das Quantil $x_p$ liegt zwischen den beiden ganzzahligen Werten $x_{\widetilde{g}}$ und $x_{\widetilde{g}+1}$. Es ist möglich, das Quantil so zu bestimmen, dass es der Lage zwischen den ganzzahligen Einzelwerten entspricht. Dazu ist der nichtganzzahlige Anteil $r$ der Zahl $g$ zu bilden: $r = g - \widetilde{g}$

$$\widetilde{g} < g = \widetilde{g} + r \leq \widetilde{g} + 1$$

dann

$$x_p = (1 - r) \cdot x_{\widetilde{g}} + r \cdot x_{\widetilde{g}+1}$$

Häufig nutzt man den Durchschnitt aus $x_{\widetilde{g}}$ und $x_{\widetilde{g}+1}$:

$$x_p = \frac{x_{\widetilde{g}} + x_{\widetilde{g}+1}}{2}$$

Beispiel (Nutzung des obigen Datensatzes):

Es sind der Median, das 20%-Quantil und das 99%-Quantil zu berechnen.
Der Parameter $p$ hat für die Berechnung des Medians den Wert 0,5:

$$\widetilde{x} = \frac{1}{2} \cdot (x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) = \frac{1}{2} \cdot (x_{\frac{10}{2}} + x_{\frac{10}{2}+1}) = 0,5 \cdot (x_5 + x_6) = 0,5 \cdot (-100 + 0) = -50$$

Zur Berechnung des Quantile sind die Produkte $g = n \cdot p$ zu bestimmen. Zunächst wird das 20%-Quantil bestimmt. Den Wert des Parameters $g$ erhält man durch Multiplikation von 20% mit der Anzahl der Beobachtungen:

$$g = n \cdot p = 0,2 \cdot 10 = 2$$

Daraus kann das 20%-Quantil abgeleitet werden:

$$x_{0,2} = x_2 = -500$$

Für das 99%-Quantil (mit $p = 0,99$) erhält man:

$$g = n \cdot p = 0,99 \cdot 10 = 9,9$$

Der nichtganzzahlige Anteil für das 99%-Quantil beträgt 0,9. Die Quantilsberechnung kann nun vorgenommen werden:

$$x_{0,99} = \frac{x_{\widetilde{9}} + x_{\widetilde{10}}}{2} = \frac{2000 + 2500}{2} = 2250$$

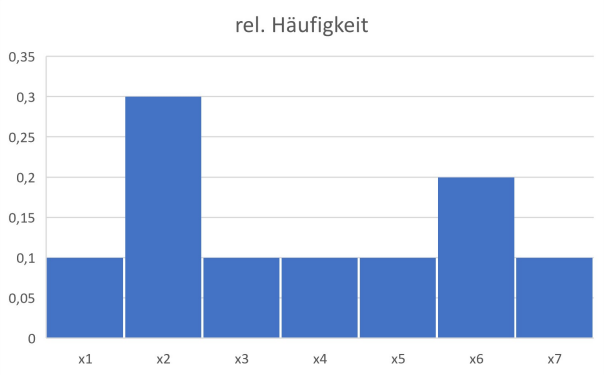
bei Verwendung des Mittelwertes

$$x_{0,99} = (1 - r) \cdot x_{\widetilde{g}} + r \cdot x_{\widetilde{g}+1} = 0,1 \cdot x_9 + 0,9 \cdot x_{10} = 0,1 \cdot 2000 + 0,9 \cdot 2500 = 2450$$

bei der Nutzung der Lage zwischen den ganzzahligen Einzelwerten

Der Median beträgt -50, das 20%-Quantil 500 und das 99%-Quantil 2250, wenn der Mittelwert zur Bestimmung des Quantils verwendet wird und 2450, wenn der Abstand der Zahl g von den beiden ganzzahligen Einzelwerten berücksichtigt wird. Der Verlust von -50 teilt den Datensatz in zwei Hälften. 20% aller Werte sind kleiner oder gleich als -500; 80% aller Werte sind größer oder gleich als -500. 99% aller Werte sind kleiner oder gleich als 2250 (bzw. 2450); 1% aller Werte sind kleiner oder gleich als 2250 (bzw. 2450).

Zur Interpretation des Quantils kann man das Histogramm des Datensatzes nutzen.




Dabei verzichten wir wegen der geringen Anzahl der Beobachtungen auf die übliche Einteilung des Datensatzes in Intervalle. Der Flächeninhalt des Histogramms beträgt 1. Soll nun der Datensatz in zwei Teile, z.B. im Verhältnis 99% : 1% geteilt werden, bedeutet das auch die Aufteilung der Fläche im Verhältnis 99% : 1%. Im rechten Teil der Grafik befinden sich 1% der Gesamtfläche. Das Quantil ist dann der x-Wert, der die Fläche in das Verhältnis 99% : 1% teilt.

Auch aus der Verteilungsfunktion kann das Quantil abgelesen werden, denn es gilt:

$$x_p = min(x|F(x) \ \geq \ p) \tag{3.1}$$

Betrachten wir einen Ausschnitt aus der Verteilungsfunktion F(x)

$$F(x) = \begin{cases} \dots & \dots & \dots \\ 0,9 & \forall x : \xi_6 \leq x < \xi_7 & \forall x : \ 2000 \leq x < 2500 \\ 1 & \forall x : \ x \geq \xi_7 & \forall x : \ x \geq 2500 \end{cases}$$

Wird wiederum das Teilungsverhältnis 99% : 1% verwendet,so liegt die Teilungsgrenze des Datensatzes zwischen den Merkmalsausprägungen $x_9$ und $x_{10}$,also zwischen 2000 und 2500 und beträgt 2450.

Beispiel 2:

In der Risikoberechnung ist es üblich, langfristige Reihen der Veränderungsraten der Marktdaten zu betrachten. Als Beispiel verwenden wir die Entwicklung des Wechselkurses des USD zum EURO ($wk_t(USD, EUR)$) vom 2.1.2020 bis 22.12.2020. Insgesamt handelt es sich dabei um geneu 250 Veränderungsraten ($w_{wk_t}(USD, EUR)$). Die Veränderungsraten des Wechselkurses werden nach folgender Formel berechnet:

$$w_{wk_t}(USD\ EUR) = \frac{wk_t(USD\ EUR) - wk_{t-1}(USD\ EUR)}{wk_{t-1}(USD\ EUR)}$$

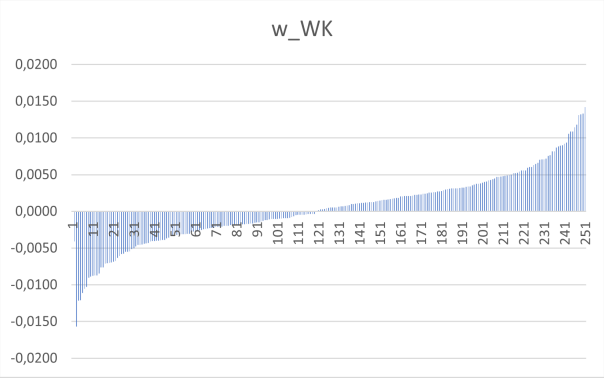
Der Datensatz ist in der nachfolgenden Tabelle dargestellt:

| Datum | Wechselkurs- | Veränderungsraten des Wechselkurses |
|---|---|---|
| 02.01.2020 | 1,1193 | – |
| 03.01.2020 | 1,1147 | -0,0041 |
| 04.01.2020 | 1,1194 | 0,0042 |
| ... | ... | ... |
| 18.12.2020 | 1,2259 | 0,0011 |
| 21.12.2020 | 1,2173 | -0,0070 |
| 22.12.2020 | 1,2239 | 0,0054 |

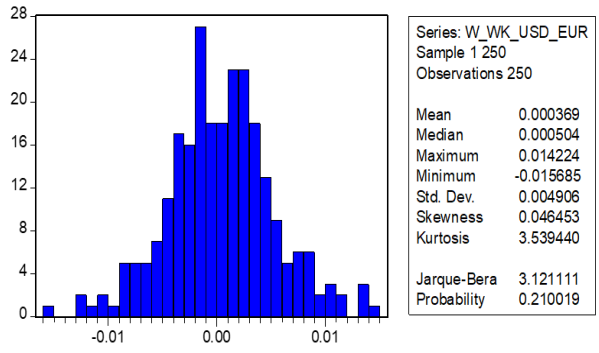
Der geordnete Datensatz der Veränderungsraten,beginnend mit dem kleinsten Wert, ist in der nachfolgenden Tabelle dargestellt:

| Beobachtung | Veränderungsraten des Wechselkurses |
|---|---|
| 1 | -0,0041 |
| 2 | -0,0157 |
| 3 | -0,0122 |
| ... | ... |
| 248 | 0,0132 |
| 249 | 0,0133 |
| 250 | 0,0142 |

Oder in grafischer Form:




Das zugehörige Histogramm mit einigen statistischen Informationen sind in folgender Grafik dargestellt:




Das 1%-Quantil bei 250 Veränderungsraten liegt zwischen der zweiten und dritten Beobachtung des geordneten Datensatzes, der Parameter r beträgt 0,5 ($g = n \cdot p = 250 \cdot 0,01 = 2,5$ und $r = 2,5 - 2$):

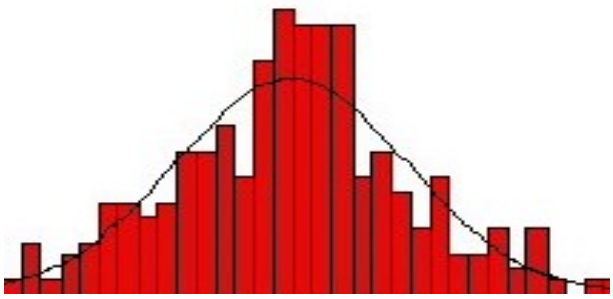
$$x_p \in \{w_{wk_2}(USD\ EUR), w_{wk_3}(USD\ EUR)\}$$
$$x_p = \frac{(w_{wk_2}(USD\ EUR) + w_{wk_3}(USD\ EUR)}{2} = \frac{-0,0157 - 0,0122}{2} = -0,01395$$

Interpretation: 1% aller Veränderungsraten haben einen Wert kleiner oder gleich als -0,01395, 99% aller Veränderungsraten haben einen Wert nicht kleiner als -0,01395.

### 3. **Dichtefunktion und Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße**

Es kann zielführend sein, an Stelle von diskreten Häufigkeitsverteilungen und Verteilungsfunktionen stetige Funktionen zu verwenden. Das Beispiel der 250 Veränderungsraten des Wechselkurses zeigt, dass die diskrete Häufigkeitsverteilung bzw. die Verteilungsfunktion etwa 250 Elemente oder Zeilen hat und damit unübersichtlich ist. Besonders dann ist ein Übergang zur stetigen Variante dann sinnvoll, wenn theoretische Verteilungen die diskrete Häufigkeitsverteilungen annähernd wieder spiegeln können. Mit etwas Phantasie kann man aus dem Histogramm der Veränderungsraten des Wechselkurses eine Normalverteilung erkennen. In praktischen Berechnungen erweist es sich, dass die Verteilung von Marktdaten (Veränderungsraten der Zinssätze und Wechselkurse) und Profit and Loss näherungsweise durch eine Normalverteilung beschrieben werden können.

Das Histogramm einer Häufigkeitsverteilung kann Auskunft darüber geben, welche stetiges Dichtefunktion der Häufigkeitsverteilung entspricht. Um das zu illustrieren, betrachten wir eine Zeitreihe von Veränderungsraten eines Zinssatzes im Verlaufe eines Jahres:



Die Häufigkeitsverteilung kann durch eine Normalverteilung approximiert werden. Im Histogramm ist auch die Dichtefunktion eingezeichnet, wobei die Parameter Mittelwert und Varianz aus der Verteilung der Einzelwerte abgeleitet werden.

**Definitionen:**

**Dichtefunktion:**

Eine integrierbare Funktion f heißt Dichtefunktion der Zufallsvariable X, wenn gilt:

$$\int_a^b f(t)dt = P(a \leq X \leq b)$$

Dabei ist $P(a \leq X \leq b)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X pn den Genzen $(a \leq X \leq b)$ liegt.

**Verteilungsfunktion:**

$$F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

mit $x \in R$ und X - reelle Zufallsvariable

Der Ausdruck $P(X < x)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße X kleiner als die reelle Zahl x ist.

Wir betrachten eine spezielle Dichte- bzw. Verteilungsfunktion: die **Normalverteilung**.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
$$F(x) == \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Dabei bezeichnen:
- $f(t)$ die Dichtefunktion mit den Parametern $\mu$ und $\sigma$
- $F(x)$ die Verteilungsfunktion mit den Parametern $\mu$ und $\sigma$
- $\mu$ den Mittelwert
- $\sigma$ die Standardabweichung des Datensatzes der Einzelwerte.

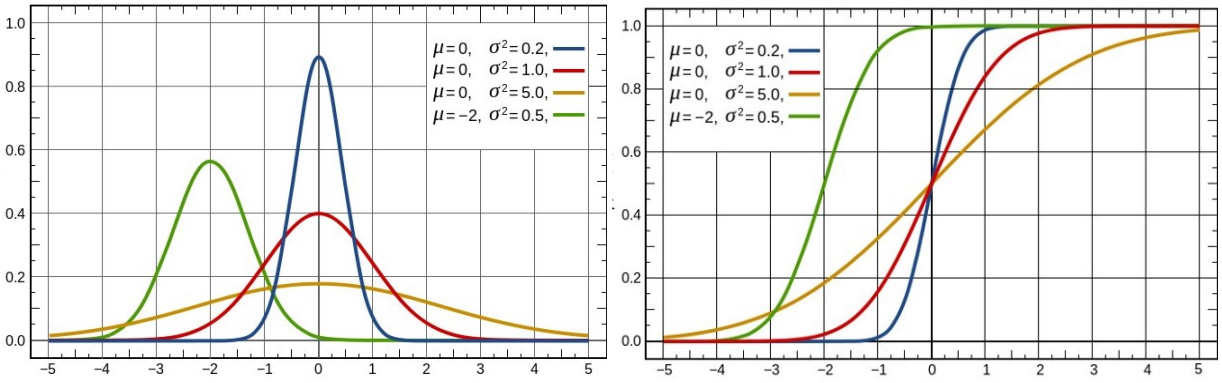
An dieser Stelle sei es geboten, die beiden Parameter der Verteilung kurz zu spezifizieren. Der Mittelwert $\mu$ und die Varianz $\sigma^2$ bzw. die Standardabweichung $\sigma$ werden aus den Einzelwerten $x_i$ mit $i = 1, 2, ..., n$ der Zeitreihe bestimmt:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$
$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{n-1}$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{n-1}}$$

Sind der Mittelwert $\mu = 0$ und die Standardabweichung $\sigma^2 = 1$ spricht man von der Standardnormalverteilung. Die Formeln für Dichte- und Verteilungsfunktion vereinfachen sich wie folgt:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$
$$F(x) == \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

In den nachfolgenden Grafiken sind Dichte- und Verteilungsfunktion einer Normalverteilung dargestellt.




Ist der Mittelwert $\mu > 0$, wird die Grafik der Dichtefunktion der Standardnormalverteilung nach rechts verschoben, bei einem Mittelwert $\mu < 0$ erfolgt eine Verschiebung nach links. Eine Standardabweichung von $\sigma^2 < 1$ hat eine Streckung der Kurve der Dichtefunktion der Standardnormalverteilung zur Folge, während $\sigma^2 > 1$ eine Stauchung der Kurve zur Folge hat.

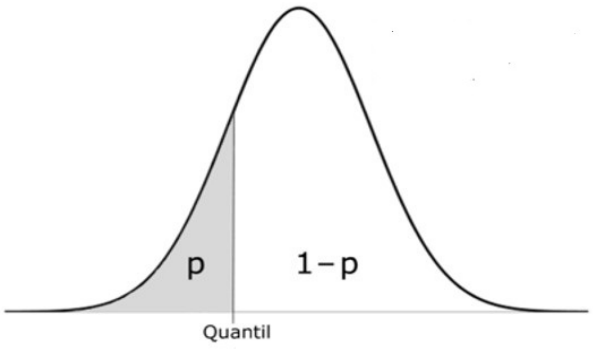
4. **Quantil einer Verteilung einer Zufallsgröße**

Das Quantil der Ordnung p einer Zufallsgröße X ($x_p$) ist definiert als:

$$x_p = F_X^{-1}(p) = inf[x \in R, F_X(x) \geq p] \tag{3.2}$$

Dabei bezeichnen:
- X eine Zufallsvariable
- x eine reelle Zahl ($-\infty < x < \infty$)
- $F_X(x)$ die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X
- p eine reelle Zahl ($0 \leq p \leq 1$)
- $F_X^{-1}(p)$ - die inverse Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X
- $x_p$ Quantil der Ordnung p

Betrachtet man die Standardnormalverteilung, kann das Quantil mit Hilfe der Dichtefunktion grafisch interpretiert werden. Der Flächeninhalt unterhalb der Kurve der Dichtefunktion bis zur x-Achse beträgt 1. Der Parameter p unterteilt diese Fläche in zwei Teile mit dem Flächeninhalt p und (1-p). Der Wert auf der x-Achse, der die Trennung der beiden Flächen vornimmt, ist das Quantil der Ordnung p ($x_p$:




Auch die Verteilungsfunktion kann zur Interpretation herangezogen werden. Dazu fixieren wir auf der der y-Achse den Wert p und bewegen uns parallel zur x Achse zum Schnittpunkt mit der Kurve der Verteilungsfunktion und lesen den Wert des Schnittpunktes auf der x-Achse ab. Dieser Wert ist das Quantil der Ordnung p ($x_p$)

**Beispiel:**

Wir betrachten das Beispiel der Veränderungsraten des Wechselkurses USD zu EUR. Um die Dichte und Verteilungsfunktion zu bilden, müssen zu nächst Mittelwert und Standardabweichung berechnet werden. Hier wird nur das Ergebnis der Berechnungen angegeben, da die Einzelwerte nicht vollständig in der Tabelle angegeben werden.

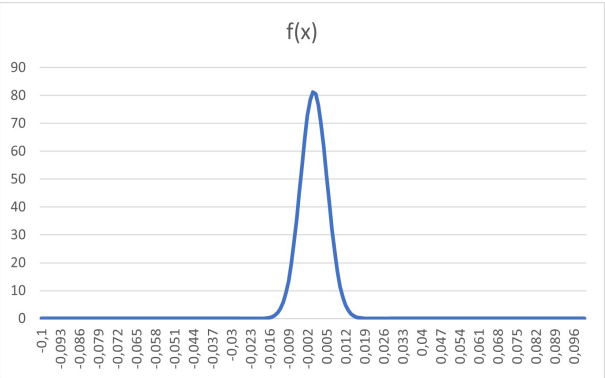
$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 0,000369$$

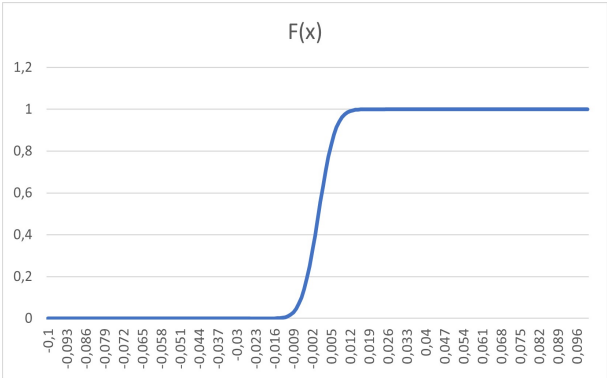
$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{n-1} = 0,000024$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{n-1}} = 0,004906$$

Der Mittelwert$\mu$ hat den Wert 0,000369. Die Varianz $\sigma^2$ beträgt 0,000024 die Standardabweichung $\sigma$ 0,004906.

Dichtefunktion f(x) und Verteilungsfunktion F(x) haben folgende Form:




Soll nun z.B. das 10%-Quantil bestimmt werden ($p = 0,1$), ist der Wert der inversen Verteilungsfunktion ($F_X^{-1}(p)$) zu bestimmen. In alten Statistiklehrbüchern wurden ausgewählte Werte der inversen Verteilungsfunktion in Tabellenform angegeben, wodurch näherungsweise der Wert $F_X^{-1}(p)$ bestimmt werden konnte. Inzwischen ist im Excel die Verteilungsfunktion der Normalverteilung implementiert, die durch die Funktion **NormInv(Zufallszah** aufgerufen werden kann. Dabei entspricht p der Zufallszahl.

$$F_X^{-1}(0,1) = \mathbf{NormInv}(0,1; 0,000369; 0,070043) = -0,0894$$

D.h. 10% aller Veränderungsraten haben einen Wert kleiner oder gleich -0,0894 oder 90% aller Veränderungsraten haben einen Wert größer oder gleich -0,0894.

Vergleichen wir nun die Berechnung des Quantils aus Einzelwerten mit der Quantilsbestimmung mit Hilfe der inversen Verteilungsfunktion $F_X^{-1}(p)$. Es wird - wie bereits bei der Berechnung des Quantils aus Einzelwerten das 1%-Quantil mit dem Parameter ($p = 0,01$) berechnet.

$$F_X^{-1}(0,01) = \mathbf{NormInv}(0,01; 0,000369; 0,070043) = -0,1626$$

Die Berechnung aus Einzelwerten ergab folgendes Ergebnis:

$$x_{0,01} \in \{w_{wk_2}((USD\ EUR)); w_{wk_3}((USD\ EUR))\}$$
$$x_{0,01} = \frac{w_{wk_2}((USD\ EUR)) + w_{wk_3}((USD\ EUR))}{2} = \frac{-0,0157 - 0,0122}{2} = -0,01395$$

Interpretation: 1% aller Veränderungsraten haben einen Wert kleiner oder gleich als -0,01395, 99% aller Veränderungsraten haben einen Wert nicht kleiner als -0,01395, wenn das Quantil aus Einzelwerten bestimmt wird. Die Nutzung der inversen stetigen Verteilungsfunktion ergibt ein anderen Quantilswert (-0,1626). Der Unterschied erklärt sich daraus, dass die stetige inverse Verteilungsfunktion nur näherungsweise der Häufigkeitsverteilung aus Einzelwerten entspricht.

### 3.1.2 Value at Risk

Zu Beginn des Kapitels wurde bereits der Begriff Profit and Loss (PnL) eingeführt. Profit and Loss ist die Wertveränderung eines Finanzproduktes oder eines Portfolios $\Delta P(t_1, t_2)$ während der Haltedauer. Die Wertveränderung wird mit Hilfe der Preisfunktion $P(t)$ gemessen. Dabei gehen wir davon aus, dass die Preisveränderung durch die Veränderung der Marktdaten $y_i(t)$ hervorgerufen wird:

$$\Delta P(t) = \Delta P(t_0, t_1) = P(t_1) - P(t_0)$$
$$\Delta P(t) = \Delta P(t_0, t_1) = P\big(y_1(t_1), y_2(t_1), ..., y_j(t_1), ..., y_n(t_1)\big) - P\big(y_1(t_0), y_2(t_0), ..., y_j(t_0), ..., y_n(t_0)\big)$$

Der Begriff des Risikos, oder genauer gesagt des Value at Risk ($VaR$) ist eng mit dem des Begriffes Profit and Loss verbunden. Bei der Bestimmung des Risikos interessiert aber nicht die Höhe des Profits, sondern nur eine Aussage hinsichtlich des Verlustes. Die genaue Höhe eines Verlustes vorauszusagen ist schwierig, wenn man die Entwicklung der Marktdaten nicht kennt. Bestenfalls kann man eine Prognose wagen, der tatsächlich eintretende Verlust wird sich erst erweisen, wenn die Marktdatenveränderung bekannt ist. Bei Risikoberechnung beschränkt man sich deshalb auf die Angabe einer **Verlustoberschranke**, die mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit nicht überschritten wird. Übliche Wahrscheinlichkeiten sind dabei 95%, 99% und 99, 9%. Mit anderen Worten: welche Verlustobergrenze wird mit einer Wahrscheinlichkeit von z.B. 95% nicht überschritten. Diese Information ist deshalb wichtig, weil die betreffende Organisation, z.B. ein Finanzinstitut, angehalten ist, die entsprechende Summe (in Finanzinstituten wäre es das Eigenkapital) bereitzuhalten, um gegeben falls den Verlust auszugleichen. Auch eine Spieler im Spielcasino sollte auch die entsprechende Summe zur Verfügung haben, um den Spielverlust auszugleichen.

Zur Bestimmung der Verlustobergrenze wird das statistische Instrumentarium, speziell das Quantil nutzen. Formal können wir formulieren:

$$1 - p = P(\Delta P(t) < VaR(t, p)$$
$$x_{1-p} = min(\Delta P(t) | F(\Delta P(t)) \geq 1 - p) \tag{3.3}$$

Dabei bezeichnen wir die Verlustobergrenze, die mit einer Wahrscheinlichkeit $p$% nicht überschritten wird, mit $VaR(t, p)$ und nennen die Verlustobergrenze Value at Risk (VaR). $VaR(t, p)$ ist das $(1 - p)$%-Quantil der Verteilung der Wertveränderungen $\Delta P(t)$. Im folgenden behandeln wir sowohl den Fall einer diskreten Häufigkeitsverteilung als auch den stetigen Fall bei einer theoretischen Verteilungsfunktion, speziell einer Normalverteilung der Wertveränderungen. In jedem der beiden Fälle ist das $(1 - p)$%-Quantil der Verteilung der Wertveränderungen $\Delta P(t)$ zu bestimmen.

### 3.1.3 Historische Simulation

Die Berechnung des Value at Risk bei der historischen Simulation basiert auf der Quantilsbestimmung der Wertveränderung $\Delta P(t)$ aus Einzelwerten. Voraussetzung ist das Vorhandensein ein großen Anzahl von

Möglichkeiten der Wertveränderung, die durch eine einfachen Simulation erzielt werden kann. Es wird vorausgesetzt, dass aus statistischen Daten potentiell mögliche Wertveränderungen abgeleitet werden können. Dazu benötigt man eine Preisfunktion P(t), die den Wert eines Finanzproduktes oder Portfolios mit Hilfe der Marktdaten berechnen lässt und langfristige Reihen der Entwicklung der Marktdaten $y_i(t)$. Die Anzahl der Marktdaten betrage m. In der Regel verwendet man 251 Realisierungen der Marktdaten, was in etwa der Anzahl der Bankarbeitstage eines Kalenderjahres entspricht. Die Länge der Zeitreihe kann modifiziert werden, üblich ist jedoch eine Anzahl von 251. Aus der Zeitreihenanalyse ist bekannt, dass langfristige ökonomische Zeitreihen das Problem der Autokorrelation haben, d.h. der Wert der Marktdaten $y_i(t)$ zum Zeitpunkt t hängt maßgeblich von den Vorwerten der Zeitreihe $y_i(t-1)$, $y_i(t-2)$ ,... ab. Werden dagegen die Wachstumstempi $w_{y_j}(t_1)$ bzw.$w_{y_j}(t_0)$ verwendet, tritt das Problem nicht mehr auf. Durch die Nutzung der Wachstumstempi reduziert sich der verwendete Datensatz auf 250 Wachstumstempi. Außerdem ist der Mittelwert in der Regel sehr nahe Null, so dass in der praktischen Anwendung unterstellt $\mu = 0$ wird.

$$
\begin{aligned}
\Delta P(t) = \Delta P(t_0, t_1) &= P(t_1) - P(t_0) \\
\Delta P(t) &= P\big(y_1(t_1), y_2(t_1), ..., y_j(t_1), ..., y_m(t_1)\big) - P\big(y_1(t_0), y_2(t_0), ..., y_j(t_0), ..., y_m(t_0)\big) \\
\Delta P(t) &= P\big(y_1(t_0), y_2(t_0), ..., y_j(t_0), ..., y_m(t_0), w_{y_1}(t_1), w_{y_2}(t_1), ..., w_{y_j}(t_1), ..., w_{y_m}(t_1)\big) - \\
&\quad - P\big(y_1(t_0), y_2(t_0), ..., y_j(t_1), ..., y_m(t_1)\big)
\end{aligned}
$$

In den weiteren Betrachtung verkürzen wir zunächst die Haltedauer $(t_1 - t_0)$ auf einen Tag $(t_1 - t_0 = T-(T-1) = 1)$. Die Aufgabe besteht darin, am Bewertungstag (heutiger Tag), den wir mit $T-1$ bzw. als Tag 0 bezeichnen, durch Simulation eine Aussage hinsichtlich des möglicherweise auftretenden Verlustes (Loss) für den darauf folgenden Tag T (morgiger Tag oder den Tag 1) abzuleiten. Dazu verwenden wir den Wert der Marktdaten für den Tag $T-1$ $(y_j(T-1))$ bzw. $(y_j(0))$, die als bekannt gelten, und die simulierte Wachstumstempi $(w_{y_j}(T))$ oder $(w_{y_j}(1))$ für den Tag T (Tag 1) .

$$
\begin{aligned}
\Delta P(T) = \Delta P(T-1, T) &= P(T) - P(T-1) \\
\Delta P(T) &= P\big(y_1(T), y_2(T), ..., y_j(T), ..., y_m(T)\big) - P\big(y_1(T_1), y_2(T-1), ..., y_j(T-1), ..., y_m(T-1\big) \\
\Delta P(T) &= P\big(y_1(T-1), y_2(T-1), ..., y_j(T-1), ..., y_m(T-1), w_{y_1}(T), w_{y_2}(T), ..., w_{y_j}(T), ..., w_{y_m}(T)\big) \\
&\quad - P\big(y_1(T-1), y_2(T-1), ..., y_j(T-1), ..., y_m(T-1)\big)
\end{aligned}
$$

Zur Berechnung der Wachstumstempi zum Vortag gibt es zwei Möglichkeiten:

$$w_{y_j}(t) = \frac{y_j(t) - y_j(t-1)}{y_j(t-1)} \tag{3.4}$$

$$w_{y_j}(t) = ln\big(\frac{y_j(t)}{y_j(t-1)}\big) \tag{3.5}$$

$$t = T-1, T-2, ..., T-250$$

Beide Berechnungsvorschriften ergeben näherungsweise den gleichen Wert. Hinter der Berechnungsvorschrift $ln\big(\frac{y_j(t)}{y_j(t-1)}\big)$ verbirgt sich eine Taylor-Zerlegung.

Die Wachstumstempi geben an, **um** wie viel Prozent das Marktdatum gegenüber dem Vortag wächst. Im Unterschied dazu bezeichnen wir den Ausdruck $(1 + w_{y_j}(t))$ als Wachstums- oder Veränderungsrate. Sie gibt an, **auf** wie viel Prozent das Marktdatum gegenüber dem Vortag wächst.

Wie schon angedeutet, besteht das Ziel durch Simulation 250 Werte des Profit and Loss zu erzeugen, für welche dann ein Quantil berechnet wird. Die Idee besteht darin, Marktdaten für den Zeitpunkt $T$ zu erzeugen (die zum Zeitpunkt $T-1$ nicht bekannt sind), in dem jeweils eine der Veränderungsraten der langen Reihen der Marktdaten auf die aktuellen Werte zum Zeitpunkt $T-1$ angewendet wird:

$$
\begin{aligned}
y_j(T,t^*) &= y_j(T-1)\cdot(1+w_{y_j}(t^*)) && (3.6)\\
t^* &= T-1, T-2, ..., T-250 \\
j &= 1,2,...,m \\
P(T,t^*) &= P\big(y_1(T,t^*), y_2(T,t^*), ..., y_j(T,t^*), ..., y_m(T,t^*)\big) && (3.7)\\
\Delta P(T,t^*) &= P(T,t^*) - P(T-1) && (3.8)\\
& && (3.9)
\end{aligned}
$$

Dabei ist $y_j(T,t^*)$ der simulierte Wert des Marktdatums j für den Zeitpunkt T mit Hilfe der Veränderungsrate $w_{y_j}(t^*)$ aus den Reihen der historischen Marktraten. Insgesamt werden 250 simulierte Werte des Marktdatums j für den Zeitpunkt T erzeugt, die dann zur Berechnung von ebenfalls 250 hypothetischen Preise des Finanzinstrumentes oder Portfolios $P(T,t^*)$ zum Zeitpunkt T verwendet werden. Aus den berechneten Preisen zum Zeitpunkt T und dem bekannten Preis des Finanzinstrumentes zum Zeitpunkt $T-1$ werden dann 250 hypothetische Profits and Loss berechnet (hypothetische Wertveränderungen am Tage T gegenüber dem Vortag $T-1$). Daraus wird das 1%- bzw. das 5%-Quantil bestimmt.

**1 Risikofaktor**

Handelt es sich um nur ein Marktdatum als Risikofaktor, vereinfacht sich die Darstellung.

$$
\begin{aligned}
\Delta P(T) = \Delta P(T-1,T) &= P(1) - P(0) \\
\Delta P(T) &= P\big(y(T)\big) - P\big(y(T-1)\big) \\
\Delta P(T) &= P\big(y(T-1), w_y(T)\big) - P\big(y(T-1)\big) \\
y(T,t^*) &= y(T-1)\cdot(1+w_y(t^*)) \\
t^* &= T-1, T-2, ..., T-250 \\
P(T,t^*) &= P\big(y(T,t^*)\big) \\
\Delta P(T,t^*) &= P(T,t^*) - P(T-1)
\end{aligned}
$$

Das 1%-Quantil gibt dann den größtmöglichen Verlust mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% an, der durch die Änderung der Marktdaten hervorgerufen wird, wenn das Finanzinstrument oder das Portfolio genau einen Tag unverändert gehalten wird. Die Verlustobergrenze wird als Value at Risk ($VaR(99\%)$) bezeichnet:

$$
\begin{aligned}
1-p &= P(\Delta P(t) < VaR(t,p)) \\
0,01 &= P(\Delta P(t) < VaR(t,99\%)) \\
VaR(t,p) = x_{1-p} &= min(\Delta P(t) | F(\Delta P(t)) \geq 1-p) \\
VaR(t,99\%) = x_{0,01} &= min(\Delta P(t) | F(\Delta P(t)) \geq 0,01)
\end{aligned}
$$

Das analoge gilt auch für eine Wahrscheinlichkeit von 95%:

$$
\begin{aligned}
0,05 &= P(\Delta P(t) < VaR(t,95\%) \\
VaR(t,95\%) = x_{0,05} &= min(\Delta P(t) | F(\Delta P(t)) \geq 0,05)
\end{aligned}
$$

**Beispiel 1:**

Ein Kapital von 100000 USD wird 22.12.2020 bis zum 23.12.2020 unverändert gehalten. Die Heimatwährung sei EURO. Am 22.12.2020 beträgt der Wechselkurs $w_{wk}(T-1) = 0,817060217\frac{EUR}{USD}$. Damit sind die 100000 USD am 22.12.2020 genau 81706,02 EUR wert.

Zuer historischen Simulation benötigt man 251 Marktdaten, in unserem Fall 251 Wechselkurse $w_{wk}(t)$ für $t = 1, 2, ..., 251$ mit $T-1 = 251$. Hier handelt es sich um ein Marktdatum als Risikofaktor. Die langfristige Zeitreihe kann man den statistischen Berichtswesen entnehmen. Vom 2.1.2020 bis zum 22.12,2020 gibt es genau 251 tägliche Beobachtungen des Wechselkurses, wobei nur Bankarbeitstage in Deutschland berücksichtigt werden, wenn die Heimatwährung EURO und der Standort Deutschland ist. Wochenende und Feiertage werden dabei herausgerechnet.

In der nachfolgenden Tabelle sind für ausgewählte Beobachtungen die Rechenschritte angeführt, die im folgenden erläutert werden.

| Nr. $t^*$ | Datum | Wechselkurse | Wachstumstempi des Wechselkurses | hypothetische Wechselkurse für den 23.12.2020 | hypothetische Preise für den 23.12.2020 | hypothetische PnL für den 23.12.2020 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 02.01.2020 | 0,8934 | – | – | – | – |
| 1 | 03.01.2020 | 0,8971 | 0,0041 | 0,8204 | 82043,20 | 337,17 |
| 2 | 06.01.2020 | 0,8933 | -0,0042 | 0,8136 | 81362,96 | -343,06 |
| 3 | 07.01.2020 | 0,8951 | 0,0020 | 0,8187 | 81866,92 | 160,90 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 248 | 18.12.2020 | 0,8157 | -0,0011 | 0,8162 | 81619,38 | -86,64 |
| 249 | 21.12.2020 | 0,8215 | 0,0070 | 0,8228 | 82283,26 | 577,24 |
| 250 | 22.12.2020 | 0,8171 | -0,0054 | 0,8127 | 81265,41 | -440,61 |

Am 03.01.2020 ist der Wechselkurs gegenüber dem Vortag um $0,41\%$ gefallen, das Wachstumstempo beträgt $-0,41\%$. Dem gegenüber ist der Wechselkurs 06.01.2020 gegenüber dem Vortag (Bankarbeitstag), d.h. dem 0.3.01.2020 **um** $0,42\%$. gestiegen. Diese Berechnungen erfolgen für alle 250 Wachstumstempi. Das letzte (250.) Wachstumstempo am 22.12.2020 beträgt $0,54\%$.

Im nächsten Schritt wird der hypothetische Wechselkurs für den 23.12.2020 berechnet. Dazu ist der Wechselkurs am 22.12.2020 (T-1 oder heutiger Tag) mit den entsprechenden Veränderungsraten des Wechselkurses, beginnend mit dem 03.01.2020 und endend am 22.12.2020, zu multiplizieren:

$$\begin{aligned}
wk(T,1) &= wk(T-1)\cdot(1+w_{wk}(1)) = 0,8171\cdot(1+0,0041) = 0,8204\\
wk(T,2) &= wk(T-1)\cdot(1+w_{wk}(2)) = 0,8171\cdot(1-0,0042) = 0,8136\\
&... = ...\\
wk(T,t^*) &= wk(T-1)\cdot(1+w_{wk}(t^*)) =\\
&... = ...\\
wk(T,250) &= wk(T-1)\cdot(1+w_{wk}(250)) = 0,8171\cdot(1-0,0054) = 0,8127
\end{aligned}$$

Man kan die Größe $wk(T,1)$ folgendermaßen interpretieren: Würde sich der Wechselkurs vom 22.12.2020 (heute) auf den 23.12.2020 (morgen) so entwickeln, wie der Wechselkurs vom 02.01.2020 auf den 03.01.2020 - also mit dem gleichen Wachstumstempo $wk(1)$- betrüge der Wechselkurs am 23.12.2020 0,8204 $\frac{EUR}{USD}$ $(0,8171\cdot(1+0,0041) = 0,8204)$. Würde man auf die Veränderung des Wechselkurses vom 22.12.2020 auf den 23.12.2020 das Wachstumstempo vom 03.01.2020 auf den 06.01.2020 anwenden $(wk(2))$, würde der Weckselkurs am 23.12.2020 0,8136 $\frac{EUR}{USD}$ betragen $(0,8171\cdot(1-0,0042) = 0,8136)$. In analoger Art und Weise wird mit den restlichen Wachstumstempi $(w_{wk}(3), w_{wk}(4), ..., w_{wk}(250))$ verfahren. Man erhält 250 hypothetische Wechselkurse für den 23.12.2020, ob wohl dieser Wert heute (22.12.2020) nicht bekannt ist. Die hypothetischen Wechselkurse werden nun zur Berechnung eines hypothetischen Preises des Finanzinstrumentes oder Portfolios genutzt. Dazu ist die Preisfunktion dieses sehr einfachen Finanzproduktes zu verwenden:

$$
\begin{aligned}
P(T,1) &= 100.000 \cdot wk(T,1) = 100000 \cdot 0,8204 \approx 82043,20 \\
P(T,2) &= 100.000 \cdot wk(T,2) = 100000 \cdot 0,8136 \approx 81362,96 \\
... &= ... \\
P(T,t*) &= 100.000 \cdot wk(T,t*) \\
... &= ... \\
P(T,250) &= 100.000 \cdot wk(T,250) = 100000 \cdot 0,8127 \approx 81265,41
\end{aligned}
$$

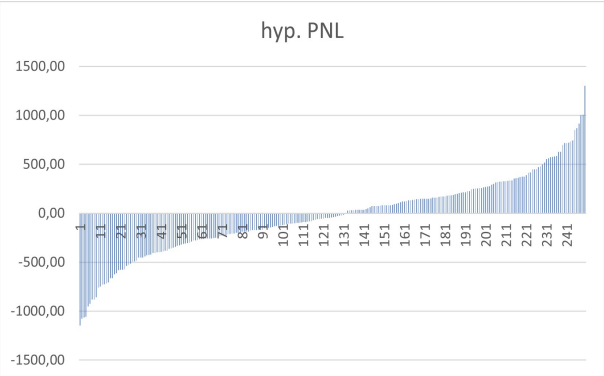
Man erhält 250 hypothetische Preise für den morgigen Tag (23.12.2020). Die Preise dienen der Berechnung der Wertveränderung des Finanzinstrumentes. Dazu ist vom hypothetischen Preis der Preis des Finanzinstrumentes von heute abzuziehen ($P(T-1) = 81706,02EUR$):

$$
\begin{aligned}
\Delta P(T,1) &= P(T,1) - P(T-1) = 82043,20 - 81706,02 = 337,17 \\
\Delta P(T,1) &= P(T,1) - P(T-1) = 81362,96 - 81706,02 = -343,06 \\
... &= ... \\
\Delta P(T,t*) &= P(T,t*) - P(T-1) \\
... &= ... \\
\Delta P(T,1) &= P(T,1) - P(T-1) = 82043,20 - 81706,02 = -440,61
\end{aligned}
$$

Insgesamt erhält man wiederum 250 hypothetische Wertveränderungen (PnL) des Finanzinstrumentes. Verwendet man das Wachstumstempo des Wechselkurses vom 02.01.2020 zum 03.01.2020 ergäbe sich ein Gewinn (Profit) von 337,17 EUR, für das Wachstumstempo vom 03.01.2020 zum 06.01.2020 ein Verlust (Loss) von 343,06 EUR. Zur Quantilsbestimmung sind die hypothetischen Wertveränderungen der Größe nach zu ordnen , beginnend mit dem kleinsten Wert (d.h. dem größten hypothetischen Verlust).

| Datum | Pnl |
|---|---|
| 26.03.2020 | -1145,86 |
| 06.03.2020 | -1073,94 |
| 02.03.2020 | -1065,22 |
| ... | ... |
| 13.03.2020 | 1000,72 |
| 19.03.2020 | 1006,10 |
| 17.03.2020 | 1302,00 |

Der größte hypothetische Verlust wird bei Verwendung des Wachstumstempo vom 26.03.2020 eingefahren, er beträgt 1145,86 EUR. Der größte Gewinn wird bei Anwendung des Wachstumstempo vom 17. 03.2020 erzielt, er beträgt 1302,00 EUR. Die nachfolgende Grafik zeigt die geordnete Reihe aller 250 Wertveränderungen:




Zur Bestimmung des Risikos sind die Verluste vom Interesse. Wir werden das Value at Risk ($VaR(T, 99\%)$) bestimmen, d.h. die Verlustobergrenze, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% nicht überschritten wird. Dazu ist das 1%-Quantil $x_{0,01}$ der Verteilung der Wertveränderungen zu bestimmen. Durch

Multiplikation der Anzahl der Beobachtungen mit $0,01$ kann bestimmt werden, zwischen welchen Beobachtungen das Quantil liegen muss:

$$g = n \cdot p = 250 \cdot 0,01 = 2,5$$

Damit liegt das Quantil zwischen der zweiten und dritten Beobachtung :

$$x_{0,01} \in \{\Delta P(T,2), \Delta P(T,3)\}$$

Das Quantil berechnet sich als Mittelwert von $\Delta P(T,2)$ und $\Delta P(T,3)$:

$$x_{0,01} = \frac{\Delta P(T,2) + \Delta P(T,3)}{2} = \frac{-1073,94 - 1065,22}{2} = -1069,58$$

Der maximal mögliche Verlust, der beim Halten der Position von 100000 EUR vom 22.12.2020 zum 23.12.2020 mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% eintreten kann, beträgt 1069,58 EUR.

Am Ende des 23.12.2020 ist der Wechselkurs für den Tag bekannt, und es kann der tatsächliche Verlust oder der Gewinn bestimmt werden. Der tatsächliche Wechselkurs am 23.12.2020 beträgt $0,821962847 \frac{EUT}{USD}$ (gerundet $0,8220 \frac{EUT}{USD}$). Der sich daraus ergebende Preis ist:

$$P(T) = 100000 \cdot 0,8219628 = 82196,28$$

Die tatsächliche Wertveränderung des Instrumentes ist:

$$P(T) - P(T-1) = 82196,28 - 81265,41 = 490,26$$

Es wurde ein Gewinn erzielt im Umfang von 490,26 EUR. Die Verlustobergrenze wurde nicht unterschritten: $\Delta P(T) > VaR(T, 99\%)$.

Häufig wird der Value at Risk auch mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% berechnet. Dazu ist folgendermaßen vorzugehen:

$$12,5 = 250 \cdot 0,05$$

Damit liegt das Quantil zwischen der zwölften und dreizehnten Beobachtung :

$$x_{0,05} \in \{\Delta P(T,12), \Delta P(T,13)\}$$

Das Quantil berechnet sich als Mittelwert von $\Delta P(T,12)$ und $\Delta P(T,13)$. Die Daten sind in der Tabelle der geordneten hypothetischen Wertveränderungen nicht enthalten. Der gesamte Datensatz und die entsprechenden Berechnungen sind im Anhang zu finden :

$$x_{0,05} = \frac{\Delta P(T,12) + \Delta P(T,13)}{2} = \frac{-728,68 - 724,10}{2} = -726,39$$

Der maximal mögliche Verlust, der beim Halten der Position von 100000 EUR vom 22.12.2020 zum 23.12.2020 mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% eintreten kann, beträgt 726,39 EUR. Die Verlustobergrenze sinkt bei einer Wahrscheinlichkeit von 95% im Vergleich zu 99%.

Mit Hilfe der historischen Simulation ist auch möglich, das Value at Risk für eine längere Haltedauer zu bestimmen, zum Beispiel für eine Haltedauer von 10 Tagen vom 22.12.2020 zum 08.01.2021 (Dabei sind die bankarbeitsfreien Tage um den Jahreswechsel berücksichtigt). Bei einer Haltedauer von 10 Tagen sind nicht die Wachstumstempi im Vergleich zum Vortag, sondern im Vergleich zu 10 Tage vor dem heutigen Tag zu bestimmen:

$$w_{y_j}(t) = \frac{y_j(t) - y_j(t-10)}{y_j(t-10)}$$
$$t = T-10, T-11, ..., T-259$$

Die Berechnung der hypothetischen Wechselkurse und Preisveränderungen modifiziert sich entsprechend.

$$\begin{aligned} y_j(T,t*) &= y_j(T-1) \cdot (1 + w_{y_j}(t*)) \\ t* &= T-10, T-11, ..., T-259 \\ P(T,t*) &= P\big(y_1(T,t*), y_2(T,t*), ..., y_j(T,t*), ..., y_n(T,t*)\big) \\ \Delta P(T,t*) &= P(T,t*) - P(T-10) \end{aligned}$$

## 2 Risikofaktoren

Die historische Simulation kann selbstverständlich auch für mehr als ein Marktdatum angewendet werden. So kann unser Beispiel so modifiziert werden, dass ein Portfolio, bestehend aus 2 Fremdwährungspositionen, untersucht wird. Es soll eine weitere Position in GBP im Umfang von 200000 GBP hinzugefügt werden. Für die zweite Währungsposition (GBP) sind Wachstumstempi und der hypothetische Wechselkurs für den 23.12.2020 in analoger Weise wie für den USD zu berechnen. In der nachfolgenden Tabelle sind wiederum alle Berechnungsschritte aufgeführt:

| Nr. $t*$ | Datum | WK EUR USD | WK EUR GBP | Wachs.tempo EUR USD | Wachs.tempo EUR GBP | hyp. WK EUR USD | hyp. WK EUR GBP | hyp. Preis | hyp. PnL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 02.01.2020 | 0,8934 | 1,1789 | – | – | – | – | – | – |
| 1 | 03.01.2020 | 0,8971 | 1,1749 | 0,0041 | -0,0034 | 0,8204 | 1,0934 | 300726,68 | -402,70 |
| 2 | 06.01.2020 | 0,8933 | 1,1735 | -0,0042 | -0,0012 | 0,8136 | 1,0958 | 300528,83 | -600,55 |
| 3 | 07.01.2020 | 0,8951 | 1,1739 | -0,0020 | 0,0004 | 0,8187 | 1,0975 | 301372,70 | 243,33 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 248 | 18.12.2020 | 0,8157 | 1,1010 | -0,0011 | -0,0086 | 0,8162 | 1,0877 | 299163,23 | -1966,15 |
| 249 | 21.12.2020 | 0,8215 | 1,0916 | 0,0070 | -0,0086 | 0,8228 | 1,0878 | 299833,58 | -1295,80 |
| 250 | 22.12.2020 | 0,8171 | 1,0971 | -0,0054 | 0,0051 | 0,8127 | 1,1027 | 301800,96 | 671,58 |

Die Berechnung der Wachstumstempi und des hypothetischen Wechselkurses EUR GBP erfolgt analog der Berechnungen für den Wechselkurs EUR USD. Die Preisfunktion für das Portfolio der beiden Fremdwährungspositionen muss modifiziert werden;

$$
\begin{aligned}
P(T,t*) &= 100.000 \cdot wk(EUR\ USD)(T,t*) + 200.000 \cdot wk(EUR\ GBP)(T,t*) \\
P(T,1) &= 100.000 \cdot wk(EUR\ USD)(T,1) + 200.000 \cdot wk(EUR\ GBP)(T,1) = \\
&= 100000 \cdot 0,8204 + 200000 \cdot 1,0934 = 300726,68 \\
P(T,2) &= 100.000 \cdot wk(EUR\ USD)(T,2) + 200.000 \cdot wk(EUR\ GBP)(T,2) = \\
&= 100000 \cdot 0,8187 + 200000 \cdot 1,0975 = 300528,83 \\
... &= ... \\
P(T,250) &= 100.000 \cdot wk(EUR\ USD)(T,250) + 200.000 \cdot wk(EUR\ GBP)(T,250) = \\
&= 100000 \cdot 0,8127 + 200000 \cdot 1,1027 = 301800,96
\end{aligned}
$$

Aus den hypothetischen Preisen des Portfolios und dem Preis des Portfolios zum Zeitpunkt $T-1$ werden die hypothetischen Wertveränderungen berechnet. Der Preis des Portfolios $P(T-1)$ ist:

$$
\begin{aligned}
P(T-1) &= 100.000 \cdot wk(EUR\ USD)(T-1) + 200.000 \cdot wk(EUR\ GBP)(T-1) \\
P(T-1) &= 100.000 \cdot 0,8171 + 200.000 \cdot 1,0971 = 301.129,38
\end{aligned}
$$

Die Wertveränderungen (Profit and Loss) ergeben sich aus:

$$
\begin{aligned}
\Delta P(T,t*) &= P(T,t*) - P(T-1) \\
\Delta P(T,1) &= P(T,1) - P(T-1) = 300726,68 - 301.129,38 = -402,70 \\
\Delta P(T,1) &= P(T,1) - P(T-1) = 300528,83 - 301.129,38 = -600,55 \\
... &= ... \\
\Delta P(T,1) &= P(T,1) - P(T-1) = 301800,96 - 301.129,38 = 671,58
\end{aligned}
$$

Zur Quantilsbestimmung sind die hypothetischen Wertveränderungen der Größe nach zu ordnen, beginnend mit dem kleinsten Wert (d.h. dem größten hypothetischen Verlust).

| Datum | Pnl |
|---|---|
| 02.03.2020 | -5594,09 |
| 23.03.2020 | -5159,29 |
| 16.03.2020 | -4848,14 |
| ... | ... |
| 14.12.2020 | 3621,10 |
| 27.03.2020 | 3954,03 |
| 20.03.2020 | 5434,68 |

Die Berechnung des $VaR(99\%)$ erfolgt analog der Berechnung mit nur einem Wechselkurs:

$$g = n \cdot p = 250 \cdot 0,01 = 2,5$$

Damit liegt das Quantil zwischen der zweiten und dritten Beobachtung :

$$x_{0,01} \in \{\Delta P(T,2), \Delta P(T,3)\}$$

Das Quantil berechnet sich als Mittelwert von $\Delta P(T,2)$ und $\Delta P(T,3)$:

$$x_{0,01} = \frac{\Delta P(T,2) + \Delta P(T,3)}{2} = \frac{-5159,29 - 4848,14}{2} = -5.003,72$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% beträgt der größtmögliche Verlust 5.003,72 EUR, wenn das Portfolio, bestehend aus 100000 USD und 200000 GBP vom 22.12.2020 zum 23.12.2020 gehalten werden. Es fällt auf, dass die Verlustobergrenze durch die Fremdwährungsposition in GBP deutlich ansteigt (von 1069,58 EUR auf 5005,72). Um diesen Risikoanstieg zu interpretieren soll auch das Risiko der Fremdwährungsposition GBP nachvollzogen werden. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, werden die der Größe nach geordneten hypothetischen PNLs zumindest auszugsweise angeführt.

| Datum | Pnl |
|---|---|
| 23.03.2020 | -4583,42 |
| 02.03.2020 | -4528,87 |
| 16.03.2020 | -4460,00 |
| 18.03.2020 | -3253,63 |
| 11.12.2020 | -2838,66 |
| ... | ... |
| 14.12.2020 | 3856,24 |
| 27.03.2020 | 3924,26 |
| 20.03.2020 | 4717,36 |

Das Quantil berechnet sich als Mittelwert von $\Delta P(T,2)$ und $\Delta P(T,3)$:

$$x_p = \frac{\Delta P(T,2) + \Delta P(T,3)}{2} = \frac{-4528,87 - 4460,00}{2} = -4494,43$$

Das Risiko für die Fremdwährungsposition von GBP ist deutlich höher als für den Dollarbetrag. Der Preis de Fremdwährungsposition am 22.12.2020 beträgt $200000 \cdot 1,0971 = 219.423,35$ EUR, also mehr als doppelt so hoch wie der der USD-Position (81265, 41 USD). Das allein erklärt den Unterschied im Risiko nicht. Man hätte ein Risiko nahe 3000 EUR erwarten müssen, wenn die Volatilität der Wechselkurse annähernd gleich wäre. Wie später noch gezeigt wird, ist der Wechselkurs EUR GBP volatiler als der des Wechselkurses EUR USD. Es gibt aber einen weiteren Grund für das relativ hohe Risiko. Die Tabelle zeigt am linken Rand außergewöhnlich hohe Verluste für die letzten drei Wertveränderungen im Vergleich zur 4. PnL, die sich auf mehr als 1000 EUR (bzw. mehr als 35%) belaufen. Diese "Ausreißer" bestimmen das Risiko. Hier wird auch die Grenze der historischen Simulation deutlich: Ausreißer können das Risiko in die Höhe treiben.

Man sieht an den Risikodaten beider Einzelpositionen (-1069,58 bzw. -4494,43) auch, dass die Einzelrisiken nicht einfach zu addieren sind:

$$-1069,58 + (-4494,43) = -5.564,01 < -5.003,72$$

Das Gesamtrisiko von diesen zwei Fremdwährungspositionen $(-5.003,72)$ ist geringer als das Risiko, welches man durch Addition der Einzelrisiken erhält. Ursache sind mögliche gegenläufige Entwicklungen der Wachstumstempi beider Wechselkurse am gleichen Tag, oder wie später gezeigt wird die Korrelation zwischen den Marktdaten.

### 3.1.4 Statistische Grundlagen II

Bevor die Varianz-Kovarianz-Methode vorgestellt werden soll, müssen noch einige statistische Grundlagen behandelt werden. Die Begriffe der Varianz $\sigma^2$ und der Standardabweichung $\sigma$ wurden bereits eingeführt.

Sie bezogen sich auf eine Marktvariable $y_i$ und konnte aus der Häufigkeitsverteilung berechnet werden:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2}{n-1}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2}{n-1}}$$

Wenn die Anzahl der Marktdaten größer als 1 ist - diesen Fall wollen wir jetzt betrachten- ist eine mehrdimensionale Häufigkeitsverteilung gegeben. Praktisch stellt sich die mehrdimensionale Häufigkeitsverteilung als Auflistung einer Anzahl von Realisierungen (Einzelwerten) von n Marktdaten dar. Die Anzahl der Einzelwerte betrage n.

| Marktdaten | $y_1$ | $y_2$ | .. | $y_m$ |
|---|---|---|---|---|
| Einzelwerte | | | | |
| 1 | $y_1(1)$ | $y_2(1)$ | ... | $y_m(1)$ |
| 2 | $y_1(2)$ | $y_2(2)$ | ... | $y_m(2)$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| n | $y_1(n)$ | $y_2(n)$ | ... | $y_m(n)$ |

In analoger Weise zur eindimensionalen Betrachtung werden nicht die Marktdaten, sondern die Wachstumstempi verwendet.

Aus der mehrdimensionalen Häufigkeitsverteilung der Wachtumstempi lassen sich nun Varianzen und Kovarianzen berechnen. Dazu werden zwei Marktdaten ausgewählt $y_{j_1}$ und $y_{j_2}$ und folgende Wertepaare der Wachstumstempi gebildet:

$$\big(w_{y_{j_1}}(1), w_{y_{j_2}}(1)\big),\ \big(w_{y_{j_1}}(2), w_{y_{j_2}}(2)\big),\ ...,\ \big(w_{y_{j_1}}(n), w_{y_{j_2}}(n)\big)$$

Dann ist die empirische Kovarianz $d_{y_1,y_2}$wie folgt definiert:

$$d_{y_{j_1},y_{j_2}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(w_{y_{j_1}}(i) - \mu_{y_{j_1}})(w_{y_{j_2}}(i) - \mu_{y_{j_2}})$$

Aus Gründen der übersichtlich Darstellungsart wählen wir folgende Bezeichnungen:

$$\sigma_{12}^2 = d_{12} = d_{y_{j_1},y_{j_2}}$$

Es gilt:

$$\sigma_{12}^2 = \sigma_{21}^2$$
$$\sigma_1^2 = \sigma_{11}^2$$

Dabei ist $\sigma_1^2$ die Varianz des Marktdatums $y_{j_1}$, $\sigma_{1,2}^2$ die Kovarianz der Marktdaten $(y_{j_1}.y_{j_2})$.

Die Kovarianz $\sigma_{12}^2$ misst die Stärke des linearen Zusammenhangs zwischen den Merkmalen $y_{j_1}$ und $y_{j_2}$. Es gilt bezüglich des Vorzeichens:

- $\sigma_{12}^2 < 0$ falls ein gegenläufiger Zusammenhand
- $\sigma_{12}^2 = 0$ falls kein Zusammenhang
- $\sigma_{12}^2 > 0$ falls gleichläufiger Zusammenhang

Die Kovarianz $\sigma_{12}^2$ ist dimensionsbehaftet.

Aus den Varianzen und Kovarianzen kann die Varianz-Kovarianz-Matrix $\Sigma$ gebildet werden:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \dots & \sigma_{1m}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & \dots & \sigma_{2m}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1}^2 & \sigma_{m2}^2 & \dots & \sigma_{mm}^2 \end{pmatrix}$$

Dabei bezeichnen:

$\sigma_{ij}^2 -$ Kovarianzen, wenn $i \neq j$
$\sigma_{ii}^2 = \sigma_i^2 -$ Varianzen

Dabei gilt:

$$\sigma_{ij}^2 = d_{ij} = d_{y_i,y_j} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (w_{y_i} - \mu_{y_i}) \cdot (w_{y_j} - \mu_{y_j})$$
$$\sigma_{ii}^2 = d_{ii} = d_{y_i,y_i} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left( (w_{y_i} - \mu_{y_i}) \right)^2$$

Aus den Varianzen und Kovarianzen lassen sich die Korrelationskoeffizienten $\rho_{ij}$ bilden:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^2}{\sqrt{\sigma_i^2} \cdot \sqrt{\sigma_j^2}} = \frac{\sigma_{ij}^2}{\sigma_i \cdot \sigma_j}$$

Es gilt:

$$\rho_{ij} = \rho_{ji}, \; j \neq i$$
$$\rho_{ii} = 1$$

Der Korrelationskoeffizient $\rho_{ij}$ mißt die Stärke des linearen Zusammenhangs zwischen den Merkmalen $y_i$ und $y_j$. mit dem Wertebereich: $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$

$$\begin{aligned} \rho_{ij} = 1 \Rightarrow & \quad y_i \textit{ und } y_j \textit{ vollstaendig positiv korreliert} \\ 0 \leq \rho_{ij} \leq 1 \Rightarrow & \quad y_i \textit{ und } y_j \textit{ positiv korreliert} \\ \rho_{ij} = 0 \Rightarrow & \quad y_i \textit{ und } y_j \textit{ unkorreliert} \\ -1 \leq \rho_{ij} \leq 0 \Rightarrow & \quad y_i \textit{ und } y_j \textit{ negativ korreliert} \\ \rho_{ij} = -1 \Rightarrow & \quad y_i \textit{ und } y_j \textit{ vollstaendig negativ korreliert} \end{aligned}$$

Der Korrelationskoeffizient $\rho_{ij}$ ist dimensionslos.

Die Korrelationsmatrix $P$, bestehend aus den Korrelationskoeffizienten $\rho_{ij}$ hat folgende Form:

$$P = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1m} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{m1} & \rho_{m2} & \cdots & \rho_{mm} \end{pmatrix}$$

**Beispiel:**

Wir betrachten wiederum die Wechselkursentwicklung USD EUR und GBP EUR:[1]

| Nr. $t*$ | Datum | WK USD EUR | WK GBP EUR | Wachs.tempo USD EUR | Wachs.tempo GBP EUR | Varianz USD EUR | Varianz GBP EUR | Kovarianz |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 02.01.2020 | 1,1193 | – | – | – | – | – | – |
| 1 | 03.01.2020 | 1,1147 | 0,85115 | -0,0041 | 0,0034 | 0,00002006 | 0,00000948 | -0,00001379 |
| 2 | 06.01.2020 | 1,1194 | 0,85215 | 0,0042 | 0,0012 | 0,00001480 | 0,00000076 | 0,00000335 |
| 3 | 07.01.2020 | 1,1172 | 0,85183 | 0,0020 | -0,0004 | 0,00000545 | 0,00000046 | 0,00000159 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 248 | 18.12.2020 | 1,2259 | 0,90828 | 0,0011 | 0,0086 | 0,00000048 | 0,00006949 | 0,00000577 |
| 249 | 21.12.2020 | 1,2173 | 0,9161 | -0,0070 | 0,0086 | 0,00005453 | 0,00006899 | -0,00006134 |
| 250 | 22.12.2020 | 1,2239 | 0,91148 | 0,0054 | -0,0050 | 0,00002553 | 0,00002859 | -0,00002701 |

Aus den -hier nur auszugsweise - lassen sich die Varianzen und die Kovarianz der Wachstumstempi berechnen:

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{wk(USD\ EUR)} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(wk(USD\ EUR)(i) - \mu_{wk(USD\ EUR)})^2 \\
&= \frac{0,00002006 + 0,00001480 + 0,00000545 + ... + 0,00000048 + 0,00005453 + 0,00002553}{249} = 0,000024 \\
\sigma^2_{wk(GBP\ EUR)} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(wk(GBP\ EUR = (i) - \mu_{wk(GBP\ EUR)})^2 \\
&= \frac{0,00000948 + 0,00000076 + 0,00000046 + ... + 0,00006949 + 0,00006899 + 0,00002859}{249} = 0,000030
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{wk(USD\ EUR)/wk(GBP\ EUR)} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(wk(USD\ EUR)(i) - \mu_{wk(USD\ EUR)}) \cdot (wk(GBP\ EUR)(i) - \mu_{wk(GBP\ EUR)}) \\
&= \frac{-0,00001379 + 0,00000335 + 0,00000159 + ... + 0,00000577 - 0,00006134 - 0,00002701}{249} = 0,000005
\end{aligned}$$

Die Varianz-Kovarianz-Matrix lautet:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0,000024 & 0,000005 \\ 0,000005 & 0,000030 \end{pmatrix}$$

Der Korrelationskoeffizient lässt sich aus den Varianzen und der Kovarianz berechnen:

[1] Es ist unerheblich, ob man die Wechselkurse EUR USD bzw. EUR GBP oder die reziproken WWechselkurse USD EUR bzw. GBP EUR betrachtet. Die Varianzen und Kovarianzen sind in beiden Fällen identisch.

$$\rho_{wk(USD\ EUR)/wk(GBP\ EUR)} = \frac{\sigma^2_{wk(USD\ EUR)/wk(GBP\ EUR)}}{\sqrt{\sigma^2_{wk(USD\ EUR)}} \cdot \sqrt{\sigma^2_{wk(GBP\ EUR)}}}$$
$$= \frac{0,000005}{\sqrt{0,000024} \cdot \sqrt{0,000030}} = 0,1863$$

Die Korrelationsmatrix lautet:

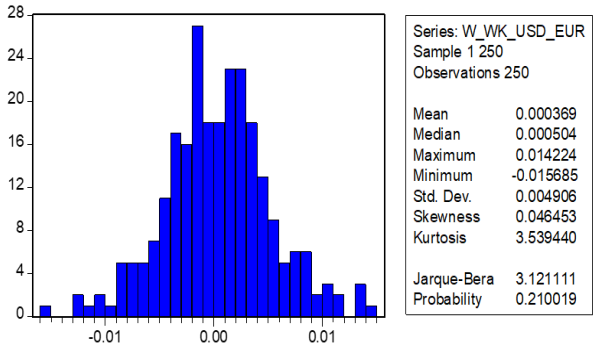
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0,1863 \\ 0,1863 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Wechselkurse sind positiv korreliert, d.h. wenn der Wechselkurs USD EUR wächst, dann wird (im Durchschnitt) auch der Wechselkurs GBP EUR wachsen. Die Kovarianz $\sigma^2_{wk(USD\ EUR)/wk(GBP\ ,EUR)} = 0,000005$ kommt zum gleichen Ergebnis.

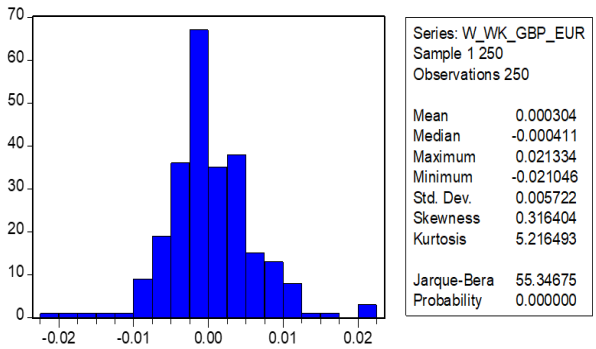
### 3.1.5 Varianz-Kovarianz-Methode

Begonnen wird mit der Bildung der Histogramme der Wechselkurse GBP EUR und USD EUR sowie der PnL des Portfolios. Damit soll verdeutlicht werden, dass die Marktdaten und die PnL annähernd normal verteilt sind. Die Normalverteilung der Marktdaten, korrekt der Wachstumstempi der Marktdaten, ist eine der Voraussetzung für die Nutzung der Varianz.Kovarianz-Methode für die Berechnung des Value at Risk bzw, für die Quantilsbestimmung.

Für den Wechselkurs USD EUR wurde das Histogramm und einige statistische Informationen bereits vorgestellt, soll jetzt noch einmal wiederholt werden. Das Histogramm ähnelt einer Normalverteilung. Der Mittelwert ist nahe Null.



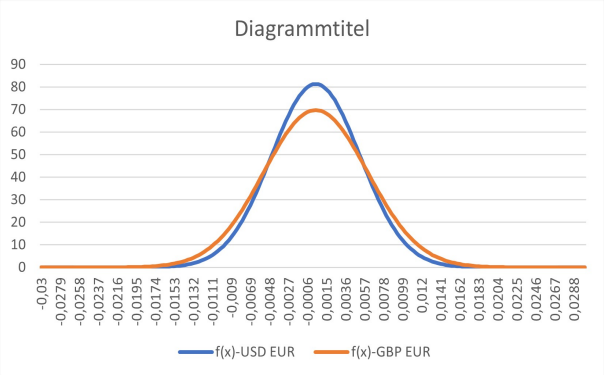

Für den Wechselkurs GBP EUR ergibt sich ein analoges Bild, obwohl die Normalverteilungshypothese nur unter Vorbehalt zu akzeptieren ist:



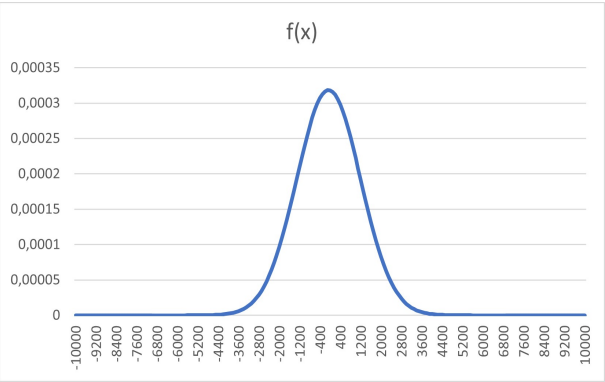
Betrachten wir einige statistische Parameter für die Marktdaten:

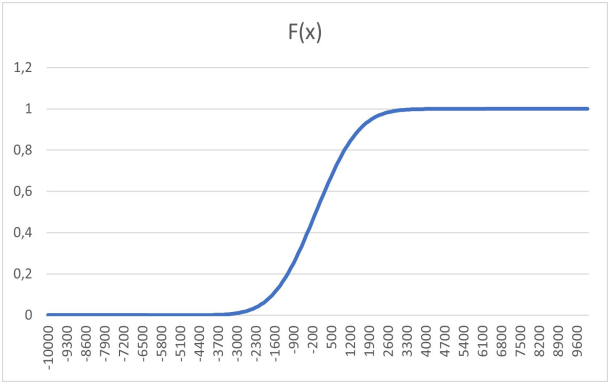
$$\mu_{wk(USD\ EUR)} = -\mu_{wk(EUR\ USD)} = 0,000369$$
$$\sigma_{wk(USD\ EUR)} = \sigma_{wk(EUR\ USD)} = 0,004906$$
$$\mu_{wk(GBP\ EUR)} = -\mu_{wk(EUR\ GBP)} = 0,000304$$
$$\sigma_{wk(GBP\ EUR)} = \sigma_{wk(EUR\ GBP)} = 0,005722$$

Die Standardabweichung der Wachstumstempi des Wechselkurses GBP EUR ist größer als für den Wechselkurs USD EUR, woraus sich ein eine höhere Volatilität und ein größeres Risiko erklären lässt. Stellen wir schließlich noch die Dichtefunktionen der Wachstumstempi der Wechselkurse grafisch dar. Die Grafik der Dichtefunktion vom Wechselkurs GBP EUR ist im Vergleich zur Grafik des Wechselkurses USD EUR leicht gestaucht:




Dichtefunktion und Verteilungsfunktion mit den Parametern der Verteilung der PnL sind die folgenden:




Zur Nutzung der Varianz-Kovarianz-Methode ist es nicht notwendig, hypothetische PnLs mittels historischer Simulation zu erzeugen. Das vorgestellte Histogramm der Verteilung der PnL dient ausschließlich der Argumentation, das die Wertveränderung des Instrumentes annähernd normal verteilt sind. Anstelle des Histogramms aus Einzelwerten wird die Dichte- oder Verteilungsfunktion einer Normalverteilung herangezogen. Da hypothetische PnLs nicht erzeugt werden, muss die Verteilungsfunktion und das abgeleitete Quantil aus den Marktdaten erzeugt werden.

Wie im Fall der historischen Simulation werden aus den Marktdaten die Veränderungsraten gegenüber dem Vortag abgeleitet. Es ist üblich hier die logarithmischen Differenzen ( logarithmische Rendite oder logarithmische returns ) als Approximation der Veränderungsraten zu verwenden:

$$w_{y_j}(t) = ln(\frac{y_j(t)}{y_j(t-1)})$$

Die Varianz-Kovarianz-Methode basiert auf der Annahme, dass die Veränderungsraten der Marktdaten annähernd normal verteilt sind mit der Varianz $\sigma^2$ und dem Mittelwert $\mu$. Damit ist es möglich, die Standardnormalverteilung zur Berechnung des Value at Risk bzw. des Quantils der Ordnung p heranzuziehen.

Das Quantil der Ordnung p einer normal verteilten Zufallsgröße X ($x_p$) wurde im Abschnitt Unterabschnitt 3.1.1 definiert als:

$$x_p = F_X^{-1}(p)$$

Dabei bezeichnen:

- X eine normal verteilte Zufallsvariable
- $F_X^{-1}(p)$ den Wert der inversen Verteilungsfunktion der normal verteilten Zufallsgröße X im Punkt p
- p eine reelle Zahl ($0 \leq p \leq 1$)

Wird nun an Stelle der der inversen Verteilungsfunktion der normal verteilten Zufallsgröße X im Punkt p der Wert der inversen Verteilungsfunktion einer **standardnormalverteilten** Zufallsgröße X im Punkt p verwendet, modifiziert sich die Quantilsdefinition wie folgt:

$$x_p = \mu_X + \sigma_X \cdot F_{X_{norm}}^{-1}(p) \tag{3.10}$$

Dabei bezeichnen:

- X eine normal verteilt, nicht unbedingt standardnormalverteilte, Zufallsvariable
- $F_{X_{norm}}^{-1}(p)$ den Wert der inversen Verteilungsfunktion der standardnormalverteilten Zufallsgröße $X_{norm}$ im Punkt p
-$\mu_X$ und $\sigma_X$ die Parameter der normal verteilten Zufallsgröße X

**1. Ein Risikofaktor**

Betrachten wir zunächst den Fall nur **eines Risikofaktors**. das wäre z.B. der Fall im Beispiel 1 im Unterabschnitt 3.1.3 (Risikoberechnung für das Halten einer Fremdwährungsposition von 100000 USD 1 Tag lang). Der Risikofaktor in diesem Beispiel ist der Wechselkurs. Bei nur einem Risikofaktor lautet die Preisfunktion:

$$P(t) = P\big(y(t)\big)$$

Dabei ist $y(t)$ der Wert des Risikofaktors y im Moment t. Damit kann geschrieben werden:

$$x_p = \mu_y + \sigma_y \cdot F_{X_{norm}}^{-1}(p)$$

Die Größen $\mu_y$ und $\sigma_y$ sind die Parameter des normal verteilten Risikofaktors y. Bei der Risikoberechnung wird unterstellt, dass der Mittelwert $\mu_y$ des normal verteilten Risikofaktors y gleich Null ist ($\mu_y = 0$). Damit gilt:

$$x_p = \sigma_y \cdot F_{X_{norm}}^{-1}(p)$$

Die Größe $\sigma_y$ ist das die Standardabweichung des Risikofaktors y. Multipliziert man $y(t_0)$ mit der Standardabweichung $\sigma_y$ erhält man den Wert der Standardabweichung des Marktdatums (Risikofaktors) y im Zeitpunkt $t_0$ Daraus lässt sich das Risiko des Marktdatums($Var_y(t_0, p)$ als Quantil $x_p(t_0)$ berechnen.

$$VaR_y(t_0, p) = x_p(t_0) = y(t_0) \cdot \sigma_y \cdot F^{-1}_{X_{norm}}(p)$$

Um den Value at Risk für ein Finanzinstrument zu berechnen, muss die Standardabweichung des Finanzinstrumentes bestimmt werden. Dazu ist das die Preisfunktion des Finanzinstrumentes heranzuziehen.

Ein zentraler Begriff bei der Risikoberechnung ist die **Sensitivität**: Die Sensitivität des Preises des Finanzinstrumentes hinsichtlich des Risikofaktors $y$ zum Zeitpunkt $t_0$ $\Delta^*_y$ gibt die Veränderung des Preises bei einer unendlich kleinen Veränderung des Risikofaktors an:

$$\Delta^*_y = P(t)'_y \cdot y(t_0)$$

Mit Hilfe der Sensitivität kann die Standardabweichung des Finanzinstrumentes $\sigma_P$ bestimmt werden:

$$\sigma_P = \Delta^*_y \cdot \sigma_y = P(t)'_y \cdot y(t_0) \cdot \sigma_y$$

Der Value at Risk eines Finanzinstrumentes, sofern das Finanzinstrument einen Tag unverändert gehalten wird, kann dann folgendermaßen berechnet werden:

$$VaR_P(t_0, p) = x_p(t, 0) = P(t)'_y \cdot y(t_0) \cdot \sigma_y \cdot F^{-1}_{X_{norm}}(p)$$

Setzt man zusätzlich voraus, dass sich die Veränderungsraten des Marktdatums als eine Zufallsgröße einer geometrisch Brownsche Bewegung darstellen lassen (siehe [Hul01]), kann man sich von der Voraussetzung trennen, dass die Haltedauer einen Tag beträgt. Mit $\Delta t$ bezeichnen wir die Haltedauer von t Tagen. Die Formel zur Berechnung des Value at Risk **einer** Fremdwährungsposition (der maximal mögliche Verlust beim Halten der Position von $\Delta t$ Tagen mit einer Wahrscheinlichkeit von $p\%$) lautet:

$$VaR_P(t_0, p) = P(t)'_y \cdot y(t_0) \cdot \sigma_y \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}_{X_{norm}}(p)$$

Wird nur ein Risikofaktor betrachtet, verwendet man zur Risikoberechnung die Standardabweichung bzw. die Varianz. Die Bezeichnung der Berechnungsmethode **Varianz-Kovarianz-Methode** ist dann nicht korrekt, da keine Kovarianzen berücksichtigt werden, was bei nur einem Risikofaktor nicht möglich ist. Die korrekte Bezeichnung würde **Varianz-Methode** oder **Standardabweichungs-Methode** lauten.

Im weiteren illustrieren wir das Vorgehen am **Beispiel 1** aus Unterabschnitt 3.1.3 (Risikoberechnung für das Halten einer Fremdwährungsposition von 100000 USD 1 Tag lang).

Die Varianz und auch die Standardabweichung muss angepasst werden, da vorausgesetzt wird, dass er Mittelwert des Marktdatums den Wert Null hat. Die Formeln zur Berechnung der Varianz und Standardabwichung lauten dann:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n-1}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n-1}}$$

Die neuberechneten Werte sind dann:

$$\sigma_{wk(EUR\ USD)} = 0,004920$$
$$\sigma^2_{wk(EUR\ USD)} = 0,000024$$

Die Berechnung des Value at Risk erfolgt in folgenden Schritten:

$$\begin{aligned} P(t) &= P\big(y(t)\big) = N \cdot wk(t) \\ P(t)'_{wk} &= N \\ \Delta^*_{wk} &= P(t)'_{wk} \cdot wk(t_0) \\ VaR_P(t_0, p) &= P(t)'_{wk} \cdot wk(t_0) \cdot \sigma_[wk \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}_{X_{norm}}(1-p) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen:

| | |
|---|---|
| - $P(t)$ | Preisfunktion |
| - $P(t)'_{wk}$ | erste Ableitung der Preisfunktion nach dem Wechselkurs $wK$ |
| - $\Delta^*_{wk}$ | Sensitivität bezüglich des Wechselkurses $wK$ |
| - $VaR_P(t_0, p)$ | Value at Risk (Risiko) zum Bewertungszeitpunkt $t_0$ |
| - | mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit p ($p = 0,099$) |
| - N | Fremdwährungsposition in USD ($N = 100000$ USD) |
| - $wk(t_0)$ | Wechselkurs EUR/USD um Bewertungszeitpunkt $t_0$ ($wk(t_0) = 0,8171\ \frac{EUR}{USD}$) |
| - $\sigma_{wk}$ | Standardabweichung (Volatilität) des Wachstumstempo |
| - | des Wechselkurses EUR/USD ($\sigma_{wk(EUR\ USD)} = 0,004920$) |
| - $\Delta t$ | Haltedauer in Tagen |
| - $F^{-1}_{X_{norm}}(1-p)$ | der Wert der inversen Verteilungsfunktion |
| - | der standardnormalverteilten Zufallsgröße $X_{norm}$ im Punkt p |
| - $p$ | Irrtumswahrscheinlichkeit $p = 0,99$ |

Konkret für das Beispiel 1 ergibt sich:

$$VaR_P(t_0, 0,99) \approx 100000 \cdot 0,8171 \cdot 0,004920 \cdot \sqrt{1} \cdot F_{X_{norm}}(0,01) = -935,18$$

Es sollen nun die Elemente der Formel zur Bestimmung des Value at Risk beim Haltens einer Fremdwährungsposition für einen und mehrere Tage illustriert werden:

- Der Preis des Instrumentes zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt 100000 USD.

- $N \cdot wk(t_0)$ gibt den Wert der Fremdwährungsposition in der Heimatwährung (hier EURO) zu Beginn der Haltedauer ($t = t_0$) an ($N \cdot wk(t_0) = 100000 \cdot 0,8171 = 81710,00$ oder nicht gerundet ($100000 \cdot 0,8170602 = 81706,02$). In den weiteren Berechnungen wird der gerundete Betrag des Wechselkurses $0,8717$ verwendet.
  Der Wert $N \cdot wk(t_0)$ kann ebenfalls als Preis der Position in EURO zum Zeitpunkt $t = 0$ gedeutet werden. Die Preisfunktion (ausgedrückt in der Heimatwährung) im Zeitpunkt t lautet folglich:

  $$P(t) = N \cdot wk(t)$$

  Der Wechselkurs ist der einzige Risikofaktor.

- Die Volatilität (Standardabweichung) des Wachstumstempos des Wechselkurses $\sigma_{wk}$ lässt folgende Interpretation zu: Grundsätzlich gibt die Standardabweichung an, in welchem Umfang sich das Wachstumstempos des Wechselkurs vom Mittelwert entfernt. Nun wurde vorausgesetzt, dass der entsprechende Mittelwert gleich Null ist. Folglich geht es um die Abweichung der Wachstumstempi des Wechselkurses von Null. Je größer die Volatilität ist, um zu stärker streut der Wechselkurs um den Nullpunkt.

- Wir benötigen die Volatilität, um das Quantil nach (3.10) zu berechnen. Die Werte der inversen Verteilungsfunktion mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma$ liegt in der Regel tabellarisch nicht vor bzw. kann nur aufwendig berechnet werden. Deshalb wird zunächst das Quantil einer standardnormalverteilten Zufallsgröße mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ bestimmt.

Für eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 99% ist das Quantil $x_{0,01}$ mit $p = 1 - 0,99 = 0,01$ zu bestimmen:

$$F^{-1}_{X_{norm}}(0,01; \mu = 0; \sigma = 1) = -2.326348$$
$$F^{-1}_{X_{norm}}(0,01; \mu = 0; \sigma) = F^{-1}_{X_{norm}}(0,01; \mu = 0; \sigma = 1) \cdot \sigma = -2.326348 \cdot \sigma$$

Angewandt auf unser Beispiel muss die Volatilität des Wachstmstempos des Wechselkurses bekannt sein. Die Varianz wurde bereits imUnterabschnitt 3.1.4 berechnet: $\sigma^2_{wk} = 0,000024$, woraus folgt $\sigma_{wk} = 0,004906$. Die Berechnung muss jedoch modifiziert werden, da $\mu = 0$ vorausgesetzt wird. Siehe dazu die Ausführungen im Beispiel 2: t $\sigma_{wk} = 0,004920$Es gilt dann:

$$F^{-1}(0,01; \mu = 0; \sigma = 0,004920) = F^{-1}_{X_{norm}}(0,01; \mu = 0; \sigma = 1) \cdot \sigma_{wk} = -2,326348 \cdot 0,004920 = -0,0115$$

Das Quantil der normal verteilten Zufallsgröße $x_{0,01} = F^{-1}_{X_{norm}}(0,01; \mu = 0; \sigma = 0,004920)$ beträgt -0,0115.

- Multipliziert man die Fremdwährungsposition, umgerechnet in die Heimatwährung EURO, $N \cdot wk(t_0)$ mit der Volatilität (d.h. mit der Standardabweichung) $\sigma_{wk}$ erhält man die Volatilität der Fremdwährungsposition in EURO.

$$N \cdot wk(t_0) \cdot \sigma_{wk} = 100000 \cdot 0,8171 \cdot 0,004920) = 401,99$$

Sie beträgt 401,99 EUR.

- Die Risikoberechnung erfolgt analog zur historischen Simulation mit Hilfe des Quantils, wobei gilt:

$$VaR(t,p) = x_{1-p}$$
$$VaR(t,99\%) = x_{0,01}$$

Der Ausdruck $Nwk(t_0) \cdot \sigma_{wk} \cdot F^{-1}_{X_{norm}}(p-1)$ bei $p = 0,99$ entspricht dem 1%-Quantil bei einer Haltedauer von einem Tag $\Delta t = 1$ und wird als VaR (Value at Risk) bezeichnet. Der Wert gibt an, wie groß der größtmögliche Verlust bei einer Haltedauer von einem Tag und einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 99% ist.

$$VaR(t_0,p) \approx N \cdot wk(t_0) \cdot \sigma_{wk} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}_{X_{norm}}(1-p))$$
$$VaR(t_0,0,99) \approx 100000 \cdot 0,8171 \cdot 0,004920) \cdot \sqrt{\Delta 1} \cdot (-2.326348) = -935,18$$

Der Value at Risk beträgt -935,18 EUR. Das bedeutet, dass der größtmögliche Verlust beim Halten einer Fremdwährungsposition von 100000 USD vom Bewertungstag $t_0$ bis zum Folgetag $t_0 + 1$ und einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 99% 935,18 EUR beträgt.[2]

- Multipliziert man den Ausdruck $N \cdot wk(t_0)(\sigma_{wk} \cdot F^{-1}_{X_{norm}}(1-p))$ mit $\sqrt{\Delta t}$ erhält man das VaR bei einer Haltedauer von $\Delta t$ Tagen.

$$VaR(t_0,p) \approx N \cdot wk(t_0) \cdot \sigma_{wk} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}_{X_{norm}}(1-p))$$
$$\approx 100000 \cdot 0,8171 \cdot 0,004920) \cdot \sqrt{\Delta 10} \cdot (-2.326348) = -2957,28$$

[2]der größtmögliche Verlust - berechnet mit Hilfe der historischen Simulation - beim Halten einer Fremdwährungsposition von 100000 USD vom Bewertungstag $t_0$ bis zum Folgetag $t_0+1$ und einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 99% beträgt 1069,58 EUR

Wird die Fremdwährungsposition nicht nur einen Tag unverändert gehalten, sondern 10 Tage, beträgt der größtmögliche Verlust bei sonst unveränderten Bedingungen 2957,28 EUR.

### 2. 2 und mehr Risikofaktoren

Werden mehr als ein Risikofaktor betrachtet, muss neben den Varianzen der Risikofaktoren auch die Kovarianzen, die die Abhängigkeiten zwischen den Risikofaktoren berücksichtigt werden. Bei nur einem Risikofaktor wurde Standardabweichung des Finanzinstrumentes $\sigma_P$ folgendermaßen berechnet:

$$\sigma_P = \Delta_y^* \cdot \sigma_y = P(t)'_y \cdot y(t_0) \cdot \sigma_y$$

Bei mehr als einem Risikofaktor erfolgt die Berechnung analog, diesmal mit Hilfe der Sensitivitäten und der Varianz-Kovarianz-Matrix

$$\sigma_P = \sqrt{\Delta^{*T} \Sigma \Delta^*}$$

Die Formel zur Berechnung des Value at Risk lautet nun:

$$\begin{aligned} Var_P(t,p) &= \sigma_P \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}_{X_{norm}}(1-p) = \\ &= \sqrt{\Delta^{*T} \Sigma \Delta^*} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}_{X_{norm}}(1-p) \end{aligned}$$

Oder ausführlich:
Dabei bezeichnet $\sigma_P$ die Volatilität des Instrumentes oder Portfolios , $\Sigma$ die Varianz-Kovarianz-Matrix und $\Delta^*$ und $\Delta^{*T}$ den Spalten- oder Zeilenvektor der Sensitivitäten bezüglich der Marktrisikodaten $y_i$.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \dots & \sigma_{1m}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & \dots & \sigma_{2m}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1}^2 & \sigma_{m2}^2 & \dots & \sigma_{mm}^2 \end{pmatrix}, \Delta^* = \begin{pmatrix} \Delta_1^* \\ \Delta_2^* \\ \vdots \\ \Delta_m^* \end{pmatrix}, \Delta^{*T} = \begin{pmatrix} \Delta_1^* & \Delta_2^* & \dots & \Delta_m^* \end{pmatrix}$$

Mit $\Delta_j^*$ wird die Sensitivit für das Marktdatum $y_j$ bezeichnet.

$$\Delta_j^* = P'_{y_j} \cdot y_j(t_0)$$

Eine andere Möglichkeit - nicht mit Hilfe der Sensitivitäten - ist die Verwendung der Korrelationsmatrix P und der Values at Risk, getrennt für jeden Marktrisikoparameter.

$$Var(t,p) = -\sqrt{VaR_Y^T \cdot P \cdot VaR_Y}$$

dabei sind:

$VaR_Y$ - der Spaltenvektor der Einzel-VaRs nach Marktrisikofaktoren
$VaR_Y^T$ - der Zeilenvektor der Einzel-VaRs nach Marktrisikofaktoren
P - die Korrelationsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1m} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{m1} & \rho_{m2} & \cdots & \rho_{mm} \end{pmatrix}, VaR_Y = \begin{pmatrix} Var_1^* \\ Var_2^* \\ \vdots \\ Var_m^* \end{pmatrix}, VaR_Y^T = \begin{pmatrix} Var_1^* & Var_2^* & \ldots & Var_m^* \end{pmatrix}$$

Dabei bezeichnet $VaR_j$ das VaR für das Marktdatum $y_j$. Die Berechnung der Einzel-VaRs nach Marktrisikofaktoren erfolgt nach der Methodik der VaR-Berechnung mit **nur einem** Marktrisikofaktor:

$$VaR_j(t,p) = P(t=0)'_{y_j} \cdot y_j(t_0)(\sigma_{y_j} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F_{X_{norm}}(1-p))$$

**Beispiel 2:**

Vorangestellt soll das Vorgehen erläutert werden. Im ersten Schritt werden zwei Fremdwährungspositionen 100000 USD und 200000 GBP separat untersucht. Für die Fremdwährungsposition in USD ist das bereits in diesem Abschnitt geschehen. Für die Position in GDP werden wir die Berechnungen ohne weitere Erläuterungen nachreichen. Im nächsten Schritt werden beide Währungspostionen in einem gemeinsamen Portfolio zusammengeführt. Die Risikoberechnung erfolgt dann nach dem oben beschriebenen Schemata.

Es soll das Risiko für die Fremdwährungsposition 200000 GBP berechnet werden. Die Berechnung der Varianz und der Standardabweichung muss modifiziert werden, da vorausgesetzt wird, dass der Mittelwert $\mu = 0$.

$$\sigma^2_{wk(EUR\ GBP)} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (wk(EUR\,GBP)(i))^2$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2_{wk(EUR\ GBP)}}$$

Konkret ergeben sich im Beispiel folgende modifizierten Parameter der Verteilung der Wachstumstempi der Wechselkurse:

$$\mu_{wk(EUR\ GBP)} = 0,000000$$
$$\sigma_{wk(EUR\ GBP)} = 0,005730$$
$$\sigma^2_{wk(EUR\ GBP)} = 0,000033$$

Die Value at Risk für die Fremdwährungsposition in GBP lautet:

$$VaR_{GBP}(t_0,p) \approx N_{GBP} \cdot wk(EUR\ GBP)(t_0) \cdot \sigma_{wk(EUR\ GBP)} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F_{X_{norm}}(1-p)$$

Für das Beispiel ergeben sich folgender Value at Risk (als $t_0$ wird der 22.12.2020 - also der heutige Tag - gewählt. Die Haltedauer betrage zunächst 1 Tag $\Delta t = 1$. Als Irrtumswahrscheinlichkeit werden 99% ($p = 0,01$) angenommen.

Value at Risk $VaR_{GBP}(t_0,p)$ mit $\Delta t = 1$:

$$VaR_{GBP}(t_0, 0, 99) = N_{GBP} \cdot wk(EUR\ GBP)(t_0) \cdot \sigma_{wk(EUR\ GBP)} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F_{X_{norm}}(0, 01)$$
$$VaR_{GBP}(t_0, 0, 99) = 200000 \cdot 1, 0971 \cdot 0, 005730 \cdot \sqrt{1} \cdot (-2.326348) = -2924, 90$$

Es kann nun ein Vergleich der beider Berechnungsmethoden (historische Simulation und Varianz- Methode) vorgenommen werden. Dazu wird auf die Berechnung des Value at Risk im Beispiel 1 dieses Abschnittes und auf den den Unterabschnitt 3.1.3 verwiesen. Die Value at Risk für jede der Fremdwährungsposition und jede Berechnungsmethode sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt. Beide Berechnungsmethoden führen zu unterschiedlichen Ergebnissen.

| Fremdwährung | historische Simulation | Varianz-Kovarianz-Methode |
|---|---|---|
| USD | -1069,58 | -935,18 |
| GBP | -4494,43 | -2924,90 |

Während für die Fremdwährungsposition in USD das Risiko etwa die gleiche Größenordnung hat, treten für die Position in GBP deutliche Unterschiede auf. Die Volatilitäten differieren sind nicht so gravierend $\sigma_{USDEUR} = 0, 004920$ und $\sigma_{GBPEUR} = 0, 005730$, dass die die Unterschiede im Risiko erklären können. Wie oben schon erläutert sind die Außenseiter bei den Verlusten der hypothetischen PnL für ein deutlich höheres Risiko bei der historischen Simulation für dei Fremdwährungsposition GBP verantwortlich.

Es ist möglich, das Risiko für alternative Haltedauern zu berechnen, so z.B. für eine Haltedauer von 10 Tagen. Erwartet wird selbstverständlich ein höheres Risiko als bei der Haltedauer von 1 Tag.

Value at Risk $VaR_{USD}(t_0, 0, 99)$ und $VaR_{GBP}(t_0, 0, 99)$ mit $\Delta t = 10$:

$$VaR_{USD}(t_0, 0, 99) = N_{USD} \cdot wk(EUR\ USD)(t_0) \cdot \sigma_{wk(EUR\ USD)} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F_{X_{norm}}(0, 01)$$
$$VaR_{USD}(t_0, 0, 99) = 100000 \cdot 0, 8171 \cdot 0, 004920 \cdot \sqrt{10} \cdot (-2.326348) = -2957, 28$$
$$VaR_{GBP}(t_0, 0, 99) = N_{GBP} \cdot wk(EUR\ GBP)(t_0) \cdot \sigma_{wk(EUR\ GBP)} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F_{X_{norm}}(0, 01)$$
$$VaR_{GBP}(t_0, 0, 99) = 200000 \cdot 1, 0971 \cdot 0, 005730 \cdot \sqrt{10} \cdot (-2.326348) = 9249, 35$$

Das Risiko bei einer längeren Haltungsdauer vergrößert sich um den Faktor $\sqrt{10}$.

Im nächsten Schritt wird das Vorgehen auf zwei Risikofaktoren ausgeweitet ausgeweitet, das könnten mehrere Wechselkurse in einem Portfolio oder auch zusätzlich Zinssätze sein. In unserem Beispiel wählen wir ein gemeinsames Portfolio, bestehend aus 2 Fremdwährungspositionen(100000 USD **und** 200000 GBP

Zunächst formulieren wir die Preisfunktion $P(t)$ für das Portfolio:

$$P(t) = N_{USD} \cdot wk(EUR\ USD)(t) + N_{GBP} \cdot wk(EUR\ GBP)(t)$$
$$P(t_0) = 100000 \cdot 0, 8171 + 200000 \cdot 1, 0971$$

Im Anschluss werden die Sensitivitäten hinsichtlich jedes Risikofaktors $wk(EURUSD)(t)$ und$wk(EURGBP)(t)$ gebildet:

$$\Delta^*_{wk(EUR\ USD)} = P(t)'_{wk(EUR\ USD)} \cdot wk(EUR\ USD)(t_0)$$
$$P(t)'_{wk(EUR\ USD)} = N_{USD}$$
$$\Delta^*_{wk(EUR\ USD)} = N_{USD} \cdot wk(EUR\ USD)(t_0) = 100000cdot0, 8171 = 81710$$
$$\Delta^*_{wk(EUR\ GBP)} = P(t)'_{wk(EURGBP)} \cdot wk(EUR\ GBP)(t_0)$$
$$P(t)'_{wk(EUR\ GBP)} = N_{GBP}$$
$$\Delta^*_{wk(EUR\ GBP)} = N_{GBP} \cdot wk(EUR\ USD)(t_0) = 200000 \cdot 1, 0971 = 219420$$

Aus den Sensitivitäten wird den Vektor der Sensitivitäten gebildet:

$$\Delta^* = \begin{pmatrix} \Delta^*_{wk(EUR\ USD)} \\ \Delta^*_{wk(EUR\ GBP)} \end{pmatrix}, \Delta^{*T} = \begin{pmatrix} \Delta^*_{wk(EUR\ USD)} & \Delta^*_{wk(EUR\ GBP)} \end{pmatrix}$$

Daraus lassen sich die Vektoren der Sensitivitäten $\Delta^*$ und $\Delta^{*T}$ bestimmen:

$$\Delta^* = \begin{pmatrix} 81710 \\ 219420 \end{pmatrix}, \Delta^{*T} = \begin{pmatrix} 81710 & 219420 \end{pmatrix}$$

Die Risikoberechnung erfolgt dann nach der Formel:

$$\begin{aligned} Var_P(t,p) &= \sigma_P \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F_{X_{norm}}(1-p) = \\ &= \sqrt{\Delta^{*T} \Sigma \Delta^*} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F_{X_{norm}}(1-p) \end{aligned}$$

Für zwei Fremdwährungspositionen verwenden wir Varianz - Kovarianz-Matrix bestehen aus 2 Zeilen und zwei Spalten.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2_{wk(EUR\ USD)/wk(EUR\ USD)} & \sigma^2_{wk(EUR\ USD)/wk(EUR\ GBP)} \\ \sigma^2_{wk(EUR\ GBP)/wk(EUR\ USD)} & \sigma^2_{wk(EUR\ GBP)/wk(EUR\ GBP)} \end{pmatrix}$$

$\sigma^2_{wk(EUR\ USD)/wk(EUR\ USD)}$ und $\sigma^2_{wk(EUR\ GBP)/wk(EUR\ GBP)}$ sind die Varianzen der Wachstumstempi der Wechselkurse.
$\sigma^2_{wk(EUR\ USD)/wk(EUR\ GBP)}$ und $\sigma^2_{wk(EUR\ GBP)/wk(EUR\ USD)}$ die Kovarianzen zwischen den Wachstumstempi der Wechselkurse.

Zur Berechnung der Kovarianzmatrix ist zusätzlich die Kovarianz aus Unterabschnitt 3.1.4 unter der Bedingung $\mu = 0$ zu modifizieren.

$$d_{wk(EUR\ USD),wk(EUR\ GBP)} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (wk(EUR\ USD)) \cdot)(wk(EUR\ GBP)) = 0,000005$$

Die Varianz- Kovarianz - Matrix lautet dann

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2_{wk(EUR\ USD)/wk(EUR\ USD)} & \sigma^2_{wk(EUR\ USD)/wk(EUR\ GBP)} \\ \sigma^2_{wk(EUR\ GBP)/wk(EUR\ USD)} & \sigma^2_{wk(EUR\ GBP)/wk(EUR\ GBP)} \end{pmatrix}, \ \Sigma = \begin{pmatrix} 0,000024 & 0,000005 \\ 0,000005 & 0,000033 \end{pmatrix}$$

Nun kann der $VaR(1,99\%)$ mit Hilfe der Sensitivitäten und der Varianz- Kovarianz- Matrix berechnet werden:

$$VaR(1,99\%) = \sqrt{\Delta^{*T} \Sigma \Delta^*} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F_{X_{norm}}(0,01)$$

$$VaR(1,99\%) = \sqrt{\begin{pmatrix} 81710 & 219420 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,000024 & 0,000005 \\ 0,000005 & 0,000030 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 81710 \\ 219420 \end{pmatrix}} \cdot F_{X_{norm}}(0,01) = -3238,46$$

Der Value at Risk beträgt 3238,46 EUR.

Die Risikoverechnung kann auch mit Hilfe der Korrelationsmatrix erfolgen. Wegen der Voraussetzung $\mu = 0$ ist auch der Kkorrelationskoeffizient aus Unterabschnitt 3.1.4 anzupassen:

$$\rho_{wk(EUR\ USD),wk(EUR\ GBP)} = \frac{d_{wk(EUR\ USD),wk(EUR\ GBP)}}{\sqrt{\sigma^2_{wk(EUR\ USD)}} \cdot \sqrt{\sigma^2_{wk(EUR\ USD)}}} = \frac{\sigma_{wk(EUR\ USD),wk(EUR\ GBP)}}{\sqrt{\sigma^2_{wk(EUR\ USD=}} \cdot \sqrt{\sigma^2_{wk(EUR\ USD)}}}$$
$$= \frac{0,000005}{\sqrt{0,000024} \cdot \sqrt{0,000033}} = 0,1933$$

Die modifizierte Korrelationsmatrix lautet:

$$P = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,1933 \\ 0,1933 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Einzel-VaRs für jeden einzelnen Wechselkurs wurde bereits bestimmt:

$$VaR_{USD}(t_0, 0,99) = 100000 \cdot 0,8171 \cdot 0,004920 \cdot \sqrt{10} \cdot (-2.326348) = -935,18$$
$$VaR_{GBP}(t_0, 0,99) = 200000 \cdot 1,0971 \cdot 0,005730 \cdot \sqrt{10} \cdot (-2.326348) = -2924,90$$

Die Vektoren der Einzel-VaR sind:

$$VaR_Y = \begin{pmatrix} -935,18 \\ -2924,90 \end{pmatrix}, VaR_Y^{*T} = \begin{pmatrix} -935,18 & -2924,90 \end{pmatrix}$$

Nun kann nach der zweiten Methode das $VaR(1,99\%)$ berechnet werden:

$$VaR(1,99\%) = -\sqrt{VaR_Y^T \cdot P \cdot VaR_Y}$$

oder

$$VaR(1,99\%) = -\sqrt{\begin{pmatrix} -935,18 & -2924,90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0,1933 \\ 0,1933 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -935,18 \\ -2924,90 \end{pmatrix}} = -3238,37$$

Der Value at Risk des Porfolios beträgt ca. 3238 EUR (Die Differenz zur vorherigen Methode von 9 cent ist auf Rundungsfehler zurückzuführen).

Die Risikoberechnung mittels historische Simulation unterscheiden sich vom Ergebnis der Varianz-Kovarianz-Methode. Auf die Gründe wurde bereits verwiesen.

| historische Simulation | Varianz-Kovarianz-Methode |
|---|---|
| -5.003 | -3238 |

Ohne Mühe kann jetzt der Value at Risk für eine Haltedauer von 10 Tagen berechnet werden. Dazu ist lediglich das Ergebnis mit $\sqrt{10}$ zu multiplizieren:

$$VaR(10, 99\%) = VaR(1, 99\%) \cdot \sqrt{10} \approx 10.240$$

Aufgrund einer vorhandenen Korrelation beider Wechselkurse können die Einzel-VaRs nicht einfach addiert werden ($-935,18 - 2924,90 = -3860,08 \neq 3238$). Es liegt ein Diversifikationseffekt vor, der das Risiko auf Grund der Korrelation beider Wechselkurse reduziert. Im Fall von nur 2 Risikofaktoren kann der Effekt deutlich gemacht werden:

$$\begin{aligned} VaR(1, 99\%) &= \sqrt{VaR_{y_1}^2 + VaR_{y_2}^2 + 2 \cdot \rho_{y_1/y_2} \cdot VaR_{y_1} \cdot VaR_{y_2}} \\ &= \sqrt{(-935,18)^2 + (-2924,90)^2 + 2 \cdot 0,1933 \cdot (-935,18) \cdot (-2924,90)} = 3238,37 \end{aligned}$$

## 3.2 Risiko von Sparprodukte

Für Sparprodukte werden die Risiken durch die Zinssätze bestimmt. Wie bereits in den vorangegangenen Kapiteln verwenden wir zur Barwertbestimmung Abzinsfaktoren, die auf der Basis von Nullkuponzinssätzen berechnet werden. Soll nun eine Risikoabschätzung mit Hilfe der Varianz-Kovarianz-Methode erfolgen, benötigt man lange Reihen der Nullkuponzinssätze, aus denen die Volatilität der Abzinsfaktoren abzuleiten ist. Banken, die Risikoberechnungen auf der Basis der Varianz-Kovarianz-Methode durchführen, bestimmen täglich die Nullkuponzinssätze und verfügen deshalb über lange Reihen und sind in der Lage, die Volatilitäten und Kovarianzen sowie die Korrelationskoeffizienten täglich zu bestimmen. Die deutsche Bundesbank veröffentlicht Zinssätze für hypothetisch Null-Kupon-Anleihen ohne Kreditausfallrisiko, die ebenfalls zur Schätzung der statistischen Parameter herangezogen werden können. Im Rahmen dieser Publikation werden keine langen Reihen zur Bestimmung der Varianzen, Kovarianzen und Korrelationen vorgenommen, sondern plausible statistische Größen vorgegeben. In den Beispielrechnungen verwenden wir - wie bisher - Nullkuponzinssätze und abgeleitete Abzinsfaktoren für 4 Jahre. Entsprechend geben wir auch für den 4-Jahreszeitraum die statistischen Parameter vor.

**Varianzen und Standardabweichungen**

| Restlaufzeit in Jahren | Nullkuponzinssatz | Abzinsfaktoren | Varianz | Standardabweichung |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0294 | 0,9714 | 0,000022 | 0,00469 |
| 2 | 0,0390 | 0,9262 | 0,000024 | 0,00490 |
| 3 | 0,0448 | 0,8750 | 0,000028 | 0,00529 |
| 4 | 0,0493 | 0,8262 | 0,000030 | 0,00548 |

**Kovarianzen**

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | $0,000005$ | $0,000006$ | $0,000007$ |
| 2 | $0,000005$ | | $0,000008$ | $0,000005$ |
| 3 | $0,000006$ | $0,000008$ | | $0,000003$ |
| 4 | $0,000007$ | $0,000005$ | $0,000003$ | |

Die Varianz- Kovarianz-Matrix und Korrelationsmatrix lauten:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0{,}000022 & 0{,}000005 & 0{,}000006 & 0{,}000007 \\ 0{,}000005 & 0{,}000024 & 0{,}000008 & 0{,}000005 \\ 0{,}000006 & 0{,}000008 & 0{,}000028 & 0{,}000003 \\ 0{,}000007 & 0{,}000005 & 0{,}000003 & 0{,}000030 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2176 & 0{,}2418 & 0{,}2724 \\ 0{,}2176 & 1 & 0{,}3086 & 0{,}1862 \\ 0{,}2418 & 0{,}3086 & 1 & 0{,}1035 \\ 0{,}2724 & 0{,}1862 & 0{,}1034 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit diesen Varianzen, Kovarianzen und Korrelationskoeffizienten ist es möglich, das Risiko der Finanzprodukte zum Zeitpunkt $t = 0$ zu bestimmen. Sollen jedoch auch die Risiken zu anderen Zeitpunkten berechnet werden, sind die Varianzen, Kovarianzen und Korrelationskoeffizienten auch für die zukünftigen Zinssätze bzw. der entsprechenden Abzinsfaktoren aus langen Datenreihen abzuleiten. Grundsätzlich ist dabei analog der Berechnung der statistischen Parameter für die Nullkuponzinssätze und der zugehörigen Abzinsfaktoren vorzugehen. Wir beschränken uns jedoch auf die Berechnung des Risikos zum Zeitpunkt $t = 0$, d.h. zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses.

### 3.2.1 Sparpläne

Wir betrachten einen Sparplan mit jährlichen nachschüssigen konstanten Einzahlungen. Gegeben sind dabei der jährliche Nominalzinssatz $i_{nom}$ und die Höhe der konstanten Einzahlungen R. Die Zinsberechnung erfolgt nach jeder Einzahlung. In der nachfolgenden Tabelle sind die Einzahlungen dargestellt.




Im Unterabschnitt 2.1.1 wurde der Barwert dieses Sparplanes zum Zeitpunkt $t = 0$ berechnet. Dazu werden die Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(0\leftarrow t)}$ für jede der Ratenzahlungen zum Zeitpunkt $t = 1, 2, ...T$ verwendet und der Barwert jeder Ratenzahlung berechnet:

$$\begin{aligned} BW_0(R_1) &= R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} \\ BW_0(R_2) &= R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} \\ &... \\ BW_0(R_T) &= R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)} \end{aligned}$$

$$BW_0 = \sum_{t=1}^{T} BW_0(R_t) = \sum_{t=1}^{T} R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)}$$

$$BW_0 = R \cdot \sum_{t=1}^{T} \hat{q}_{(0\leftarrow t)}$$

Wie jedes zinsgetragene Finanzprodukt sind Sparpläne risikobehaftet. Es soll nun das Risiko des Sparplanes berechnet werden, wenn die Haltedauer genau 10 Bankarbeitstage beträgt. D.h. der Sparplan wird

in den nächsten 10 Tagen nicht aufgelöst. Das Risiko gibt dann den maximalen Verlust an, der bei Liquidation nach 10 Bankarbeitstagen mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% entstehen würde. Für diese Berechnungen benötigt man nicht nur die Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(0\leftarrow t)}$ sondern auch die Varianzen, Kovarianzen und Korrelationskoeffizienten der Risikofaktoren.

Das Risiko (Value at Risk) kann dann mit Hilfe der Varianz-Kovarianz-Methode unter zur Hilfenahme der Varianz-Kovarianz-Matrix bzw. der Korrelationsmatrix berechnet werden. Risikofaktoren sind die Wachstumstempi der Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(0\leftarrow t)}$. Die Varianz-Kovarianz-Matrix besteht aus Varianzen und Kovarianzen der Wachstumstempi der Abzinsfaktoren und hat die Dimension $(TxT)$. Die Korrelationsmatrix wird aus den Korrelationskoeffizienten der Wachstumstempi der Abzinsfaktoren gebildet und hat ebenfalls die Dimension $(TxT)$.

**Beispiel (vgl. Unterabschnitt 2.1.1) :**

Am Ende jeden Jahres ein Betrag von 1000 EUR eingezahlt. Wir beschränken uns aber auf 4 Zahlungen, da wir die Nullkuponzinssätze und Abzinsfaktoren sowie die Varianzen und Kovarianzen aus dem Abschnitt 3.2 nutzen werden. Die Zinsperiode beträgt 1 Jahr, gegeben ist der Jahreszinssatz von 5%. Zu berechnen ist der Value at Risk zum Zeitpunkt $t = 0$ bei einer Irrtumswahrsxheinlichkeit von 99% und einer Haltedauer von 10 Tagen.

Zur Berechnung des Barwertes $BW_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ wird jede der zukünftigen Zahlungen mit den laufzeitabhängigen Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(0\leftarrow t)}$ mit $t = 1, 2, 3, 4$ abgezinst. Dabei ist zu beachten, dass mit der Zahlung der letzten Rate der Anleger den angesparten Betrag ausgezahlt bekommt. Die Einzahlungen belasten den Sparer und erhalten ein negatives Vorzeichen, während der angesparte Betrag als Einkommen (positives Vorzeichen) aufzufassen ist.

Der Endwert des Sparplanes beträgt 4310.13 EUR:

$$K_T = R \cdot \frac{q_{nom}^T - 1}{q_{nom} - 1} = R \cdot \frac{(1 + i_{nom}^T - 1)}{i_{nom}}$$
$$K_4 = 1000 \cdot \frac{(1,05^4 - 1)}{0,05} = 4310,13$$

Die abgezinsren Beträge betragen:

$$BW_0(R_1) = -R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} = -1000 \cdot 0,9714 = -971,4$$
$$BW_0(R_2) = -R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} = -1000 \cdot 0,9262 = -926,2$$
$$BW_0(R_3) = -R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} = -1000 \cdot 0,8750 = -875,0$$
$$BW_0(R_4) = -R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = -1000 \cdot 0,8262 = -826,2$$
$$BW_0(K_4) = K_4 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = 4310,13 \cdot 0,8262 = 3561,03$$

Die Barwerte jeder Zahlung sind zu addieren:

$$BW_0 = BW_0(R_1) + BW_0(R_2) + BW_0(R_3) + BW_0(R_4) + BW_0(K_4) =$$
$$= -971,40 - 926,20 - 875,00 - 826,20 + 3561,03 = -37,77$$

Der Barwert bildet gleichzeitig den Wert der Preisfunktion im Zeitpunkt $t = 0$. Die Preisfunktion $P(t = 0)$ kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$P(t=0) = -BW_0(R_1) - BW_0(R_2) - BW_0(R_3) - BW_0(R_4) + BW_0(K_4)$$
$$P(t=0) = -R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} - R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} - R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} - R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} + K_4 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)}$$
$$P(t=0) = -R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} - R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} - R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} - R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} + R \cdot \frac{(1 + i_{nom}^T - 1)}{i_{nom}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)}$$
$$P(t=0) = -971,4 - 926,2 - 875,0 - 826,2 + 4.310,13 \cdot 0,8262 = -3598,8 + 3561,03 = -37,77$$

Die Formel zur Berechnung des Value at Risk lautet nun:

$$Var(t,p) = \sqrt{\Delta^{*T} \Sigma \Delta^*} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(1-p)$$

Dabei bezeichnet $\sigma_P$ die Volatilität des Instrumentes oder Portfolios , $\Sigma$ die Varianz-Kovarianz-Matrix und $\Delta^*$ und $\Delta^{*T}$ den Spalten- oder Zeilenvektor der Sensitivitäten bezüglich der Marktrisikodaten $\hat{q}_{(0\leftarrow t)}$.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \sigma_{13}^2 & \sigma_{14}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & \sigma_{23}^2 & \sigma_{24}^2 \\ \sigma_{31}^2 & \sigma_{32}^2 & \sigma_{33}^2 & \sigma_{34}^2 \\ \sigma_{41}^2 & \sigma_{42}^2 & \sigma_{43}^2 & \sigma_{44}^2 \end{pmatrix}, \Delta^* = \begin{pmatrix} \Delta_1^* \\ \Delta_2^* \\ \Delta_3^* \\ \Delta_4^* \end{pmatrix}, \Delta^{*T} = \begin{pmatrix} \Delta_1^* & \Delta_2^* & \Delta_3^* & \Delta_4^* \end{pmatrix}$$

Mit $\Delta_t^*$ wird die Sensitivität für das Marktdatum $\hat{q}_{(0\leftarrow t)}$ bezeichnet.

$$\Delta_t^* = P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow t)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)}(t_0)$$
$$\Delta_1^* = P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 1)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)}(t_0) = -R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)}(t_0) = 1000 \cdot 0,9714 = -971,4$$
$$\Delta_2^* = P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 2)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)}(t_0) = -R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)}(t_0) = 1000 \cdot 0,9262 = -926,2$$
$$\Delta_3^* = P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 3)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)}(t_0) = -R \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)}(t_0) = 1000 \cdot 0,8750 = -875,0$$
$$\Delta_4^* = P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 4)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)}(t_0) = (K_4 - R) \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)}(t_0) = (4310,13 - 1000) \cdot 0,8262 = 3310,13 \cdot 0,8262 = 2734,83$$

Zur Berechnung des Risikos werden neben den Sensitivitäten auch die Varianz-Kovarianz-Matrix benötigt. Die dafür notwendigen Varianzen und Kovarianzen sind in der Anlage (siehe Abschnitt 4.1) aufgeführt.Damit lauten die Varianz-Kovarianz-Matrix und die Vektoren der Sensitivitäten:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0{,}000022 & 0{,}000005 & 0{,}000006 & 0{,}000007 \\ 0{,}000005 & 0{,}000024 & 0{,}000008 & 0{,}000005 \\ 0{,}000006 & 0{,}000008 & 0{,}000028 & 0{,}000003 \\ 0{,}000007 & 0{,}000005 & 0{,}000003 & 0{,}000030 \end{pmatrix}, \Delta^* = \begin{pmatrix} -971,40 \\ -926,20 \\ -875,00 \\ 2734,83 \end{pmatrix}, \Delta^{*T} = \begin{pmatrix} -971,40 & -926,20 & -875,00 & 2734,83 \end{pmatrix}$$

Nun kann das $VaR(1,99\%)$ berechnet werden:

$$VaR(10,99\%) = \sqrt{\Delta^{*T} \Sigma \Delta^*} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(0,01)$$

$$VaR(10,99\%) = \sqrt{\begin{pmatrix} -971,40 & -926,20 & -875,00 & 2734,83 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}000022 & 0{,}000005 & 0{,}000006 & 0{,}000007 \\ 0{,}000005 & 0{,}000024 & 0{,}000008 & 0{,}000005 \\ 0{,}000006 & 0{,}000008 & 0{,}000028 & 0{,}000003 \\ 0{,}000007 & 0{,}000005 & 0{,}000003 & 0{,}000030 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -971,40 \\ -926,20 \\ -875,00 \\ 2734,83 \end{pmatrix}} \cdot \sqrt{10} \cdot F^{-1}(0,01) = -86,62$$

Der maximal mögliche Verlust des Sparproduktes bei einer Haltedauer von 10 Tagen und einer Wahrscheinlichkeit 99% beträgt 86,62 EUR.

Zum fast (Rundungsfehler) gleichen Ergebnis kommt man bei Nutzung der Korrelationsmatrix. Dazu ist das Value at Risk für jeden Marktrisikofaktor zu bestimmen:

$$
\begin{aligned}
VaR_j(t,p) &= P(t=0)'_{\hat{q}_{(0\leftarrow j)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow j)}(t_0)(\sigma_{\hat{q}_{(0\leftarrow j)}} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(1-p)) \\
VaR_1(t,p) &= P(t=0)'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 1)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)}(t_0)(\sigma_{\hat{q}_{(0\leftarrow 1)}} \cdot \sqrt{\Delta 10} \cdot F^{-1}(0,01)) = \\
&= -1000 \cdot 0,9714 \cdot 0,00469 \cdot 3,16227766 \cdot (-2,326347874) = 33,52 \\
VaR_2(t,p) &= P(t=0)'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 2)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)}(t_0)(\sigma_{\hat{q}_{(0\leftarrow 2)}} \cdot \sqrt{\Delta 10} \cdot F^{-1}(0,01)) = \\
&= -1000 \cdot 0,9262 \cdot 0,00490 \cdot 3,16227766 \cdot (-2,326347874) = 33,39 \\
VaR_3(t,p) &= P(t=0)'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 3)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)}(t_0)(\sigma_{\hat{q}_{(0\leftarrow 3)}} \cdot \sqrt{\Delta 10} \cdot F^{-1}(0,01)) = \\
&= -1000 \cdot 0,8750 \cdot 0,00529 \cdot 3,16227766 \cdot (-2,326347874) = 34,05 \\
VaR_4(t,p) &= P(t=0)'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 4)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)}(t_0)(\sigma_{\hat{q}_{(0\leftarrow 4)}} \cdot \sqrt{\Delta 10} \cdot F^{-1}(0,01)) = \\
&= 3310,13 \cdot 0,8262 \cdot 0,00548 \cdot 3,16227766 \cdot (-2,326347874) = -110,25
\end{aligned}
$$

Die aus der Varianz-Kovarianz-Matrix abgeleiteten Korrelationsmatrix P lautet:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0{,}2176 & 0{,}2418 & 0{,}2724 \\
0{,}2176 & 1 & 0{,}3086 & 0{,}1862 \\
0{,}2418 & 0{,}3086 & 1 & 0{,}1035 \\
0{,}2724 & 0{,}1862 & 0{,}1034 & 1
\end{pmatrix}
$$

Die Berechnung des Value at Risk erfolgt nun:

$$VaR(10,99\%) = -\sqrt{VaR_Y^T \cdot P \cdot VaR_Y}$$

$$
VaR(10,99\%) = -\sqrt{\begin{pmatrix} 33,52 & 33,39 & 34,05 & -110,25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2176 & 0{,}2418 & 0{,}2724 \\ 0{,}2176 & 1 & 0{,}3086 & 0{,}1862 \\ 0{,}2418 & 0{,}3086 & 1 & 0{,}1035 \\ 0{,}2724 & 0{,}1862 & 0{,}1034 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 33,52 \\ 33,39 \\ 34,05 \\ -110,25 \end{pmatrix}} = -86,64
$$

Es sei noch angemerkt, dass Sparpläne wie auch das im nächsten Abschnitt behandelte Festgeld keine handelbare Produkte sind. Damit entfällt die Möglichkeit, dass Produkt nach Ablauf der Haltedauer zu veräußern. Ungeachtet dessen, gibt der berechnete Value at Risk Informationen über mögliche Wertverluste des Sparplanes (des Festgeldes), auch im Vergleich zu anderen Produkten.

### 3.2.2 Festgeld

Wie im Unterabschnitt 2.1.2 beschränken wir uns auf den einfachen Fall: Zinsperiode 1 Jahr, fixer Zinssatz, Zinszahlungstermin ist am Ende der Laufzeit. Der Endwert einer solchen Festgeldanlage kann einfach berechnet werden:

$$K_T = K_0 \cdot (1 + i_{nom})^T$$

Zur Barwertberechnung ist der Endwert mit dem Nullkupon-Abzinsfaktor $\hat{q}_{(0\leftarrow T)}$ abzuzinsen:

$$BW_0 = K_T \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)}$$

Die Preisfunktion $P(0)$ lautet:

$$P(t=0) = -K_0 + K_T \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)}$$

Zur Risikoberechnung wird die Varianz-Kovarianz-Methode mit nur einem Risikofaktor (Abzinsfaktor $\hat{q}_{(0\leftarrow T)}$ verwendet.

$$VaR(t,p) = P(t=0)'_{\hat{q}_{(0\leftarrow T)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)}(t_0) \cdot \sigma_{\hat{q}_{(0\leftarrow T)}} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(p-1))$$

Beispiel:

Zu berechnen ist der Value at Risk bei einer Haltedauer von 1 Tag und einer Wahrscheinlichkeit von 99% eines Festgeldes mit folgenden Konditionen:

Nominalwert (Einzahlungsbetrag) $K_0 = 10000$ EUR
Nominalzinssatz $i_{nom} = 5\%$
Laufzeit = 4 Jahre
Nullkuponzinssatz mit Restlaufzeit von 4 Jahren $(1 + i_{real}(0 \to 4)) = 0{,}0489$
Nullkuponabzinsfaktor mit Restlaufzeit von 4 Jahren $\hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = 0{,}8262$
Standardabweichung des Risikofaktors$\sigma_{\hat{q}_{(0\leftarrow 4)}} = 0{,}00548$

$$\begin{aligned} K_4 &= 10000 \cdot 1,05^4 = 12155,06 \\ BW_0 &= 12155,06 \cdot 0,8262 = 10042,51 \\ P(t=0) &= -10000 + 12155,06 \cdot 0,8262 = -10000 + 10042,51 = 42,51 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VaR(1;0,99) &= P(t=0)'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 4)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)}(t_0) \cdot \sigma_{\hat{q}_{(0\leftarrow 4)}} \cdot \sqrt{\Delta 1} \cdot F^{-1}(0,01)) \\ VaR(1;0,99) &= K_4 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)}(t_0) \cdot \sigma_{\hat{q}_{(0\leftarrow 4)}} \cdot \sqrt{\Delta 1} \cdot F^{-1}(0,01)) \\ VaR(1;0,99) &= 12155,06 \cdot 0,8262 \cdot 0,00548 \cdot \sqrt{\Delta 1} \cdot (-2,326347874) = -128,03 \end{aligned}$$

Der maximale Verlust bei einer Haltedauer von 1 Tag und einer Wahrscheinlichkeit von 99% beträgt -128,03 EUR.

## 3.3 Risiko von Krediten

In diesem Abschnitt betrachten wir ausschließlich das Marktpreisrisiko. Das Kreditausfallrisiko bleibt unberücksichtigt. Für den Kreditnehmer ist das Kreditausfallrisiko nahezu unbedeutend. Nur im Falle des Defaults eines Kreditinstitutes könnten Schwierigkeiten bei der Abwicklung der Restschuld entstehen.

Zur Berechnung des Risikos nutzen wir die jeweilige Preisfunktion und verwenden die Varianz-Kovarianz-Methode. Risikofaktoren sind die Abzinsfaktoren auf der Basis der Nullkuponzinssätze, die im Abschnitt 3.2 inklusive der Varianzen bzw. Standardabweichungen noch einmal aufgeführt wurden. Beispiele zur Berechnung des Value at Risk basieren auf den Beispielen aus dem Abschnitt 2.2.

### 3.3.1 Zinsschuld

Die Preisfunktion für Zinsschulden lautet:

$$P(0) = -K_0 + BW_0 = -K_0 + \sum_{t=1}^{T} Z_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)}$$

**Beispiel:**

Eine Zinsschuld von 20000 wird mit einem Jahreszinssatz von 5% verzinst. Die Laufzeit des Kredites beträgt 4 Jahre. Die Zinsen werden am Ende der Zinsperiode, am Ende des Jahres, ausgezahlt. Die Zinszahlungen erfolgen nachschüssig. Die jährlichen Zinsen sind konstant und belaufen sich auf $0,05 \cdot 20000$ EUR $= 1000EUR$. Es ist das Risiko (Value at Risk) bei einer Haltedauer von 10 Tagen und einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 99% zu berechnen. Jede der Zinszahlungen ist mit den Nullkupon-Abzinsfaktoren abzuzinsen, ebenso der Nominalbetrag $K_0$, der am Ende der Laufzeit zurückgezahlt wird:

$$\begin{aligned}
BW_0(Z_1) &= Z_1 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} = 1000 \cdot 0,9714 = 971,44 \\
BW_0(Z_2) &= Z_2 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} = 1000 \cdot 0,9262 = 926,22 \\
BW_0(Z_3) &= Z_3 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} = 1000 \cdot 0,8750 = 875,00 \\
BW_0(Z_4) &= Z_4 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = 1000 \cdot 0,8262 = 825,00 \\
BW_0(K_0) &= K_0 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = 20000 \cdot 0,8262 = 16524,00
\end{aligned}$$

Die Barwerte jeder Zahlung sind zu addieren:

$$\begin{aligned}
BW_0 &= BW_0(R_1) + BW_0(R_2) + BW_0(R_3) + BW_0(R_4) + BW_0(K_0) = \\
&= 971,40 + 926,20 + 875,00 + 825,00 + 16524,00 = 20121,6
\end{aligned}$$

Der Barwert $BW_0$, der mit Hilfe der Nullkuponzinssätze berechnet wurde, beträgt 20121,60 EUR. Das entspricht folgendem Vorgehen:

Die Preisfunktion hat den Wert:

$$\begin{aligned}
P(t=0) &= -K_0 + BW_0 = -K_0 + \sum_{t=1}^{4} Z_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} + K_0 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} \\
P(t=0) &= -K_0 + Z \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} + Z \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} + Z \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} + Z \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} + K_0 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} \\
P(t=0) &= -20000 + 971,40 + 926,20 + 875,00 + 825,00 + 16524,00 = -20000 + 20121,60 = 121,60
\end{aligned}$$

Die Formel zur Berechnung des Value at Risk lautet nun:

$$Var(t,p) = \sqrt{\Delta^{*T} \Sigma \Delta^*} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(1-p)$$

Die Varianz-Kovarianz-Matrix ist identisch der im Unterabschnitt 3.2.1 genutzten Matrix. Neu zu berechnen sind die Sensitivitäten:

$$\Delta_t^* = P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow t)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)}(t_0)$$
$$\Delta_1^* = P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 1)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)}(t_0) = Z \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)}(t_0) = 1000 \cdot 0,9714 = 971,40$$
$$\Delta_2^* = P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 2)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)}(t_0) = Z \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)}(t_0) = 1000 \cdot 0,9262 = 926,20$$
$$\Delta_3^* = P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 3)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)}(t_0) = Z \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)}(t_0) = 1000 \cdot 0,8750 = 875,00$$
$$\Delta_4^* = P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 4)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)}(t_0) = (Z + K_0) \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)}(t_0) = (1000 + 20000) \cdot 0,8262 = 21000 \cdot 0,8262 = 17350,20$$

$$\Delta^* = \begin{pmatrix} 971,40 \\ 926,20 \\ 875,00 \\ 17350,20 \end{pmatrix}, \Delta^{*T} = \begin{pmatrix} 971,40 & 926,20 & 875,00 & 17350,20 \end{pmatrix}$$

Nun kann das $VaR(10,99\%)$ berechnet werden:

$$VaR(10,99\%) = \sqrt{\begin{pmatrix} 971,40 & 926,20 & 875,00 & 17350,20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,000022 & 0,000005 & 0,000006 & 0,000007 \\ 0,000005 & 0,000024 & 0,000008 & 0,000005 \\ 0,000006 & 0,000008 & 0,000028 & 0,000003 \\ 0,000007 & 0,000005 & 0,000003 & 0,000030 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 971,40 \\ 926,20 \\ 875,00 \\ 17350,20 \end{pmatrix}} \cdot \sqrt{10} \cdot F^{-1}(0,01) = -721,30$$

Auf die Berechnung mit Hilfe der Korrelationsmatrix wird verzichtet, das Ergebnis ist nahezu dasselbe.

### 3.3.2 Ratenschuld

Die Preisfunktion für Ratenschuld lautet:

$$P(0) = -K_0 + BW_0 = -K_0 + \sum_{t=1}^{T} AN_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)}$$

Die Annuitäten werden aus Tilgungsbetrag und Zinsen berechnet.

Der konstante Tilgungsbetrag wird bestimmt, in dem die Schuld $K_O$ durch die Anzahl der Zinsperioden m dividiert wird:

$$TB_i = \frac{K_0}{m} \quad i = 1,2,...,m$$
$$TB_i = TB = \quad const.$$

Aus Restschuld $RS_t$ werden die Zinsen $Z_t$ berechnet (ausführlich im **??**),woraus sich die nicht konstanten Annuitäten $AN_t$ ergeben:

$$AN_t = TB + Z_t$$

Beispiel:

Eine Schuld von 80000 EUR soll durch gleiche Tilgungsraten in 4 Jahren getilgt werden. Die Verzinsung erfolgt jährlich bei einem gegebenen Jahreszinssatz von 5%. Die Zinsen werden am Ende jeder Zinsperiode

fällig. Es ist das Risiko (Value at Risk) bei einer Haltedauer von 10 Tagen und einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 99% zu berechnen. Der konstante Tilgungsbetrag für alle Zins(zahlungs)perioden beträgt $TB = \frac{80000}{4} = 20000$. Die Größen $RS_j$, $Z_j$ und $AN_j$ $\forall j$ sind tabellarisch aufgeführt:

| $j$ | $RS_j$ | $TB$ | $Z_j$ | $AN_j$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 80000 | | | |
| 1 | 60000 | 20000 | 4000 | 24000 |
| 2 | 40000 | 20000 | 3000 | 23000 |
| 3 | 20000 | 20000 | 2000 | 22000 |
| 4 | 0 | 20000 | 1000 | 21000 |

Der Barwert wird durch Addition der abgezinsten Annuitäten berechnet. Die abgezinsten Annuitäten lauten:

$$\begin{aligned}
BW_0(AN_1) &= AN_1 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} = 24000 \cdot 0,9714 = 23313,60 \\
BW_0(AN_2) &= AN_2 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} = 23000 \cdot 0,9262 = 21302,60 \\
BW_0(AN_3) &= AN_3 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} = 22000 \cdot 0,8750 = 19250,00 \\
BW_0(AN_4) &= AN_4 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = 21000 \cdot 0,8262 = 17350,20
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
BW_0 &= BW_0(AN_1) + BW_0(AN_2) + BW_0(AN_3) + BW_0(AN_4) = \\
&= 23313,60 + 21302,60 + 19250,00 + 17350,20 = 81216,40
\end{aligned}$$

Für die Preisfunktion gilt:

$$\begin{aligned}
P(t=0) &= -K_0 + BW_0 = -K_0 + \sum_{t=1}^{4} AN_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} \\
P(0) &= -80000 + 81216,40 = 1216,40
\end{aligned}$$

Die Formel zur Berechnung des Value at Risk lautet nun:

$$Var(t,p) = \sqrt{\Delta^{*T} \Sigma \Delta^*} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(1-p)$$

Die Varianz-Kovarianz-Matrix ist identisch der im Unterabschnitt 3.2.1 genutzten Matrix. Neu zu berechnen sind die Sensitivitäten:

$$\begin{aligned}
\Delta_t^* &= P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow t)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)}(t_0) \\
\Delta_1^* &= P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 1)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)}(t_0) = AN_1 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)}(t_0) = 24000 \cdot 0,9714 = 23313,60 \\
\Delta_2^* &= P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 2)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)}(t_0) = AN_2 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)}(t_0) = 23000 \cdot 0,9262 = 21302,60 \\
\Delta_3^* &= P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 3)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)}(t_0) = AN_3 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)}(t_0) = 22000 \cdot 0,8750 = 19250,00 \\
\Delta_4^* &= P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 4)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)}(t_0) = AN_4 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)}(t_0) = 21000 \cdot 0,8262 = 17350,20
\end{aligned}$$

$$\Delta^* = \begin{pmatrix} 23313,60 \\ 21302,60 \\ 19250,00 \\ 17350,20 \end{pmatrix}, \Delta^{*T} = \begin{pmatrix} 23313,60 & 21302,60 & 19250,00 & 17350,20 \end{pmatrix}$$

Nun kann das $VaR(10, 99\%)$ berechnet werden:

$$VaR(10, 99\%) = \sqrt{\begin{pmatrix} 23313,60 & 21302,60 & 19250,00 & 17350,20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}000022 & 0{,}000005 & 0{,}000006 & 0{,}000007 \\ 0{,}000005 & 0{,}000024 & 0{,}000008 & 0{,}000005 \\ 0{,}000006 & 0{,}000008 & 0{,}000028 & 0{,}000003 \\ 0{,}000007 & 0{,}000005 & 0{,}000003 & 0{,}000030 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 23313,60 \\ 21302,60 \\ 19250,00 \\ 17350,20 \end{pmatrix}} \cdot \sqrt{10} \cdot F^{-1}(0,01) =$$
$$= -1953,74$$

Auf die Berechnung mit Hilfe der Korrelationsmatrix wird verzichtet, das Ergebnis ist nahezu dasselbe.

### 3.3.3 Anuitätenschuldschuld

Die Annuitätenschuld wurde ausführlich im **??** behandelt. Die konstante Annuität $AN$ wird ausaus Anfangsschuld $K_0$ und dem Nominalzinssatz $i_{nom}$ errechnet:

$$AN = K_0 \cdot (1 + i_{nom})^m \cdot \frac{i_{nom}}{(1 + i_{nom})^T - 1}$$

Zur Bestimmung des Barwertes zum Zeitpunkt $t = 0$ werden wiederum die Nullkuponabzinsfaktoren herangezogen. Die Annuitäten am Ende jeder Zinsperiode wird mit dem entsprechenden Abzinsfaktor multipliziert und die so erhaltenen Teilbarwerte addiert:

$$BW_0(AN_t) = AN \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow t)}$$
$$BW_0 = \sum_{t=1}^{T} AN \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow t)} = AN \cdot \sum_{t=1}^{T} \hat{q}_{(0 \leftarrow t)}$$

**Beispiel**
Eine Schuld von 80000 EUR soll durch gleiche Annuitäten in 4 Jahren getilgt werden. Die Verzinsung erfolgt jährlich bei einem gegebenen Jahreszinssatz von 5%. Die Zinsen werden am Ende jeder Zinsperiode fällig. Es ist das Risiko (Value at Risk) bei einer Haltedauer von 10 Tagen und einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 99% zu berechnen. Die konstante jährliche Annuitäten ist folgende:

$$AN = K_0 \cdot (1 + i_{nom})^m \cdot \frac{i_{nom}}{(1 + i_{nom})^T - 1}$$
$$= 80000 \cdot (1,05)^4 \cdot \frac{0,05}{(1,05)^4 - 1} = 22560,95$$

Zur Berechnung des Barwertes ist jede Annuität mit den Nullkuponabzinsfaktoren auf den Zeitpunkt $t = 0$ abzuzinsen:

$$BW_0(AN_1) = AN \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow 1)} = 22560,95 \cdot 0,9714 = 21915,71$$
$$BW_0(AN_2) = AN \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow 2)} = 22560,95 \cdot 0,9262 = 20895,95$$
$$BW_0(AN_3) = AN \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow 3)} = 22560,95 \cdot 0,8750 = 19740,83$$
$$BW_0(AN_4) = AN \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow 4)} = 22560,95 \cdot 0,8262 = 18639,86$$

Der Barwert wird durch Addition der abgezinsten Annuitäten berechnet:

$$BW_0 = BW_0(AN_1) + BW_0(AN_2) + BW_0(AN_3) + BW_0(AN_4) =$$
$$= 21915,71 + 20895,95 + 19740,83 + 18639,86 = 81192,35$$

Für die Preisfunktion gilt:

$$P(0) = -K_0 + BW_0 = -K_0 + \sum_{t=1}^{T} AN_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)}$$
$$P(0) = -80000 + 81192,35 = 1192,35$$

Die Formel zur Berechnung des Value at Risk lautet nun:

$$Var(t,p) = \sqrt{\Delta^{*T}\Sigma\Delta^*} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(1-p)$$

Die Varianz-Kovarianz-Matrix ist identisch der im Unterabschnitt 3.2.1 genutzten Matrix. Neu zu berechnen sind die Sensitivitäten:

$$\Delta_t^* = P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow t)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)}(t_0)$$
$$\Delta_1^* = P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 1)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)}(t_0) = AN \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)}(t_0) = 22560,95 \cdot 0,9714 = 21915,71$$
$$\Delta_2^* = P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 2)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)}(t_0) = AN \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)}(t_0) = 22560,95 \cdot 0,9262 = 20895,95$$
$$\Delta_3^* = P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 3)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)}(t_0) = AN \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)}(t_0) = 22560,95 \cdot 0,8750 = 19740,83$$
$$\Delta_4^* = P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 4)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)}(t_0) = AN \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)}(t_0) = 22560,95 \cdot 0,8262 = 18639,86$$

$$\Delta^* = \begin{pmatrix} 21915,71 \\ 20895,95 \\ 19740,83 \\ 18639,86 \end{pmatrix}, \Delta^{*T} = \begin{pmatrix} 21915,71 & 20895,95 & 19740,83 & 18639,86 \end{pmatrix}$$

Nun kann das $VaR(10,99\%)$ berechnet werden:

$$VaR(10,99\%) = \sqrt{\begin{pmatrix} 21915,71 & 20895,95 & 19740,83 & 18639,86 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,000022 & 0,000005 & 0,000006 & 0,000007 \\ 0,000005 & 0,000024 & 0,000008 & 0,000005 \\ 0,000006 & 0,000008 & 0,000028 & 0,000003 \\ 0,000007 & 0,000005 & 0,000003 & 0,000030 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21915,71 \\ 20895,95 \\ 19740,83 \\ 18639,86 \end{pmatrix}} \cdot \sqrt{10} \cdot F^{-1}(0,01) =$$
$$= -1$$

Auf die Berechnung mit Hilfe der Korrelationsmatrix wird verzichtet, das Ergebnis ist nahezu dasselbe.

## 3.4 Risiko von Termingeschäften

Im Unterabschnitt 2.3.1 wurde das Termingeschäft mit zwei Währungen beschrieben. Zwei Vertragsparteien vereinbaren zu einen bestimmten Termin in der Zukunft zwei Geldbeträge in unterschiedlichen Währungen zu einen festen Wechselkurs auszutauschen. Beiden Parteien ist der tatsächliche Wechselkurs zum Austauschtermin nicht bekannt. Zu berechnen ist der Value at Risk mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit

von 99% und einer Haltedauer von 10 Tagen. Formal werden zwei Zahlungen zum Zeitpunkt $t = 0$ vereinbart:

| | |
|---|---|
| $A_t(1)$ | Zahlung eines Geldbetrages in Währung 1 zum Zeitpunkt $t$ |
| $A_t(2)$ | Erhalt eines Geldbetrages in Währung 2 zum Zeitpunkt $t$ |
| $t = 0$ | Zeitpunkt des Vertragsabschlusses |
| $wk_t(1,2) =$ | $\frac{A_t(1)}{A_t(2)}$ - Wechselkurs Währung 1 zu Währung 2 zum Zeitpunkt $t$ |

Die Preisfunktion $P(t = 0)$ ist identisch mit dem Barwert $BW_0$ und lautet:

$$P(t = 0) = BW_0 = A_t(1) \cdot \hat{q}_{1(0\leftarrow t)} + A_t(2) \cdot wk_0(1,2) \cdot \hat{q}_{2(0\leftarrow t)}$$

Risikofaktoren sind die Abzinsfaktoren $\hat{q}_{1(0\leftarrow t)}$ und $\hat{q}_{2(0\leftarrow t)}$ in beiden Währungsräumen und der Wechselkurs $wk_t(1,2)$. Zur Risikoberechnung sind die Varianzen und Kovarianzen der Risikofaktoren sowie deren Werte im Zeitpunkt $t = 0$ notwendig.

**Beispiel aus dem Unterabschnitt 2.3.1:**

Die Zahlungen lauten:

$$A_2(EUR) = -1000000$$
$$A_2(USD) = 1192536,28$$

Es wird zum Zeitpunkt $t = 0$ vereinbart, in zwei Jahren $t = 2$ 1000000 EUR in 1192536,28 USD zu tauschen.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ gelten folgende Marktbedingungen:

$wk_0(EUR, USD) = 0,84 \frac{EUR}{USD}$
$i_{EUR,real(0\rightarrow 2)} = 0,0390$
$\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 2)} = 0,9262$
$i_{USD,real(0\rightarrow 2)} = 0,040$
$\hat{q}_{USD(0\leftarrow 2)} = 0,9246$

Die Nullkuponzinssätze für den USD-Währungsraum wurden angenommen und nicht aus Nullkuponanleihen bzw. Kuponanleihen berechnet.

Zur Risikoberechnung sind zusätzlich die Varianzen und Kovarianzen aus langen Reihen der Risikofaktoren zu berechnen. Wir greifen dabei teilweise auf unsere Berechnungen aus dem Unterabschnitt 3.1.5 und aus dem Abschnitt 3.2 zurück. Das betrifft ausschließlich den Mittelwert, die Varianz und Standardabweichung des Wechselkurses :

$$\mu_{wk(EUR\,USD)} = 0,000000$$
$$\sigma_{wk(EUR\,USD)} = 0,004920$$
$$\sigma^2_{wk(EUR\,USD)} = 0,000024$$

Die Mittelwerte, die Varianzen und Standardabweichungen hinsichtlich der beiden anderen Risikofaktoren (Wachstumstempo der Abzinsfaktoren für den EURO- und USD-Raum - $\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 2)}$ und $\hat{q}_{USD(0\leftarrow 2)}$) werden exogen vorgegeben:

$$\mu_{\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 2)}} = 0,000000$$
$$\sigma_{\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 2)}} = 0,004920$$
$$\sigma^2_{\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 2)}} = 0,000024$$
$$\mu_{\hat{q}_{USD(0\leftarrow 2)}} = 0,000000$$
$$\sigma_{\hat{q}_{USD(0\leftarrow 2)}} = 0,005292$$
$$\sigma^2_{\hat{q}_{USD(0\leftarrow 2)}} = 0,000028$$

Ebenso wurden Werte für alle Kovarianzen angenommen.

| | $wk(USD\,EUR)$ | $\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 2)}$ | $\hat{q}_{USD(0\leftarrow 2)}$ |
|---|---|---|---|
| $wk(USD\,EUR)$ | | $0,000005$ | $0,000006$ |
| $\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 2)}$ | $0,000005$ | | $0,000008$ |
| $\hat{q}_{USD(0\leftarrow 2)}$ | $0,000006$ | $0,000008$ | |

Die statistischen Parameter der Risikofaktoren (Mittelwerte, die Varianzen und Standardabweichungen sowie die Kovarianzen) sind im Anhang (Abschnitt 4.1) noch einmal separat aufgeführt.

Daraus ergeben sich folgende Varianz-Kovarianz-Matrix und Korrelationsmatrix :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0{,}000024 & 0{,}000005 & 0{,}000006 \\ 0{,}000005 & 0{,}000024 & 0{,}000008 \\ 0{,}000006 & 0{,}000008 & 0{,}000028 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2083 & 0{,}2315 \\ 0{,}2083 & 1 & 0{,}3086 \\ 0{,}2315 & 0{,}3086 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Value at Risk wird nach folgender Formel berechnet:

$$Var(t,p) = \sqrt{\Delta^{*T}\Sigma\Delta^*} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(1-p)$$

Die Sensitivitäten werden mit Hilfe der ersten Ableitung der Preisfunktion und den Werten der Risikofaktoren am Bewertungstag ($t = 0$) berechnet. Die Preisfunktion ist identisch mit dem Barwert $BW_0$ und lautet:

$$P_(t = 0) = BW_0 = A_1(EUR) \cdot \hat{q}_{EUR(0\leftarrow 2)} + A_2(USD) \cdot wk(USD\,EUR) \cdot \hat{q}_{USD(0\leftarrow 2)}$$

Daraus ergeben sich folgende Sensitivitäten:

$$\begin{aligned}
\Delta_1^* &= P'_{wk(USD\,EUR)} \cdot wk_0(USD\,EUR) = A_2(USD) \cdot \hat{q}_{USD(0\leftarrow 2)} \cdot wk_0(EUR, USD) = \\
&= 1192536,28 \cdot 0,9246 \cdot 0,84 = 926.200,00 \\
\Delta_2^* &= P'_{\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 2)}} \cdot \hat{q}_{EUR(0\leftarrow 2)}(t_0) = A_1(EUR) \cdot \hat{q}_{EUR(0\leftarrow 2)}(t_0) = \\
&= -1000000 \cdot 0,9262 = -926200,00 \\
\Delta_3^* &= P'_{\hat{q}_{USD(0\leftarrow 2)}} \cdot \hat{q}_{USD(0\leftarrow 2)}(t_0) = A_2(USD) \cdot wk_0(EUR, USD) \cdot \hat{q}_{USD(0\leftarrow 2)}(t_0) = \\
&= 1192536,28 \cdot 0,84 \cdot 0,9246 = 926.200,00
\end{aligned}$$

$$\Delta^* = \begin{pmatrix} 926.200,00 \\ -926.200,00 \\ 926.200,00 \end{pmatrix}, \Delta^{*T} = \begin{pmatrix} 926.200,00 & -926.200,00 & 926.200,00 \end{pmatrix}$$

Nun kann das $VaR(10, 99\%)$ berechnet werden:

$$VaR(10,99\%) = \sqrt{\begin{pmatrix} 926.200,00 & -926.200,00 & 926.200,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}000024 & 0{,}000005 & 0{,}000006 \\ 0{,}000005 & 0{,}000024 & 0{,}000008 \\ 0{,}000006 & 0{,}000008 & 0{,}000028 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 926.200,00 \\ -926.200,00 \\ 926.200,00 \end{pmatrix}} \cdot \sqrt{10} \cdot F^{-1}(0,01) = -53650,69$$

Auf die Berechnung mit Hilfe der Korrelationsmatrix wird verzichtet, das Ergebnis ist nahezu dasselbe.

## 3.5 Risiko von Anleihen

### 3.5.1 Festverzinsliche Anleihen ohne Kreditausfallrisiko

Wir bewerten ausschließlich festverzinsliche Anleihen mit jährlichen Zinszahlungen am Ausgabetag oder einem Kaufdatum, dass genau ein oder mehre Jahre nach dem Ausgabedatum liegt. Damit beträgt die Restlaufzeit genau T Jahre. Ausführlich wurden festverzinsliche Anleihen im Abschnitt 2.8 oder genauer im Unterabschnitt 2.8.1 beschrieben.

Eine festverzinsliche Anleihe mit jährlichen Zinszahlungen bei Zinsperioden von einem Jahr und einer Restaufzeit von T Jahren besteht aus T-1 konstanten Zahlungen (identisch mit den Zinszahlungen $Z_t$), einer einmaligen Zahlung beim Erwerb der Anleihe $K_0$ - mit negativem Vorzeichen - und der letzten Zahlung am Ende der Laufzeit, bestehend aus Zinsen für die letzte Zinsperiode $Z_T$ und den Nominalbetrag $N$. Es wird der Barwert am Tag des Erwerbs des Bonds berechnet, der auch die Grundlage für die Risikoberechnung bildet, wieder mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 99% und einer Halzedauer von10 Tagen. Zur Berechnung des Barwertes ist jede der Zahlungen mit Hilfe der ganzjährigen Nullkupon-Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(0\leftarrow t)}$ mit $t = 0, 1, 2, ..., T$ abzuzinsen.

$$BW_0 = \sum_{j=1}^{T-1} Z_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow j)} + (N + Z_T) \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)}$$

Die Preisfunktion lautet:

$$P(t = 0) = BW_0 - K_0$$

Zur Risikoberechnung wird die Varianz-Kovarianz-Methode verwendet:

$$Var(t, p) = \sqrt{\Delta^{*T} \Sigma \Delta^*} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(1 - p)$$

Risikofaktoren sind die Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(0\leftarrow t)}$.

**Beispiel:**

Eine festverzinsliche Anleihe mit einem Nominalwert von 20000,00 EUR wird mit einem Jahreszinssatz von 5% verzinst. Die Restlaufzeit des Bondes beträgt 3 Jahre. Der Bond wurde zu einem Preis von $K_0 = 20000,00$ EUR zum Zeitpunkt $t = 0$ erworben Die Zinsen werden am Ende der Zinsperiode, am Ende des Jahres, ausgeschüttet. Die jährlichen Zinsen sind konstant und belaufen sich auf $0,05 \cdot 20000$ EUR $= 1000EUR$. Es ist das Risiko (Value at Risk) bei einer Haltedauer von 10 Tagen und einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 99% zu berechnen. Jede der Zinszahlungen ist mit den Nullkupon-Abzinsfaktoren abzuzinsen, ebenso der Nominalbetrag $N$, der am Ende der Laufzeit zurückgezahlt wird:

$$
\begin{aligned}
BW_0(Z_1) &= Z_1 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)} = 1000 \cdot 0,9714 = 971,44 \\
BW_0(Z_2) &= Z_2 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} = 1000 \cdot 0,9262 = 926,22 \\
BW_0(Z_3) &= Z_3 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} = 1000 \cdot 0,8750 = 875,00 \\
BW_0(K_0) &= N \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} = 20000 \cdot 0,8750 = 17500,00
\end{aligned}
$$

Die Barwerte jeder Zahlung sind zu addieren:

$$
\begin{aligned}
BW_0 &= BW_0(Z_1) + BW_0(Z_2) + BW_0(Z_3) + BW_0(K_0) = \\
&= 971,40 + 926,20 + 875,00 + 17500 = 20272,66
\end{aligned}
$$

Der Barwert $BW_0$, der mit Hilfe der Nullkuponzinssätze berechnet wurde, beträgt 20272,66 EUR. Das entspricht folgendem Vorgehen:

Die Preisfunktion hat den Wert:

$$
\begin{aligned}
P(t=0) &= -K_0 + BW_0 = K_0 + \sum_{t=1}^{3} Z_t \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} - K_0 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} \\
P(t=0) &= -20000,00 + 971,40 + 926,20 + 875,00 + 17500 = -20200,00 + 20272,66 = 72,66
\end{aligned}
$$

Die Formel zur Berechnung des Value at Risk lautet nun:

$$
Var(t,p) = \sqrt{\Delta^{*T} \Sigma \Delta^*} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(1-p)
$$

Die Varianz-Kovarianz-Matrix ist identisch der im Unterabschnitt 3.2.1 genutzten Matrix. Neu zu berechnen sind die Sensitivitäten:

$$
\begin{aligned}
\Delta_t^* &= P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow t)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)}(t_0) \\
\Delta_1^* &= P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 1)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)}(t_0) = Z \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)}(t_0) = 1000 \cdot 0,9714 = 971,40 \\
\Delta_2^* &= P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 2)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)}(t_0) = Z \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)}(t_0) = 1000 \cdot 0,9262 = 926,20 \\
\Delta_3^* &= P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 3)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)}(t_0) = (Z + K_0) \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)}(t_0) = (1000 + 20000) \cdot 0,8750 = 18375,00
\end{aligned}
$$

$$
\Delta^* = \begin{pmatrix} 971,40 \\ 926,20 \\ 18375,00 \end{pmatrix}, \Delta^{*T} = \begin{pmatrix} 971,40 & 926,20 & 18375,00 \end{pmatrix}
$$

Nun kann das $VaR(10,99\%)$ berechnet werden:

$$
VaR(10,99\%) = \sqrt{\begin{pmatrix} 971,40 & 926,20 & 18375,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,000022 & 0,000005 & 0,000006 \\ 0,000005 & 0,000024 & 0,000008 \\ 0,000006 & 0,000008 & 0,000028 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 971,40 \\ 926,20 \\ 18375,00 \end{pmatrix}} \cdot \sqrt{10} \cdot F^{-1}(0,01) = -735,32
$$

Der maximal mögliche Verlust bei einer Haltedauer von 10 Tagen und einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 99% beträgt 735,32 EUR.

### 3.5.2 Risiko von variabel verzinsliche Anleihen

Wie im Abschnitt 2.9 beschrieben, werden zur Barwertberechnung die nicht bekannten Zinsen aus der Nullkupon-Zinskurve abgeleitet. In der Regel setzten sich die variablen Zinssätze $i_{t-1}$ aus einem Referenzzinssatz $i_{ref,t-1}$ und einem Aufschlag $\Delta_{t-1}$ zusammen. Daraus werden die Zinsen $Z_t(i_{t-1})$ berechnet:

$$\begin{aligned} i_{t-1} &= i_{ref,t-1} + \Delta_{t-1} \\ Z_t(i_{t-1}) &= N \cdot i_{t-1} \end{aligned}$$

Die Berechnung des Barwertes vereinfacht sich, wenn angenommen wird, dass der Aufschlag $\Delta_t$ gleich Null ist. Der Barwert hat dann den Wert N und ist damit risikofrei. Die Preisfunktion - unter der Voraussetzung, dass der Nominalwert der Anleihe gleich dem Ausgabepreis ist hat dann den Wert Null. In anderen Fall ist der Nominalwert durch den Ausgabepreis zu ersetzen.

$$\begin{aligned} BW_0 &= N \\ P_0 &= N - BW_0 = 0 \end{aligned}$$

bzw.

$$P_0 = K_0 - BW_0 = K_0 - N$$

Anders verhält es sich, wenn $\Delta_t \neq 0$. Die Zinserträge, die durch den Aufschlag von $\Delta$ erzielt werden, sind zu diskontieren und danach zu addieren. Als Risikofaktoren treten nun die Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(0\leftarrow t)}$ auf:

$$\sum_{t=1}^{T} \Delta \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)}$$

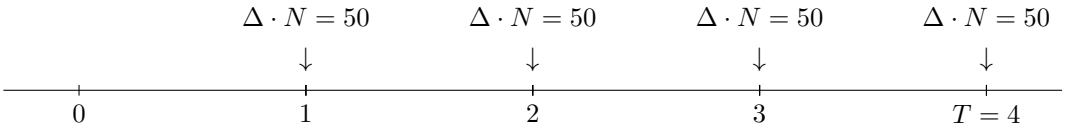
Die Preisfunktion lautet:

$$P_0 = K_0 - BW_0 = K_0 - N - \sum_{t=1}^{T} \Delta \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)}$$

Sowohl $K_0$ als auch N sind risikolos. Es ist lediglich das Risiko der Zinserträge, die auf Grund des Zinsaufschlages $\Delta$ entstanden sind, zu berechnen.

#### Beispiel aus Unterabschnitt 3.5.2

Wie im Unterabschnitt 3.5.2 beschrieben, gehen wir bei der Risikoberechnung schrittweise vor. Wird vorausgesetzt, dass der Zinsaufschlag $\Delta$ gleich 0 ist, tritt kein Risiko auf. Erst durch den Zinsaufschlag $\Delta$ entsteht ein Zinsänderungsrisiko, das zu berechnen ist.
Für die Zahlungsströme, die aus den Aufschlag resultieren, sind die **zukünftigen** Nullkuponzinssätze heranzuziehen. Es ergeben sich folgende Zahlungsströme:




Alle zukünftigen Zinssätze für die weiteren Berechnungen des Zinsänderungsrisiko relevant sind, werden in der folgenden Tabelle dargestellt. Sie wurden dem Unterabschnitt 3.5.2 entnommen

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0294 | 0,0391 | 0,0455 | 0,0489 |

Die zugehörigen Abzinsfaktoren lauten:

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,9714 | 0,9262 | 0,8750 | 0,8262 |

Auch diese stammen aus dem Unterabschnitt 3.5.2.

Es können nun die Teilbarwerte für die Zinserträge aus den Aufschlag $\Delta$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} BW_0(\Delta_t) &= \Delta \cdot N \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} = 0,005 \cdot 10000 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} = \\ &= 50 \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} \\ t &= 1,2,3,4 \end{aligned}$$

Die Teilbarwerte sind zu addieren, um den Barwert aller Zinserträge aus dem Aufschlag $\Delta$ zu erhalten

$$\sum_{t=1}^{T} \Delta \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} = \Delta \cdot \sum_{t=1}^{T} \hat{q}_{(0\leftarrow t)} =$$
$$50 \cdot (0,9714 + 0,9262 + 0,8750 + 0,8262) = 50 \cdot 3,5988 = 179,94$$

Der Barwert aller Zinserträge aus dem Aufschlag $\Delta$ beträgt 179.94 EUR .

Die Preisfunktion aller Zinserträge aus dem Aufschlag $\Delta$ lautet:

$$P(t=0,\Delta) = \sum_{t=1}^{4} \Delta \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)} = 179,94$$

Berechnung des Value at Risk aller Zinserträge aus dem Aufschlag $\Delta$ erfolgt mit der bekannten Formel der Varianz-Kovarianz-Methode:

$$Var(t,p) = \sqrt{\Delta^{*T}\Sigma\Delta^*} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(1-p)$$

Die Risikofaktoren sind die Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(0\leftarrow t)}(t_0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Varianz-Kovarianz-Matrix ist identisch der im Unterabschnitt 3.2.1 genutzten Matrix (einem Beispiel mit einer Laufzeit wie hier von 4 Jahren). Neu zu berechnen sind die Sensitivitäten für unsere Preisfunktion:

$$\begin{aligned} \Delta_t^* &= P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow t)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)}(t_0) \\ \Delta_1^* &= P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 1)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)}(t_0) = \Delta \cdot N \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 1)}(t_0) = 50 \cdot 0,9714 = 48,57 \\ \Delta_2^* &= P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 2)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)}(t_0) = \Delta \cdot N \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)}(t_0) = 50 \cdot 0,9262 = 46,31 \\ \Delta_3^* &= P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 3)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)}(t_0) = \Delta \cdot N \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)}(t_0) = 50 \cdot 0,8750 = 43,75 \\ \Delta_4^* &= P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 4)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)}(t_0) = \Delta \cdot N \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)}(t_0) = 50 \cdot 0,8262 = 41,31 \end{aligned}$$

Es können nun die Vektoren der Sensitivitäten gebildet werden.

$$\Delta^* = \begin{pmatrix} 48,57 \\ 46,31 \\ 43,75 \\ 41,31 \end{pmatrix}, \Delta^{*T} = \begin{pmatrix} 48,57 & 46,31 & 43,75 & 41,31 \end{pmatrix}$$

Das $VaR(10, 99\%)$ kann durch die bekannte Formel der Varianz-Kovarianz-Methode berechnet werden:

$$Var(t,p) = \sqrt{\Delta^{*T} \Sigma \Delta^*} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(1-p)$$

$$VaR(10,99\%) = \sqrt{\begin{pmatrix} 48,57 & 46,31 & 43,75 & 41,31 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}000022 & 0{,}000005 & 0{,}000006 & 0{,}000007 \\ 0{,}000005 & 0{,}000024 & 0{,}000008 & 0{,}000005 \\ 0{,}000006 & 0{,}000008 & 0{,}000028 & 0{,}000003 \\ 0{,}000007 & 0{,}000005 & 0{,}000003 & 0{,}000030 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 48,57 \\ 46,31 \\ 43,75 \\ 41,31 \end{pmatrix}} \cdot \sqrt{10} \cdot F^{-1}(0,01) =$$

$$= -4,33$$

Das Risiko beträgt 4,33 EUR.

Auf die Berechnung mit Hilfe der Korrelationsmatrix wird verzichtet, das Ergebnis ist nahezu dasselbe. Floater sind Instrumente mit einem vergleichbar geringen Risiko.

## 3.6 Risiko von Forward Rate Agreements - Zinstermingeschäfte

Die Bestimmung des Barwertes eines Forward Rate Agreements wurde ausführlich im Abschnitt 2.4 beschrieben. Hier soll das Risiko dieses Finanzproduktes am Tag des Vertragsabschlusses $t_0$ berechnet werden. Stellen wir noch einmal die grundsätzlichen Bedingungen zur Realisierung des Finanzproduktes dar:

Es wird zum Zeitpunkt $t_0$ eine Vereinbarung über den FRA-Zinssatzes $i_{FRA}(t_1 \to T))$ und die Höhe des Nominalwertes N getroffen. Gleichzeitig wird der Beginn und das Ende der Vorlaufzeit und der FRA-Zinsperiode festgelegt. Ein Kapitalaustausch findet nicht statt. Im Zeitpunkt $t_1$ erfolgt das Fixing des Referenzzinssatzes $(i_{REF}(t_1 \to T))$. Zum Zeitpunkt $T$ werden die Zinsen für jede Vertragspartei berechnet und eine Ausgleichszahlung $\Delta_T$ berechnet. Die Ausgleichszahlung wird in der Regel zum Zeitpunkt $t_1$ vorgenommen. Dazu ist es nötig, den für den Zeitpunkt T berechneten Betrag auf den Zeitpunkt $t_1$ abzuzinsen. Zum Abzinsen verwendet man Abzinsfaktoren $\frac{1}{1+i_{REF}(t_1 \to T) \cdot \frac{T-t_1}{360}}$, die auf dem Referenzzinssatz $i_{REF}(t_1 \to T)$ basieren.

Ausgangspunkt der Überlegung ist die Preisfunktion eines FRA (Formel (2.18)):

$$PW_{t_0} = N \cdot \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(t_0 \to t_1) \cdot \frac{t_1 - t_0}{360}} - \\ - N \cdot (1 + i_{FRA}(t_1 \to T)) \cdot \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(t_0 \to T) \cdot \frac{T - t_0}{360}}$$

Die Größen Nominalwert N und FRA-Zinssatz $i_{FRA}(t_1 \to T)$ im der Preisfunktion sind gegebene Größen, die nicht als Risikofaktoren in Betracht u ziehen sind, die Referenzzinssätze resp. die daraus abgeleiteten Abzinsfaktoren sind als marktrisikobehaftete Größen zu berücksichtigen:

$$\hat{q}_{EURIBOR(t_0 \leftarrow t_1)} = \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(t_0 \rightarrow t_1) \cdot \frac{t_1 - t_0}{360}}$$

$$\hat{q}_{EURIBOR(t_0 \leftarrow T)} = \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(t_0 \rightarrow T) \cdot \frac{T - t_0}{360}}$$

Häfig findet man langfristige Reihen der Zinsentwicklung des EURIBOR $i_{EURIBOR}(0 \rightarrow \theta)$, wobei $\theta$ die Laufzeit in Monaten bzw. Wochen des EURIBOR angeben. [3]. Sollten die Laufzeiten nicht den standardisierten Werten entsprechen, sind spezielle Verfahren zur Interpolation zu verwenden.
Im Beispiel aus dem Abschnitt 2.4 hat die Preisfunktion folgende konkrete Form:

$$\begin{aligned} PW_0 = N \cdot \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(0 \rightarrow 3)} \cdot \frac{90}{360} - \\ - N \cdot (1 + i_{FRA}(3 \rightarrow 9)) \cdot \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(0 \rightarrow 9) \cdot \frac{270}{360}} \\ PW_0 = N \cdot \hat{q}_{EURIBOR(0 \leftarrow 3)} - N \cdot (1 + i_{FRA}(3 \rightarrow 9)) \cdot \hat{q}_{EURIBOR(0 \leftarrow 9)} \end{aligned}$$

Damit benötigen wir zu Risikoberechnung die Varianzen bzw. Kovarianzen für die beiden Risikofaktoren:

$$\hat{q}_{EURIBOR(0 \leftarrow 3)} = \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(0 \rightarrow 3)} \cdot \frac{90}{360}$$

$$\hat{q}_{EURIBOR(0 \leftarrow 9)} = \frac{1}{1 + i_{EURIBOR}(0 \rightarrow 9)} \cdot \frac{270}{360}$$

Die Varianzen bzw. die Kovarianz lassen sich aus den langfristigen Zeitreihen der Zinsentwicklung berechnen Sie lauten:

| Risikofaktor | Bezeichnung | Mittelwert | Varianz | Standardabweichungen |
|---|---|---|---|---|
| Wachstumstempo der Abzinsfaktoren des EURIBOR Laufzeit in Mon. $(0 \leftarrow 3)$ | $\hat{q}_{EURIBOR(0 \leftarrow 3)}$ | $\mu = 0,000000$ | $\sigma^2 = 0,000005$ | $\sigma = 0,002236$ |
| Wachstumstempo der Abzinsfaktoren des EURIBOR Laufzeit in Mon. $(0 \leftarrow 9)$ | $\hat{q}_{EURIBOR(0 \leftarrow 9)}$ | $\mu = 0,000000$ | $\sigma^2 = 0,000008$ | $\sigma = 0,002828$ |

| Risikofaktor 1 | Risikofaktor 2 | Bezeichnung | Kovarianz |
|---|---|---|---|
| Wachstumstempo des Abzinsfakt. EURIBOR $(0 \leftarrow 3)$ | Wachstumstempo des Abzinsfakt. EURIBOR $(0 \leftarrow 9)$ | $\sigma^2_{(\hat{q}_{EURIBOR(0 \leftarrow 3)} / \hat{q}_{EURIBOR(0 \leftarrow 9)})}$ | $\sigma^2 = 0,000004$ |

Die daraus resultierende Varianz-Kovarianz-Matrix und die Korrelationsmatrix lauten:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0{,}000005 & 0{,}000004 \\ 0{,}000004 & 0{,}000008 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}632455 \\ 0{,}632455 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus der Preisfunktion und den Risikofaktoren können nun die Sensitivitäten berechnet werden. Die Abzinsfaktoren wurden bereits im **??**:

$$\begin{aligned} \Delta_t^* &= P'_{\hat{q}_{(0 \leftarrow t)}} \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow t)}(t_0) \\ \Delta_1^* &= P'_{\hat{q}_{EURIBOR(0 \leftarrow 3)}} \cdot \hat{q}_{EURIBOR(0 \leftarrow 3)}(t_0) = N \cdot \hat{q}_{EURIBOR(0 \leftarrow 3)} = 1000000 \cdot 0,995025 = 995025 \\ \Delta_2^* &= P'_{\hat{q}_{EURIBOR(0 \leftarrow 9)}} \cdot \hat{q}_{EURIBOR(0 \leftarrow 9)}(t_0) = \\ &= -N \cdot (1 + i_{FRA}(3 \rightarrow 9)) \cdot \hat{q}_{EURIBOR(0 \leftarrow 9)} = 1000000 \cdot (1 + 0,0348) \cdot 0,977995 = -979126,61 \end{aligned}$$

Der Vektor der Senisitivitäten kann nun gebildet werden:

[3] üblich sind Laufzeiten von 1 Woche und 1,3,6,12 Monaten)

$$\Delta^* = \begin{pmatrix} 995025,00 \\ -979126,61 \end{pmatrix}, \Delta^{*T} = \begin{pmatrix} 995025,00 & -979126,61 \end{pmatrix}$$

Das $VaR(1,99\%)$ kann durch die bekannte Formel der Varianz-Kovarianz-Methode berechnet werden:

$$Var(t,p) = \sqrt{\Delta^{*T}\Sigma\Delta^*} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(1-p)$$

$$VaR(10,99\%) = \sqrt{\begin{pmatrix} 995025,00 & -979126,61 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}000005 & 0{,}000004 \\ 0{,}000004 & 0{,}000008 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 995025,00 \\ -979126,61 \end{pmatrix}} \cdot \sqrt{1} \cdot F^{-1}(0,01) =$$
$$= -5110,47$$

Das Risiko beträgt -5110,47 EUR.

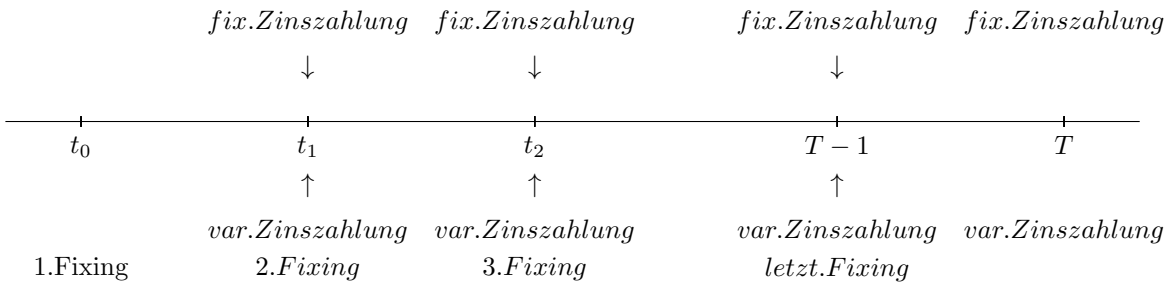
Auf die Berechnung mit Hilfe der Korrelationsmatrix wird verzichtet, das Ergebnis ist nahezu dasselbe.

## 3.7 Risiko von Zinsswaps

### 3.7.1 Plain Vanilla Swaps

Ausgangspunkt der Risikoberechnung ist die Preisfunktion des Plain Vanilla Swaps. Wir betrachten einen Payer Swap, d.h. man zahlt feste Zinsen und erhält variable Zinsen. Es wird zum Zeitpunkt $t_0$ eine Vereinbarung über den Swapinssatzes $i_{SWAP}$ und die Höhe des Nominalwertes N getroffen. Im Zeitpunkt $t_0$ erfolgt das erste Fixing des Referenzzinssatzes ($i_{REF}(t_0 \to t_1)$) und es erfolgen am Ende der Zinsperiode $t_1$ die ersten Zinszahlungen. Zum Zeitpunkt $t_1$ wird wiederum der Referenzzinssatz gefixt ($i_{REF}(t_1 \to t_2)$) und am Ende der zweiten Zinsperiode die Zinszahlungen durchgeführt. Die letzte Zinsperiode dauert vom Zeitpunkt $T-1$ bis zum Zeitpunkt $T$, der gefixte Referenzzinssatz ($i_{REF}(T-1 \to T)$) bestimmt die letzten Zinszahlungen zum Zeitpunkt $T$.

In der nachfolgenden Grafiken sind die Zinszahlungen eines Plain Vanilla Swaps dargestellt:




Der Barwert zum Bewertungstag $t_0 = 0$ eines Plain Vanilla Swaps erfolgt mit Hilfe der Preisfunktion. die beide Bestandteile des Swaps vereinigt. Der Barwert der Festzinsseite $BW_0(Z_{fix})$ entspricht dem Barwert einer festverzinslichen Anlage. Der Barwert der variablen Seite $BW_0(Z_{var})$ folgt der Bewertung eines Floaters (FRN).

$$P_0 = BW_0 = BW_0(Z_{fix}) + BW_0(Z_{var})$$

$$BW_0(Z_{fix}) = N \cdot (i_{SWAP}) \sum_{j=1}^{T-1} \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow j)} + N \cdot (1 + i_{SWAP}) \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow T)}$$

$$BW_0(Z_{var}) = N \cdot \sum_{j=1}^{T-1} (i_{real}(j-1 \to j)) \cdot \hat{q}_{(0 \leftarrow j)} + N \cdot (1 + i_{real}(T-1 \to T)) \cdot \hat{q}_{(}0 \leftarrow T)$$

Wenn der reale Zinssatz (Referenzzinssatz) der gleichen Zinskurve wie die Abzinsfaktoren entspringt und der Referenzzinssatz keinen Aufschlag $\Delta$ enthält gilt nach Abschnitt 2.9:

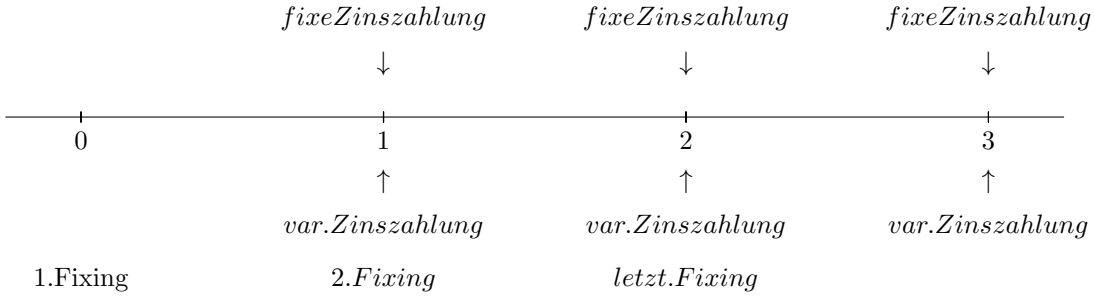
$$BW_0(Z_{var}) = N$$

$$P_0 = N \cdot (i_{SWAP}) \sum_{j=1}^{T-1} \hat{q}_{(0\leftarrow j)} + N \cdot (1 + i_{SWAP}) \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow T)} - N$$

Risikofaktoren sind die Abzinsfaktoren $\hat{q}_{(0\leftarrow j)}$, $j = 1, 2, \ldots t, \ldots T$.

Beispiel aus dem vorangegangenen Abschnitt:

Es ist das Risiko eines Swap berechnet, deren Zinsperioden genau ein Jahr betragen. Die Laufzeit des Swaps sei 3 Jahre. Es handelt sich um einen Payer-Swap, d.h. man zahlt feste Zinsen und erhält variable Zinsen. Der Nominalwert des Swaps beträgt 100000 EUR. Der vereinbarte Festzinssatz betrage 5%. Als Referenzzinssatz wird der Zinssatz der Nullkupon-Zinskurve gewählt. Die nachfolgende Grafik zeigt die entsprechenden Zahlungen:




Zur Berechnung des Barwertes ziehen wir die Nullkuponzinssätze aus dem Unterabschnitt 1.5.2 heran.

| Restlaufzeit | Nullkuponzinssatz | Abzinsfaktoren |
|---|---|---|
| 1 Jahr | 0,0294 | 0,9714 |
| 2 Jahre | 0,0391 | 0,9262 |
| 3 Jahre | 0,0455 | 0,8750 |

Die Zinsen der Festzinsseite werden mit Hilfe des Nominalweres und dem Festzinssatz (Swapsatz) berechnet:

$$Z_{fix} = N \cdot i_{SWAP} = 100000 \cdot 0,05 = 5000$$

Die Festzinsen betragen für jede der Zinsperioden 5000 EUR .

Um die variable Seite für das 2. und 3. Fixing zu berechnen benötigen wir die zukünftigen Zinssätze. Für das erste Fixing (bzw. für die erste Zinsperiode) sind ist der variable Zinssatz bekannt und beträgt 2,94%. (vgl. dazu Abschnitt 2.9):

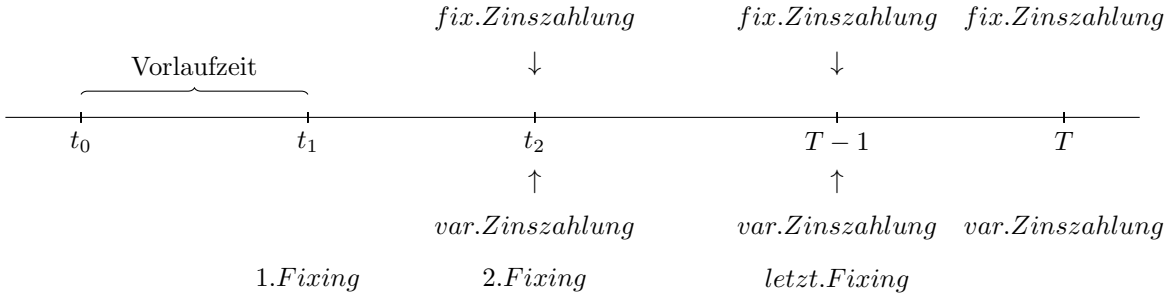
| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 0 | **0,0294** | 0,0391 | 0,0455 |
| 1 | | **0,0489** | 0,0536 |
| 2 | | | **0,0585** |

Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
Z_{(t_j,t_{j+1},var)} &= N \cdot i_{REF}(t_j \to t_{j+1}) \\
Z_{(0,1,var)} &= N \cdot i_{REF}(0 \to 1) = 100000 \cdot 0,0294 = 2940 \\
Z_{(1,2,var)} &= N \cdot i_{REF}(1 \to 2) = 100000 \cdot 0,0489 = 4890 \\
Z_{(2,3,var)} &= N \cdot \frac{i_{REF}(2 \to 3)}{} = 100000 \cdot 0,0585 = 5850
\end{aligned}
$$

### 3.7.2 Forward Swaps

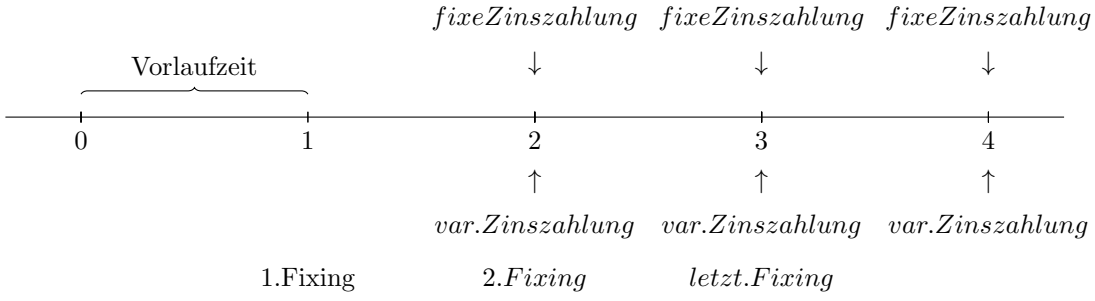
Ein Forward-Swap unterscheidet sich vom Plain Vanilla Swap dadurch, dass der eigentliche Swap erst nach einer Vorlaufzeit beginnt. In der nachfolgenden Grafik ist noch einmal die Periodisierung eines Forwardswaps dargestellt:



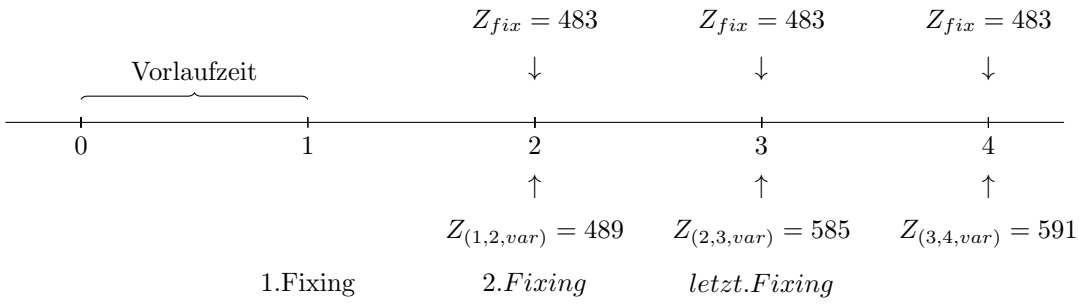

Die Risikoberechnung ist analog zum Vorgehen beim Plain Vanilla Swap vorzunehmen. Es ist nur zu beachten, dass in der Vorlaufzeit keine Zinszahlungen anfallen. Betrachten wir nun das Beispiel aus dem Abschnitt 2.7:

**Beispiel:**

Es wird das Risiko eines Forward-Swap berechnet, deren Zinsperioden genau ein Jahr betragen, auch die Vorlaufzeit ist ganzjährig (hier 1 Jahr). Die Laufzeit des Swaps betrage 4 Jahre (inklusive der Vorlaufzeit). Es handelt sich um einen Payer-Swap, d.h. man zahlt feste Zinsen und erhält variable Zinsen. Der Nominalwert des Swaps beträgt 10000 EUR. Der vereinbarte Festzinssatz (der Swapsatz) betrage wiederum $4,83\%$. Als Referenzzinssatz wird die Nullkupon-Zinskurve gewählt. Die nachfolgende Grafik zeigt die entsprechenden Zahlungen:




Oder mit dem konkreten Zinszahlungen:




Zur Berechnung des Barwertes ziehen wir die Nullkuponzinssätze aus dem Unterabschnitt 1.5.2 bzw. aus dem vorherigen Unterabschnitt 3.7.1 heran. Wie bei einem Plain-Vanilla-Swap benötigen wir auch die Nullkuponzinssätze und Abzinsfaktoren diesmal mit einer Restlaufzeit von 2-4 Jahren.

Im ersten Schritt wird der Barwert des **Festzinsbonds** (Zinsen + Rückzahlung des Nominalwertes berechnet:

$$\begin{aligned} BW_{0,fix} &= N \cdot (i_{SWAP} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} + i_{SWAP} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} + i_{SWAP} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} + \hat{q}_{(0\leftarrow 4)}) = \\ &= 10000 \cdot (0,0483 \cdot 0,9262 + 0,0483 \cdot 0,8750 + 0,0483 \cdot 0,8262 + 0,8262) = \\ &= 447,35 + 422,63 + 399,05 + 8262 = 9531,03 \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt der Barwert des entsprechenden **Floaters**: [4]

$$BW_{0,var} = N \cdot (\frac{i_{(1\to 2)}}{q_{(0\to 2)}} + \frac{i_{(2\to 3)}}{q_{(0\to 3)}} + \frac{i_{(3\to 4)}}{q_{(0\to 4)}} + \frac{1}{q_{(0\to 4)}})$$

Analog zum vorherigen Beispiel nehmen wir folgende Transformationen vor:

$$\begin{aligned} &\frac{i_{(1\to 2)}}{q_{(0\to 2)}} \\ &\frac{i_{(2\to 3)}}{q_{(0\to 3)}} = \frac{i_{(2\to 3)}}{q_{(0\to 2)} \cdot q_{(2\to 3)}} = \frac{q_{(2\to 3)} - 1}{q_{(0\to 2)} \cdot q_{(2\to 3)}} = \\ &\qquad = \frac{1}{q_{(0\to 2)}} - \frac{1}{q_{(0\to 2)} \cdot q_{(2\to 3)}} = \frac{1}{q_{(0\to 2)}} - \frac{1}{q_{(0\to 3)}} \\ &\frac{i_{(3\to 4)}}{q_{(0\to 4)}} = \frac{i_{(3\to 4)}}{q_{(0\to 2)} \cdot q_{(2\to 3)} \cdot q_{(3\to 4)}} = \frac{q_{(3\to 4)} - 1}{q_{(0\to 2)} \cdot q_{(2\to 3)} \cdot q_{(3\to 4)}} = \\ &\qquad = \frac{1}{q_{(0\to 2)} \cdot q_{(2\to 3)}} - \frac{1}{q_{(0\to 2)} \cdot q_{(2\to 3)} \cdot q_{(3\to 4)}} = \frac{1}{q_{(0\to 3)}} - \frac{1}{q_{(0\to 4)}} \\ &\frac{1}{q_{(0\to 4)}} = \frac{1}{q_{(0\to 2)} \cdot q_{(2\to 3)} \cdot q_{(3\to 4)}} = \frac{1}{q_{(0\to 4)}} \end{aligned}$$

Alle Ausdrücke der Formel der Barwertberechnung werden nun entsprechend substituiert:

$$\begin{aligned} BW_{0,var} &= N \cdot (\frac{i_{(1\to 2)}}{q_{(0\to 2)}} + \frac{1}{q_{(0\to 2)}} - \frac{1}{q_{(0\to 3)}} + \frac{1}{q_{(0\to 3)}} - \frac{1}{q_{(0\to 4)}} + \frac{1}{q_{(0\to 4)}}) \\ BW_{0,var} &= N \cdot (\frac{i_{(1\to 2)}}{q_{(0\to 2)}} + \frac{1}{q_{(0\to 2)}}) \end{aligned}$$

[4] sowohl Festzinsbonds als auch Floater haben die Besonderheit, dass die Zinszahlungen erst nach der Vorlaufzeit von einem Jahr geleistet werden.

Verallgemeinert gilt:

$$BW_{0,var} = BW_{0,var} N \cdot (\frac{i_{(0\to t*)}}{q_{(0\to t*}} + \frac{1}{q_{(0\to t*)}})$$

Dabei bedeutet t* die Vorlaufzeit.

Nun ist zu beachten, dass die Nominalwerte nicht ausgetauscht werden. Deshalb müssen die Barwerte des Festzinsbonds und des Floaters korrigiert werden:

$$BW_{0,fix} = N \cdot (i_{SWAP} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} + i_{SWAP} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} + i_{SWAP} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)} + \hat{q}_{(0\leftarrow 4)}) =$$
$$BW_{0,var} = N \cdot (\frac{i_{(1\to 2)}}{q_{(0\to 2)}} + \frac{1}{q_{(0\to 2)}} - \frac{1}{q_{(0\to 4)}})$$

Nun kann das Risiko für den Forward Swap berechnet werden:

Die Preisfunktion lautet:

$$P_0 = BW_0 = BW_{ForwSwap,0}(fix) - BW_{ForwSwap,0}(var) =$$
$$P_0 = BW_0 = N \cdot (i_{SWAP} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} + i_{SWAP} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} + i_{SWAP} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)}) - N \cdot (\frac{i_{(1\to 2)}}{q_{(0\to 2)}} + \frac{1}{q_{(0\to 2)}} - \frac{1}{q_{(0\to 4)}}) =$$
$$P_0 = BW_0 = N \cdot (i_{SWAP} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)} + i_{SWAP} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)} + i_{SWAP} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)}) - N \cdot (i_{(1\to 2)} \cdot \hat{q}_{(0\to 2)} + \hat{q}_{(0\to 2)} - \hat{q}_{(0\to 4)})$$

Damit sind folgende Risikofaktoren zu berücksichtigen: $\hat{q}_{(0\leftarrow t)}$ für $t = 2, 3, 4$.

$$(P_0)'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 2)}} = N \cdot (i_{SWAP} - i_{(1\to 2)} + 1)$$
$$(P_0)'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 3)}} = N \cdot i_{SWAP}$$
$$(P_0)'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 4)}} = N \cdot (i_{SWAP} - 1)$$

Die daraus abgeleiteten Sensitivitäten sind:

$$\Delta^*_t = P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow t)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow t)}(t = 0)$$
$$\Delta^*_2 = P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 2)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)}(t = 0) = N \cdot (i_{SWAP} - i_{(1\to 2)} + 1) \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 2)}(t_0) =$$
$$= 10000 \cdot (0,0483 + 1) \cdot 0,9262 = 9709,35$$
$$\Delta^*_3 = P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 3)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 3)}(t = 0) = N \cdot i_{SWAP} \hat{q}_{(0\leftarrow 3)}(t_0) =$$
$$= 10000 \cdot 0,0483 \cdot 0,8370 = 404,27$$
$$\Delta^*_4 = P'_{\hat{q}_{(0\leftarrow 4)}} \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)}(t_0) = N \cdot (i_{SWAP} - 1) \cdot \hat{q}_{(0\leftarrow 4)}(t_0) =$$
$$= 10000 \cdot (0,0483 + 1) \cdot 0,8262 = 8661,05$$

Es können nun die Vektoren der Sensitivitäten gebildet werden.

$$\Delta^* = \begin{pmatrix} 9709,35 \\ 404,27 \\ 9709,35 \end{pmatrix}, \Delta^{*T} = \begin{pmatrix} 9709,35 & 404,27 & 8661,05 \end{pmatrix}$$

Das $VaR_{fix}(10, 99\%)$ kann durch die bekannte Formel der Varianz-Kovarianz-Methode berechnet werden:

$$Var(t,p) = \sqrt{\Delta^{*T} \Sigma \Delta^*} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(1-p)$$

$$VaR_{fix}(10,99\%) = \sqrt{\begin{pmatrix} 9709,35 & 404,27 & 8661,05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,000008 & 0,000028 & 0,000003 \\ 0,000005 & 0,000003 & 0,000030 \\ 0,000005 & 0,000003 & 0,000030 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9709,35 \\ 404,27 \\ 8661,05 \end{pmatrix}} \cdot \sqrt{10} \cdot F^{-1}(0,01) =$$

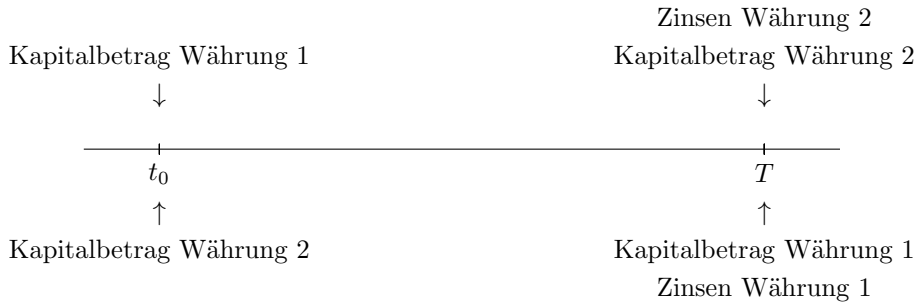
$$= 535,18$$

Das Risiko des Swap bei einer Haltedauer von 10 Tagen beträgt 535,18 EUR.

## 3.8 Risiko von Währungsswaps

Währungsswaps sind ein Tauschgeschäft, bei den die Vertragspartner sich verpflichten, zu einem bestimmten Zeitpunkt zwei Beträge in unterschiedlichen Währungen inklusiv der angefallenen Zinsen auszutauschen. Die Zinsen können fix oder variabel sein und in einer Zahlung zum Rücktauschtermin oder wie bei einem Swap üblich, zu mehreren Zinsterminen stattfinden.

Betrachten wir zunächst den einfachen Fall: die einzige Zinszahlungen erfolgen am Rücktauschtag der Beträge:




Bezeichnungen:

| | |
|---|---|
| $t_0$ | Vertagsabschluss |
| $T$ | Ende der Laufzeit |

Der Barwert berechnet sich nun aus den abgezinsten Beträgen der eingegangen Zahlungen (in Währung 1) und den geleisteten Zahlungen (in Währung 2) mit negativem Vorzeichen. Die abgezinsten Beträge der geleisteten Zahlungen sind in Währung 1 (in die Heimatwährung) umzurechnen. Dabei wird der Wechselkurs zum Zeitpunkt $t = 0$ genutzt ($wk_0(1,2)$=

$$BW_0(1) = K_0^*(1) - K_0^*(2) \cdot wk_0(1,2)$$

Dabei sind:

$$K_0^*(1) = K_0(1) + Z_0(1)$$
$$K_0^*(2) = K_0(2) + Z_0(2)$$

mit

$$Z_0(1) = Z_1(1) \cdot \hat{q}_{1,(0\leftarrow 1)}$$
$$K_0(1) = K(1) \cdot \hat{q}_{1,(0\leftarrow 1)}$$
$$Z_0(2) = Z_1(2) \cdot \hat{q}_{2,(0\leftarrow 1)}$$
$$K_0(2) = K(2) \cdot \hat{q}_{2,(0\leftarrow 1)}$$

und

$$Z_1(1) = K(1) \cdot i_1(0 \to 1)$$
$$Z_1(2) = K(2) \cdot i_2(0 \to 1)$$

Eingesetzt in die Formel zur Barwertberechnung ergibt sich:

$$\begin{aligned} BW_0(1) &= K_0^*(1) - K_0^*(2) \cdot wk_0(1,2) = \\ &= K_0(1) + Z_0(1) - (K_0(2) + Z_0(2)) \cdot wk_0(1,2) = \\ &= (K(1) + Z_1(1)) \cdot \hat{q}_{1,(0\leftarrow 1)} - (K_1(2) + Z_1(2)) \cdot wk_0(1,2) \cdot \hat{q}_{2,(0\leftarrow 1)} \\ &= (K(1) + K(1) \cdot i_1(0 \to 1)) \cdot \hat{q}_{1,(0\leftarrow 1)} - (K(2) + K(2) \cdot i_2(0 \to 1)) \cdot wk_0(1,2) \cdot \hat{q}_{2,(0\leftarrow 1)} \end{aligned}$$

Daraus wird sichtbar, dass die Risikofaktoren die Abzinsfaktoren $\hat{q}_{1,(0\leftarrow 1)}$ und $\hat{q}_{2,(0\leftarrow 1)}$ sind.

Der Barwert wird in Währung 1 ausgedrückt.

In analoger Weise kann der Barwert in Währung 2 berechnet werden:

$$\begin{aligned} BW_0(2) &= K_0^*(2) - K_0^*(1) \cdot wk_0(2,1) = \\ &= (K(2) + K(2) \cdot i_2(0 \to 1)) \cdot \hat{q}_{2,(0\leftarrow 1)} - (K(1) + K(1) \cdot i_1(0 \to 1)) \cdot wk_0(2,1) \cdot \hat{q}_{1(0\leftarrow 1)} \end{aligned}$$

**Beispiel 1 aus ??**

Es wird im Jahr $t_0$ vereinbart 1000000 EUR ($K(EUR)$) zum aktuellen Wechselkurs $wk_{t_0}(EUR, USD) = 0,84\frac{EUR}{USD}$[5] gegen USD zu tauschen.[6] Damit erhält der Zahler von 1000000 EUR 1190476,19 USD ($K(USD)$). Nach Ablauf eines Jahres wird der erhaltene Dollarbetrag zum gleichen Wechselkurs $wk_T(EUR, USD) = 0,84\frac{EUR}{USD}$ getauscht. Die Zinssätze (hier Nullkuponzinssätze) in jedem Währungsraum betragen:

$i_{EUR(t_0\to 1)} = 0,04$
$i_{USD(t_0\to 1)} = 0,05$

Die Nullkuponzinsen mit einer Restlaufzeit von 1 Jahr sind:

[5] oder $wk_{t_0}(USD, EUR) = 1,19047619\frac{USD}{EUR} \approx 1,19\frac{USD}{EUR}$
[6] für 1 USD erhält man 0,84 EUR bzw. für 1 EUR erhält man etwa 1,19 USD

| Währung | Nullkuponzinssatz | Abzinsfaktoren |
|---|---|---|
| EUR | $0,0294$ | $0,971439674$ |
| USD | $0,035$ | $0,966183575$ |

Zum Vertragsende $t = 1$ erfolgt der Rücktausch der Kapitalbeträge zum vereinbarten Wechselkurs $wk_T(EUR, USD) = 0,84\frac{EUR}{USD}$ und der Zinsen . Die Vertragspartner verfügen nun wieder über die Kapitalbeträge in der jeweiligen Heimatwährung, die - wie oben dargestellt - identisch mit den Kapitalbeträgen zu Beginn des Tauschgeschäftes sind:

$$K_1(USD) = 1190476,19\ USD$$
$$K_1(EUR) = 1000000\ EUR$$

Darüber hinaus erhalten sie die aufgelaufen Zinsen in der gleichen Währung:

$$Z_1(USD) = 59523,81\ USD$$
$$Z_1(EUR) = 40000,00\ EUR$$

Grafisch lassen sich die Finanzströme des Beispiels 1 folgendermaßen darstellen:




Aus Sicht des Zahlers des Kapitalbetrages in EUR bei Vertragsbeginn ergibt sich folgender Barwert:

$$\begin{aligned}
BW_0(EUR) &= (K(EUR) + K(EUR) \cdot i_{EUR}(0 \to 1)) \cdot \hat{q}_{EUR,(0\leftarrow 1)} - \\
&\quad - (K(USD) + K(USD) \cdot i_{USD}(0 \to 1)) \cdot wk_0(EUR, USD) \cdot \hat{q}_{USD(0\leftarrow 1)} = \\
&= (1000000 + 1000000 \cdot 0,04) \cdot 0,971439674 - (1190476,19 + 1190476,19 \cdot 0,05) * 0,84 \cdot 0,966183575 = \\
&= (1000000 + 40000) \cdot 0,971439674 - (1190476,19 + 59523,81) \cdot 0,05) * 0,84 \cdot 0,966183575 = \\
&= -4195,49\ EUR
\end{aligned}$$

Auf der Grundlage der Barwertberechnung erfolgt nun die Bestimmung des Risikos. Risikofaktoren sind die Abzinsfaktoren $\hat{q}_{EUR,(t_0\leftarrow T)}$ und $\hat{q}_{USD,(t_0\leftarrow T)}$ . Zur Risikoberechnung benötigt man die Varianz-Kovarianz-Matrix und die Sensitivitäten:

$$\begin{aligned}
\Delta^*_{EUR} &= (K(EUR) + K(EUR) \cdot i_{EUR}(0 \to 1)) \cdot \hat{q}_{EUR,(0\leftarrow 1)} = \\
&= (1000000 + 1000000 \cdot 0,04) \cdot 0,971439674 = 1010297,26 \\
\Delta^*_{USD} &= (K(USD) + K(USD) \cdot i_{USD}(0 \to 1)) \cdot wk_0(EUR, USD) \cdot \hat{q}_{USD(0\leftarrow 1)} = \\
&= (1190476,19 + 1190476,19 \cdot 0,05) * 0,84 \cdot 0,966183575 = 1014492,75
\end{aligned}$$

Die Vektoren der Sensitivitäten lauten:

$$\Delta^* = \begin{pmatrix} 1010297,2 \\ 1014492,75 \end{pmatrix}, \Delta^{*T} = \begin{pmatrix} 1010297,2 & 1014492,75 \end{pmatrix}$$

Die Varianz-Kovarianz-Matrix ist (vgl. dazu Abschnitt 4.1):

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0{,}000009 & 0{,}000005 \\ 0{,}000005 & 0{,}000040 \end{pmatrix}$$

daraus kann nun das Risiko berechnet werden:

$$Var(t,p) = \sqrt{\Delta^{*T}\Sigma\Delta^*} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(1-p)$$

$$VaR_{var}(1,99\%) = \sqrt{\begin{pmatrix} 1010297,2 & 1014492,75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}000009 & 0{,}000005 \\ 0{,}000005 & 0{,}000040 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1010297,2 \\ 1014492,75 \end{pmatrix}} \cdot \sqrt{10} \cdot F^{-1}(0,01) =$$
$$= -12855,46$$

Das Risiko beträgt 12855,46 EUR.

Soll zugelassen werden, dass der Kapitalbetrag von 1000000 EUR am Laufzeitende nicht zum Wechselkurs $wk_0(EUR,USD) = 0,84$ sondern zum Wechselkurs $wk_1(EUR,USD) = 0,88$ zurück getauscht werden, müssen die Sensitivitäten angepasst werden. Der zurück zu tauschende Kapitalbetrag in USD lautet nun $K_1(USD) = K_1(EUR) \cdot wk_1(EUR,USD) = K(EUR) \cdot wk_1(EUR,USD) = 1000000 \cdot \frac{1}{0,88} = 1000000 \cdot 1,13636364 = 1136363,64$. Auch die aufgelaufene Zinsen werden zum Wechselkurs $wk_1(EUR,USD) = 1,13636364$ getauscht.

$$K_0^*(EUR) = K_0(EUR) + Z_0(EUR) = (K_1(EUR) + Z_1(EUR)) \cdot \hat{q}_{EUR,(0\leftarrow 1)} = 1040000 \cdot 0,9714 = 1010297,26$$
$$K_0^*(USD) = K_0(USD) + Z_0(USD) = (K_1(USD) + Z_1(USD)) \cdot \hat{q}_{USD,(0\leftarrow 1)} = 1195887,45 \cdot 0,9662 = 1155466,81$$

Daraus lassen sich die Barwerte berechnen:

$$\begin{aligned} BW_0(EUR) &= (K_0(EUR) + K_0(EUR) \cdot i_{EUR}(0 \to 1)) \cdot \hat{q}_{EUR,(0\leftarrow 1)} - \\ &\quad - (K_0(USD) + K_0(USD) \cdot i_{USD}(0 \to 1)) \cdot wk_0(EUR,USD) \cdot \hat{q}_{USD(0\leftarrow 1)} = \\ &= K_0^*(EUR) - K_0^*(USD) \cdot wk_0(EUR,USD) = \\ &= 1010297,26\ EUR - 1155446,81\ USD \cdot 0,84\ \frac{EUR}{USD} = 39721,94\ EUR \end{aligned}$$

Aus Sicht des Zahlers des Kapitalbetrages in EUR bei Vertragsbeginn ergibt sich ein Barwert von 39721,94 EUR.

$$\begin{aligned}
\Delta^*_{EUR} &= (K_0(EUR) + K_0(EUR) \cdot i_{EUR}(0 \to 1)) \cdot \hat{q}_{EUR,(0\leftarrow 1)} = \\
&= (1000000 + 1000000 \cdot 0,04) \cdot 0,971439674 = 1010297,26 \\
\Delta^*_{USD} &= (K_0(USD) + K_0(USD) \cdot i_{USD}(0 \to 1)) \cdot wk_0(EUR,USD) \cdot \hat{q}_{USD(0\leftarrow 1)} = \\
&= (1136363,64 + 1190476,19 \cdot 0,05) * 0,84 \cdot 0,966183575 = 970.575,32
\end{aligned}$$

Die Vektoren der Sensitivitäten lauten:

$$\Delta^* = \begin{pmatrix} 1010297,26 \\ 970.575,32 \end{pmatrix}, \Delta^{*T} = \begin{pmatrix} 1010297,26 & 970.575,32 \end{pmatrix}$$

und

$$Var(t,p) = \sqrt{\Delta^{*T}\Sigma\Delta^*} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(1-p)$$

$$\begin{aligned}
VaR_{var}(1,99\%) &= \sqrt{\begin{pmatrix} 1010297,2 & 970.575,32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}000009 & 0{,}000005 \\ 0{,}000005 & 0{,}000040 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1010297,26 \\ 970.575,32 \end{pmatrix}} \cdot \sqrt{10} \cdot F^{-1}(0,01) = \\
&= -35096,31
\end{aligned}$$

Das Risiko beträgt bei einer Haltedauer von 10 Tagen 35096,31 EUR.

Es werden nun die Risiken im Falle von mehren Zinszahlungen betrachtet. Wir beschränken uns hier auf den Fall fester Zinszahlungen in beiden Währungen:

$$\begin{aligned}
Z_j(1) &= K_0(1) \cdot i_{fix}(1) \\
Z_j(2) &= K_0(2) \cdot i_{fix}(2) \\
j &= 1,2,....T
\end{aligned}$$

Die abgezinsten Zahlungen beider Vertragsseiten betragen:

$$\begin{aligned}
K^*_0(1) &= \sum_{j=1}^{T-1} Z_j(1) \cdot \hat{q}_{1,(0\leftarrow j)} + (K_0(1) + Z_T(1)) \cdot \hat{q}_{1,0\leftarrow T)} \\
K^*_0(2) &= \sum_{j=1}^{T-1} Z_j(2) \cdot \hat{q}_{2,(0\leftarrow j)} + (K_0(2) + Z_T(2)) \cdot \hat{q}_{(2,0\leftarrow T)}
\end{aligned}$$

Es kann nun der Barwert des Gesamtgeschäftes aus der Sicht des Vertragspartners mit der Heimatwährung 1 berechnet werden. Die ausgehenden Zahlungen erfolgen in Fremdwährung und sind identisch mit den ausgehenden Zahlungen der jeweils andere Vertragsseite. Folglich sind die Größen $K^*_0(1)$ in die andere Währung mit Hilfe der Wechselkurse zum Zeitpunkt $t = 0$ umzurechnen.

$$K^*_{2,0}(1) = K^*_0(2) \cdot wk_0(1,2)$$

Der Barwert für die Währung 1 berechnet sich nun aus den abgezinsten Beträgen der eingegangen Zahlungen (in Währung 1) und den geleisteten Zahlungen (in Währung 2) mit negativem Vorzeichen. Die abgezinsten Beträge der geleisteten Zahlungen sind in Währung 1 (in die Heimatwährung) umzurechnen. Dabei wird der Wechselkurs zum Zeitpunkt $t = 0$ genutzt ($wk_0(1,2)$=;

$$\begin{aligned} BW_0(1) &= K_0^*(1) - K_{2,0}^*(1) = K_0^*(1) - K_0^*(2) \cdot wk_0(1,2) \\ &= \sum_{j=1}^{T-1} Z_j(1) \cdot \hat{q}_{1,(0\leftarrow j)} + (K_0(1) + Z_T(1)) \cdot \hat{q}_{1,0\leftarrow T)} - \\ &- (\sum_{j=1}^{T-1} Z_j(2) \cdot \hat{q}_{2,(0\leftarrow j)} + (K_0(2) + Z_T(2)) \cdot \hat{q}_{(2,0\leftarrow T)}) \cdot wk_0(1,2) \end{aligned}$$

Es wird nun deutlich, dass Risikofaktoren die Abzinsfaktoren $\hat{q}_{1,(0\leftarrow j)}$ und $\hat{q}_{2,(0\leftarrow j)}$ für j = 1,2,...,T.

Aus Sicht des Vertragspartners mit Heimatwährung 2 lautet der Barwert:

$$BW_0(2) = K_0^*(2) - K_{1,0}^*(2) = K_0^*(2) - K_0^*(1) \cdot wk_0(2,1)$$

**Beispiel 2 aus ??**

Es wird im Jahr $t = 0$ vereinbart 1000000 EUR zum aktuellen Wechselkurs $wk_0(EUR, USD) = 0,84\frac{EUR}{USD}$ gegen USD zu tauschen. Damit erhält der Zahler von 1000000 EUR 1190476,19 USD. Nach Ablauf zweier Jahre wird der erhaltene Dollarbetrag zum gleichen Wechselkurs $wk_0(EUR, USD) = 0,84\frac{EUR}{USD}$ wieder zurückgetauscht. Es existieren zwei Zinszahlungstermin $t = 1$ und $t = 2$.

Wir beschränken uns auf den Fall fixed/fixed, d.h. bei Seiten zahlen feste Zinsen.

Hinsichtlich der Zinsen wird vereinbart: Der Dollarbetrag wird zum festen Jahreszinssatz von $5,0\%$ verzinst, die Zinsen in USD werden an den ursprünglichen Besitzer des Dollarbetrages ausgezahlt. Der EUR-Betrag wird ebenfalls zum festen Jahreszins von $4,0\%$ verzinst und an den ursprünglichen EURO-Besitzer zu den Zinsterminen in EUR ausgezahlt.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ gelten folgende Marktbedingungen:

$i_{fix}(EUR) = 0,04$
$i_{fix}(USD) = 0,05$
$wk_0(EUR, USD) = 0,84\frac{EUR}{USD}$
$i_{EUR,real(0\rightarrow 1)} = 0,0294$
$\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 1)} = 0,9714$
$i_{EUR,real(0\rightarrow 2)} = 0,0391$
$\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 2)} = 0,9262$
$i_{USD,real(0\rightarrow 1)} = 0,035$
$\hat{q}_{USD(0\leftarrow 1)} = 0,9662$
$i_{USD,real(0\rightarrow 2)} = 0,04$
$\hat{q}_{USD(0\leftarrow 2)} = 0,9246$

Zur Berechnung des Risikos werden zusätzlich die Varianzen und Kovarianzen der Risikofaktoren ( der Abzinsfaktoren $\hat{q}_{EUR,(0\leftarrow j)}$ und $\hat{q}_{USD,(0\leftarrow j)}$ für j = 1,2 benötigt. Die Varianzen und Kovarianzen sind in der nachfolgende Tabelle zusammengestellt(vgl. dazu Abschnitt 4.1):

| | $\hat{q}_{EUR,(0\leftarrow 1)}$ | $\hat{q}_{EUR,(0\leftarrow 2)}$ | $\hat{q}_{USD,(0\leftarrow 1)}$ | $\hat{q}_{USD,(0\leftarrow 2)}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\hat{q}_{EUR,(0\leftarrow 1)}$ | 0,000009 | 0,000005 | 0,000005 | 0,000008 |
| $\hat{q}_{EUR,(0\leftarrow 2)}$ | 0,000005 | 0,000040 | 0,000006 | 0,000012 |
| $\hat{q}_{USD,(0\leftarrow 1)}$ | 0,000005 | 0,000006 | 0,000024 | 0,000010 |
| $\hat{q}_{USD,(0\leftarrow 2)}$ | 0,000008 | 0,000012 | 0,000010 | 0,000028 |

Die Varianz-Kovarianz-Matrix ist:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0,000009 & 0,000005 & 0,000005 & 0,000008 \\ 0,000005 & 0,000040 & 0,000006 & 0,000012 \\ 0,000005 & 0,000006 & 0,000024 & 0,000010 \\ 0,000008 & 0,000012 & 0,000010 & 0,000028 \end{pmatrix}$$

Zunächst werden die Zinsen berechnet:

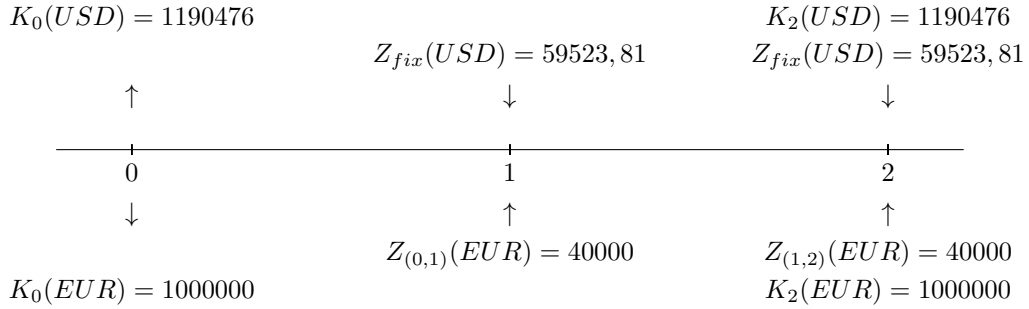
1. USD:

$$Z_{fix}(USD) = K_0(USD) \cdot i_{fix}(USD)$$
$$Z_{fix}(USD) = 1190476,19 \cdot 0,05 = 59523,81$$

2. EUR:

$$Z_{fix}(EUR) = K_0(EUR) \cdot i_{fix}(EUR)$$
$$Z_{fix}(EUR) = 1000000,00 \cdot 0,04 = 40000,00$$

Das Zahlungsprofil ist in der nachfolgenden Grafik abgebildet:




Der Barwert für die Vertragsseite mit Heimatwährung EUR lautet:

$$\begin{aligned} BW_0(EUR) = {} & Z_1(EUR) \cdot \hat{q}_{EUR,(0\leftarrow 1)} + (K_0(EUR) + Z_2(EUR)) \cdot \hat{q}_{EUR,(0\leftarrow 2)} - \\ & - (Z_1(USD) \cdot \hat{q}_{USD,(0\leftarrow 1)} + (K_0(USD) + Z_2(USD)) \cdot \hat{q}_{USD(0\leftarrow 2)}) \cdot wk_0(USD, EUR) = \\ & = 40000 \cdot 0,9714 + (1000000 + 40000) \cdot 0,9262 - \\ & - (59523,81 \cdot 0,9662 + (1190476,19 + 59523,81) \cdot 0,9246) \cdot 0,84 = -17036,00\ EUR \end{aligned}$$

Für den Barwert mit Heimatwährung USD gilt $BW_0(USD) = 20280,95$ USD bzw. umgerechnet in EUR 17036,00 EUR.

Die Sensitivitäten lauten:

$$\begin{aligned}
\Delta^*_{\hat{q}_{EUR,(0\leftarrow 1)}} &= Z_1(EUR) \cdot \hat{q}_{EUR,(0\leftarrow 1)} = \\
&= 40000 \cdot 0,9714 = 38856,00 \\
\Delta^*_{\hat{q}_{EUR,(0\leftarrow 2)}} &= (K_0(EUR) + Z_2(EUR)) \cdot \hat{q}_{EUR,(0\leftarrow 2)} = \\
&= (1000000 + 40000) \cdot 0,9262 = 963248,00 \\
\Delta^*_{\hat{q}_{USD,(0\leftarrow 1)}} &= -(Z_1(USD) \cdot \hat{q}_{USD,(0\leftarrow 1)}) \cdot wk_0(USD, EUR) = \\
&= -59523,81 \cdot 0,9662 \cdot 0,84 = -48310,00 \\
\Delta^*_{\hat{q}_{USD,(0\leftarrow 2)}} &= -(K_0(USD) + Z_2(USD)) \cdot \hat{q}_{USD(0\leftarrow 2)} \cdot wk_0(USD, EUR) = \\
&= -(1190476,19 + 59523,81) \cdot 0,9246 \cdot 0,84 = -970830,00
\end{aligned}$$

Die Vektoren der Sensitivitäten lauten:

$$\Delta^* = \begin{pmatrix} 38856,00 \\ 963248,00 \\ -48310,00 \\ -970830,00 \end{pmatrix}, \Delta^{*T} = \begin{pmatrix} 38856,00 & 963248,00 & -48310,00 & -970830,00 \end{pmatrix}$$

Es kann nun das Risiko des Geschäftes mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 99% und einer Haltedauer von einem Tag berechnet werden:

$$Var(t,p) = \sqrt{\Delta^{*T} \Sigma \Delta^*} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(1-p)$$

$$VaR_{var}(1,99\%) = \sqrt{\begin{pmatrix} 38856,00 & 963248,00 & -48310,00 & -970830,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,000009 & 0,000005 & 0,000005 & 0,000008 \\ 0,000005 & 0,000040 & 0,000006 & 0,000012 \\ 0,000005 & 0,000006 & 0,000024 & 0,000010 \\ 0,000008 & 0,000012 & 0,000010 & 0,000028 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 38856,00 \\ 963248,00 \\ -48310,00 \\ -970830,00 \end{pmatrix}} \cdot \sqrt{1} \cdot F^{-1}(0,01) = -14943,36$$

Das Risiko bei einer Haltedauer von einem Tag und einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 99% beträgt 14943,36 EUR. Bei einer Haltedauer von 10 Tagen erhöht sich das Risiko auf -47255,06 EUR

## 3.9 Risiko von Goldswaps

Ausgangspunkt für die Risikoberechnung sind die im Abschnitt 2.6 formulierte Darstellung der Preisfunktionen $P_{t_0}$:

$$P_{t_0}(W1) = K_{t_0}(W1) - BW_{t_0}(W1)$$

bzw.

$$P_{t_0}(W2) = K_{t_0}(W1) \cdot wk_{t_0}(W2/W1) - BW_{t_0}(W2)$$

Zunächst erfolgt die Berechnung des Risikos, wenn der Barwert in der Währung W1 bestimmt wird:

$$\begin{aligned}
P_{t_0}(W1) &= G \cdot P_{t_0}(GOLD, W1) - K_{t_0}(W1) \cdot (1 + i_{\frac{T-t_0}{360}}) \cdot \frac{1}{1 + i_{REAL,W1}(t_0 \to T)} \\
&= G \cdot P_{t_0}(GOLD, W1) - K_{t_0}(W1) \cdot (1 + i_{\frac{T-t_0}{360}}) \cdot q_{REAL}
\end{aligned}$$

Dabei sind:

| | |
|---|---|
| G | Goldvolumen |
| $P_{t_0}(GOLD, W1)$ | Goldpreis in Währung W1 |
| $K_{t_0}(W1)$ | Gegenwert für das Goldvolumen in Währung W1 zum Zeitpunkt $t = t_0$ |
| $i_{\frac{T-t_0}{360}}$ | unterjähriger Zinssatz zur Berechnung der Zinsen im Vertragszeitraum $[t_0, T]$ |
| $i_{\frac{T-t_0}{360}} \cdot \frac{1}{1+i_{REAL,W1}(t_0 \to T)} = q_{REAL}$ | Abzinsfaktor für den Vertragszeitraum $[t_0, T]$ |

Es wird deutlich, dass ausschließlich der Abzinsfaktor $q_{REAL} = i_{\frac{T-t_0}{360}} \cdot \frac{1}{1+i_{REAL,W1}(t_0 \to T)}$ als Risikofaktor anzusehen ist. Zur Risikoberechnung wird die Varianz des Wachstumstempo des Abzinsfaktors $q_{REAL}$ benötigt.
Die Sensitivität $\Delta^*_{q_{REAL}}$ kann folgendermaßen berechnet werden:

$$\Delta^*_{q_{REAL}} = P'_{t_0}(W1) \cdot q_{REAL}(t_0) = -K_{t_0}(W1) \cdot (1 + i_{\frac{T-t_0}{360}}) \cdot q_{REAL}(t_0)$$

Daraus ergibt sich ein Risiko bei einer Haltedauer von t Tagen und einer Irrtumswahrscheinlichleit von $p\%$:

$$VaR_P(t_0, p) = \Delta^*_{q_{REAL}} \cdot \sigma_q \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}_{X_{norm}}(p)$$

Beispiel 2 aus **??**:

Zum Zeitpunkt $t = t_0$ wird ein Goldvolumen von 5000 Unzen zum aktuellen Goldpreis $P_{t_0}(GOLD, EUR) = 1495,20 \frac{EUR}{Feinunze\ Gold}$ getauscht. Am Ende des Vertragszeitraumes nach einem Monat hat der ursprüngliche Besitzer des Goldes den Betrag von $K_{t_0} = G \cdot P_{t_0}(GOLD, EUR) = 5000 \cdot 1495,20 = 7476000$ EUR und die aufgelaufenen Zinsen $K_{t_0} \cdot i_{\frac{T-t_0}{360}})$ bei einem jährlichen Nominalzinssatz von $i = 0,0275$ zu zahlen $(Z = 7476000 \cdot \frac{0,0275}{12} = 17132,50)$. Der gesamte Rückzahlungsbetrag beträgt:

$$K_T(EUR) = K_{t_0}(EUR) \cdot (1 + i_{\frac{T-t_0}{360}}) = 7476000 \cdot (1 + \frac{0,0275}{12}) = 7493132,50$$

Die Finanzströme aus der Sicht der Zentralbank sind in der folgenden Grafik dargestellt:




Zur Berechnung des Wertes der Preisfunktion zum Zeitpunkt $t = t_0$ ist der Betrag von 7493132,50 EUR mit dem Realzinssatz abzuzinsen.
Die Sensitivität des einzigen Risikofaktors $q_{REAL}$ ist:

$$\Delta^*_{q_{REAL}} = P'_{t_0}(W1) \cdot q_{REAL}(t_0) = -K_{t_0}(W1) \cdot (1 + i_{\frac{T-t_0}{360}}) \cdot q_{REAL}(t_0) =$$
$$= -7476000 \cdot (1 + \frac{0,0275}{12}) \cdot 0,99771 = -7492132,50 \cdot 0,99771 = -7475002,29$$

Laut Abschnitt 4.1 beträgt die Varianz des Wachstumstempos des Abzinsfaktors $\sigma^2 = 0,000002$ bzw. $\sigma = 0,001414$. Dann ergibt sich folgendes Risiko:

$$VaR_P(t_0, 99\%) = \Delta^*_{q_{REAL}} \cdot \sigma_q \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}_{X_{norm}}(0,99) =$$
$$= -7475002,29 \cdot 0,001414 \cdot \sqrt[2]{1} \cdot (-2,3263) = 24588,18$$

Das Risiko bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 99% und einer Haltedauer von einem Tag beträgt 24588,18 EUR.

Im weiteren erfolgt die Risikobestimmung, wenn die Risikobewertung in der Heimatwährung W2 des Goldverleihers vorgenommen wird. Zusätzlich tritt ein weiterer Risikofaktor auf: der Wechselkurs $wk(W2/W1)$. Wie in Abschnitt 2.6 wird angenommen, dass der Rücktausch des Geldbetrages plus der aufgelaufen Zinsen zum Wechselkurs zum Zeitpunkt $t = t_0$ erfolgt, dh. $wk_T(W2/W1) = wk_{t_0}(W2/W1)$.

Der zurück zu tauschende Betrag am Vertragsende in Währung W2 beträgt dann: $K_{t_0}(W1) \cdot (1 + i_{\frac{T-t_0}{360}}) \cdot wk_{t_0}(W2/W1) \cdot q_{REAL}$. Daraus ergibt sich folgende Preisfunktion:

$$P_{t_0}(W2) = K_{t_0}(W1) \cdot wk_{t_0}(W2/W1) - BW_{t_0}(W2)$$
$$= K_{t_0}(W1) \cdot wk_{t_0}(W2/W1) - K_T(W1) \cdot wk_{t_0}(W2/W1) \cdot \frac{1}{1 + i_{REAL,W2}(t_0 \to T)}$$
$$P_{t_0}(W2) = K_{t_0}(W1) \cdot wk_{t_0}(W2/W1) - K_{t_0}(W1) \cdot (1 + i_{\frac{T-t_0}{360}}) \cdot wk_{t_0}(W2/W1) \cdot q_{REAL}$$

Die Sensitivitäten $\Delta^*_{q_{REAL}}$ und $\Delta^*_{wk(W2/W1)}$ können folgendermaßen berechnet werden:

$$\Delta^*_{q_{REAL}} = P'_q(W2) \cdot q_{REAL}(t_0)\Big|_{t=t_0} = -K_{t_0}(W1) \cdot (1 + i_{\frac{T-t_0}{360}}) \cdot wk_{t_0}(W2/W1) \cdot q_{REAL}(t_0)$$
$$\Delta^*_{wk(W2/W1)} = P'_{wk}(W2) \cdot wk(W2/W1)(t_0)\Big|_{t=t_0} = [K_{t_0}(W1) - K_{t_0}(W1) \cdot (1 + i_{\frac{T-t_0}{360}}) \cdot \cdot q_{REAL}(t_0)] \cdot wk_{t_0}(W2/W1)$$

Angewandt auf das Beispiel 3 aus Abschnitt 2.6:

$$\Delta^*_{q_{REAL}} = -K_{t_0}(EUR) \cdot (1 + i_{\frac{T-t_0}{360}}) \cdot wk_{t_0}(SOM/EUR) \cdot q_{REAL}(t_0) =$$
$$= -7476000 \cdot (1 + \frac{0,0275}{12}) \cdot 13,76 \cdot \frac{1}{1 + 0,12 \cdot \frac{1}{12}} = -102084656,63$$
$$\Delta^*_{wk(SOM/EUR)} = [K_{t_0}(EUR) - K_{t_0}(EUR) \cdot (1 + i_{\frac{T-t_0}{360}}) \cdot \cdot q_{REAL}(t_0)] \cdot wk(SOM/EUR)(t_0) =$$
$$= [7476000 - 7476000 \cdot (1 + \frac{0,0275}{12}) \cdot \frac{1}{1 + 0,12 \cdot \frac{1}{12}}] \cdot 13,76 = 785103,37$$

Die Vektoren der Sensitivitäten lauten:

$$\Delta^* = \begin{pmatrix} -102084656,63 \\ 785103,37 \end{pmatrix}, \Delta^{*T} = \begin{pmatrix} -102084656,63 & 785103,37 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung der Varianz-Kovarianz-Matrix benötigt man die Varianzen der Wachstumstempi des Abzinsfaktors $q_{REAL}(t_0)$ für die Währung SOM und des Wechselkurses $wk_{t_0}(SOM/EUR)$. Sie können dem Abschnitt 4.1 entnommen werden.Die Varianz-Kovarianz-Matrix lautet:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0,000001 & 0,000001 \\ 0,000001 & 0,000002 \end{pmatrix}$$

Es kann nun das Risiko des Geschäftes mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 99% und einer Haltedauer von einem Tag berechnet werden:

$$Var(t,p) = \sqrt{\Delta^{*T}\Sigma\Delta^*} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(1-p)$$

$$VaR_{var}(1,99\%) = \sqrt{\begin{pmatrix} -102084656,63 & 785103,37 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,000009 & 0,000005 \\ 0,000005 & 0,000040 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -102084656,63 \\ 785103,37 \end{pmatrix}} \cdot$$
$$\cdot \sqrt{1} \cdot F^{-1}(0,01) = -235.665,55$$

Das Risiko bei einer Haltedauer von einem Tag und einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 99% beträgt -235.665,55 SOM.

# Kapitel 4

# Anhang

## 4.1 Statistische Parameter für die Risikoberechnung

Die Risikoberechnung erfordert statistische Parameter, die entweder in diesem Buch berechnet werden, oder als gegeben angenommen werden. Wie im Abschnitt 3.1 beschrieben, werden die statistischen Parameter aus langfristigen Zeitreihen der Wachstumstempi der Risikofaktoren abgeleitet. Dabei handelt es sivh um Zeitreihen einer Länge von 250 Beobachtungen. Nur für ausgewählte Zeitreihen wurde die Berechnung illustriert, die anderen Größen wurden willkürlich angenommen.

Die nachfolgende Tabelle enthält eine Übersicht aller in diesem Buch berücksichtigten Risikoparameter und ihre zugehörigen statistischen Parameter.

| Risikofaktor | Bezeichnung | Mittelwert | Varianz | Standardabweichungen |
|---|---|---|---|---|
| Wachstumstempo des Wechselkurses EUR/USD | $wk(EUR\,USD)$ | $\mu = 0,000000$ | $\sigma^2 = 0,000024$ | $\sigma = 0,004920$ |
| Wachstumstempo des Wechselkurses EUR/GBP | $wk(EUR\,GBP)$ | $\mu = 0,000000$ | $\sigma^2 = 0,000030$ | $\sigma = 0,005477$ |
| Wachstumstempo der Abzinsfaktoren EUR ($0 \leftarrow 1$) | $\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 1)}$ | $\mu = 0,000000$ | $\sigma^2 = 0,000022$ | $\sigma = 0,004690$ |
| Wachstumstempo der Abzinsfaktoren EUR ($0 \leftarrow 2$) | $\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 2)}$ | $\mu = 0,000000$ | $\sigma^2 = 0,000024$ | $\sigma = 0,004920$ |
| Wachstumstempo der Abzinsfaktoren EUR ($0 \leftarrow 3$) | $\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 3)}$ | $\mu = 0,000000$ | $\sigma^2 = 0,000028$ | $\sigma = 0,005292$ |
| Wachstumstempo der Abzinsfaktoren EUR ($0 \leftarrow 4$) | $\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 4)}$ | $\mu = 0,000000$ | $\sigma^2 = 0,000030$ | $\sigma = 0,005477$ |
| Wachstumstempo der Abzinsfaktoren USD ($0 \leftarrow 2$) | $\hat{q}_{USD(0\leftarrow 2)}$ | $\mu = 0,000000$ | $\sigma^2 = 0,000028$ | $\sigma = 0,005292$ |
| Wachstumstempo der Abzinsfaktoren des EURIBOR Laufzeit in Mon. ($0 \leftarrow 3$) | $\hat{q}_{EURIBOR(0\leftarrow 3)}$ | $\mu = 0,000000$ | $\sigma^2 = 0,000005$ | $\sigma = 0,002236$ |
| Wachstumstempo der Abzinsfaktoren des EURIBOR Laufzeit in Mon. ($0 \leftarrow 9$) | $\hat{q}_{EURIBOR(0\leftarrow 9)}$ | $\mu = 0,000000$ | $\sigma^2 = 0,000008$ | $\sigma = 0,002828$ |

Neben Mittelwert, Varianz und Standardabweichung sind auch die Beziehungen zwischen den Risikofaktoren in der Form von Kovarianzen zu berücksichtigen .

| Risikofaktor 1 | Risikofaktor 2 | Bezeichnung | Kovarianz |
|---|---|---|---|
| Wachstumstempo des Wechselkurses EUR/USD | Wachstumstempo des Wechselkurses EUR/GBP | $\sigma^2_{wk(EUR\ USD)/wk(EUR\ GBP)}$ | $\sigma^2 = 0,000005$ |
| Wachstumstempo des Abzinsfaktoren EUR ($0 \leftarrow 1$) | Wachstumstempo des Abzinsfaktoren EUR ($0 \leftarrow 2$) | $\sigma^2_{(\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 1)}/\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 2)})}$ | $\sigma^2 = 0,000005$ |
| Wachstumstempo des Abzinsfaktoren EUR ($0 \leftarrow 1$) | Wachstumstempo des Abzinsfaktoren EUR ($0 \leftarrow 3$) | $\sigma^2_{(\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 1)}/\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 3)})}$ | $\sigma^2 = 0,000006$ |
| Wachstumstempo des Abzinsfaktoren EUR ($0 \leftarrow 1$) | Wachstumstempo des Abzinsfaktoren EUR ($0 \leftarrow 4$) | $\sigma^2_{(\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 1)}/\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 4)})}$ | $\sigma^2 = 0,000007$ |
| Wachstumstempo des Abzinsfaktoren EUR ($0 \leftarrow 2$) | Wachstumstempo des Abzinsfaktoren EUR ($0 \leftarrow 3$) | $\sigma^2_{(\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 2)}/\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 3)})}$ | $\sigma^2 = 0,000008$ |
| Wachstumstempo des Abzinsfaktoren EUR ($0 \leftarrow 2$) | Wachstumstempo des Abzinsfaktoren EUR ($0 \leftarrow 4$) | $\sigma^2_{(\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 2)}/\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 4)})}$ | $\sigma^2 = 0,000005$ |
| Wachstumstempo des Abzinsfaktoren EUR ($0 \leftarrow 3$) | Wachstumstempo des Abzinsfaktoren EUR ($0 \leftarrow 4$) | $\sigma^2_{(\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 3)}/\hat{q}_{EUR(0\leftarrow 4)})}$ | $\sigma^2 = 0,000003$ |
| Wachstumstempo des Abzinsfakt. EURIBOR ($0 \leftarrow 3$) | Wachstumstempo des Abzinsfakt. EURIBOR ($0 \leftarrow 9$) | $\sigma^2_{(\hat{q}_{EURIBOR(0\leftarrow 3)}/\hat{q}_{EURIBOR(0\leftarrow 9)})}$ | $\sigma^2 = 0,000004$ |

Es sei daran erinnert, das die Kovarianzen des Risikofaktors i mit dem Risikofaktor j ($\sigma^2_{i,j}$) gleich den Kovarianzen des Risikofaktors j mit dem Risikofaktor i ($\sigma^2_{j,i}$) sind. Deshalb wurden nur die Kovarianzen $\sigma^2_{i,j}$ in der Tabelle angezeigt.

$$\sigma^2_{i,j} = \sigma^2_{j,i}$$

# Literaturverzeichnis


[Böh21] Böhme, Wolfgang: *Finanzmathematik*. Skript, März 2021.

[Bos91] Bosch, Karl: *Finanzmathematik*. Oldenbourg Verlag, München, 1991.

[Hul01] Hull, John C.: *Optionen, Futures und andere Derivate*. Pearson Studium / Oldenbourg Verlag, München, 2001.

[Bun21a] Deutsche Bundesbank: *Liquiditätsrisiko*. Website, 2021. https://www.bundesbank.de/de/aufgaben/bankenaufsicht/einzelaspekte/eigrisiko/liquiditaetsrisiko. Abgerufen am 03.07.2021.

[Inv21] Investing.com: *EUR 5 Years IRS Interest Rate Swap*. Website, 2021. https://www.investing.com/rates-bonds/eur5-years-irs-interest-rate-swap-historical-data. Abgerufen am 10.06.2021.

[Wie18] Wiedemann, Arnd: *Financial Engineering – Bewertung von Finanzinstrumenten*. efiport GmbH, 2018.

[Bun21b] Deutsche Bundesbank: *Operationelles Risiko*. Website, 2021. https://www.bundesbank.de/de/aufgaben/bankenaufsicht/einzelaspekte/eigrisiko/operationelles-risiko-598534. Abgerufen am 03.07.2021.

[Kru10] Kruschwitz, Lutz: *Finanzmathematik. Lehrbuch der Zins-, Renten-, Tilgungs-, Kurs- und Renditerechnung*. 5. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, 2010.

[Lud24] Luderer, Bernd: *Starthilfe Finanzmathematik – Zinsen, Kurse, Renditen*. 5. Auflage, Springer Vieweg, Wiesbaden, 2024.

[Lud19] Luderer, Bernd: *Klassische Finanzmathematik – Grundideen, zentrale Formeln und Begriffe im Überblick*. Springer Gabler, Wiesbaden, 2019.

[Pfe09] Pfeifer, Andreas: *Praktische Finanzmathematik. Mit Futures, Optionen, Swaps und anderen Derivaten*. 5. überarbeitete Auflage, Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 2009.

[Tie15] Tietze, Jürgen: *Einführung in die Finanzmathematik. Klassische Verfahren und neuere Entwicklungen*. 12. Auflage, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2015.

[TieÜ] Tietze, Jürgen: *Übungsbuch zur Finanzmathematik. Aufgaben, Testklausuren und Lösungen*. Springer Vieweg, Wiesbaden.

[HeiSch17] Heidorn, Thomas; Schäffler, Christian: *Finanzmathematik in der Bankpraxis – Vom Zins zur Option*. 7. Auflage, Springer Gabler, Wiesbaden, 2017. (Behandelt: Effektivzinsberechnung, Forward Rate Agreements, Zinsswaps, Zinsstrukturkurven, Anleihen, Optionspreistheorie, Kreditderivate.)

[Rei11] Reitz, Stefan: *Mathematik in der modernen Finanzwelt – Derivate, Portfoliomodelle und Ratingverfahren*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2011. (Behandelt: Bewertung von Derivaten, Zinsprodukte und Zinsmodelle, Kreditderivate, Markt- und Kreditrisikomodelle.)

[GruLud09] Grundmann, Wolfgang; Luderer, Bernd: *Finanzmathematik, Versicherungsmathematik, Wertpapieranalyse. Formeln und Begriffe*. 3. Auflage, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009.

[Wie09] Wiedemann, Arnd: *Risikotriade Zins-, Kredit- und operationelle Risiken*. 3. Auflage, Frankfurt School Verlag, Frankfurt am Main, 2009. (Behandelt: Zinsrisiko, Kreditrisiko, operationelles Risiko, Value-at-Risk-Konzepte.)

[Schu] Schulte-Mattler, Hermann; Traber, Uwe: *Marktrisiko – Messung und Eigenkapitalunterlegung*. Gabler Verlag, Wiesbaden. (Behandelt: Varianz-Kovarianz-Methode, historische Simulation, Monte-Carlo-Simulation, VaR-Berechnung für Zinsinstrumente.)

[Cha17] Chan, Wai-Sum; Tse, Yiu-Kuen: *Financial Mathematics for Actuaries*. 2. Auflage, World Scientific, Singapur, 2017.

[Has22] Hastings, Kevin J.: *Introduction to Financial Mathematics*. 2. Auflage, Routledge/CRC Press, New York, 2022.

[Kam10] Kaminsky, Kenneth: *Financial Literacy – Introduction to the Mathematics of Interest, Annuities, and Insurance*. 2. Auflage, University Press of America, Lanham, 2010.

[Hul18] Hull, John C.: *Options, Futures, and Other Derivatives*. 10. Auflage, Pearson Education, Hoboken, 2018. (Behandelt: Forward Rate Agreements, Zinsswaps, Währungsswaps, Zinsstrukturkurven, festverzinsliche Anleihen, Floater.)

[Fab12] Fabozzi, Frank J.: *Bond Markets, Analysis, and Strategies*. 8. Auflage, Pearson Education, Boston, 2012. (Behandelt: Anleihen, Zinskurven, Floater, Durationskonzept, Bewertung festverzinslicher Wertpapiere.)

[BriMer06] Brigo, Damiano; Mercurio, Fabio: *Interest Rate Models – Theory and Practice*. 2. Auflage, Springer, Berlin/Heidelberg, 2006. (Behandelt: Nullkupon-Zinskurven, Zinsstrukturmodelle, Zinsswaps, Forward Rate Agreements.)

[JoR07] Jorion, Philippe: *Value at Risk – The New Benchmark for Managing Financial Risk*. 3. Auflage, McGraw-Hill, New York, 2007. (Standardwerk zu VaR; behandelt: Varianz-Kovarianz-Methode, historische Simulation, Monte-Carlo-Simulation, Backtesting.)

[McN05] McNeil, Alexander J.; Frey, Rüdiger; Embrechts, Paul: *Quantitative Risk Management – Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press, Princeton, 2005. (Behandelt: Marktrisiko, Kreditrisiko, Kovarianzmatrizen, Normalverteilungsannahme, Extremwerttheorie.)