Swap VaR Rechner

Risikomanagement mit historischen Zeitreihen

Mathematische Dokumentation

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

7. November 2026

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **3**

2 Eingangsdaten **3**
2.1 Zinszeitreihe . . . 3
2.2 Eingebaute Beispieldaten . . . 3

3 Plain Vanilla Swap **4**
3.1 Definition und Parameter . . . 4
3.2 Zahlungstermine . . . 4
3.3 Zinskurve und Diskontfaktoren . . . 4
3.4 Forward Rates . . . 4
3.5 Cashflows . . . 5
3.6 Barwert . . . 5

4 Forward Starting Swap **5**
4.1 Parameter und Zahlungstermine . . . 5
4.2 Forward Rates . . . 5
4.3 Forward Swap Rate . . . 5

5 Risikokennzahlen **5**
5.1 DV01 . . . 6
5.2 Modified Duration . . . 6
5.3 Konvexität . . . 6

6 Value at Risk **6**
6.1 Diskontfaktor-Zeitreihen . . . 6
6.2 Log-Renditen . . . 6
6.3 Kovarianz- und Korrelationsmatrix . . . 7
6.4 Sensitivitätsvektor . . . 7
6.5 Portfolio-Varianz und VaR . . . 7
6.6 Statistische Kennzahlen . . . 8

7 Zahlenbeispiel: Plain Vanilla Swap **8**
7.1 Parameter . . . 8
7.2 Diskontfaktoren, Forward Rates und Cashflows . . . 8
7.3 Risikokennzahlen . . . 9
7.4 Diskontfaktor-Zeitreihen und Renditen . . . 9
7.5 Kovarianz- und Korrelationsmatrix . . . 9
7.6 Portfolio-Varianz und VaR . . . 10
7.7 Halbjährliche Zahlungen . . . 10

8 Zahlenbeispiel: Forward Swap **10**
8.1 Parameter . . . 10
8.2 Cashflows . . . 10
8.3 Risiko . . . 11
8.4 Vergleich . . . 11

9 Implementierungsdetails **11**

10 Literaturverzeichnis **12**

11 Anhang: Formelübersicht **12**

1 Einführung

Dieses Dokument beschreibt die mathematischen Grundlagen von zwei VaR-Rechnern für Zinsswaps:

1. **Plain Vanilla Swap VaR Rechner:** Swaps mit Start heute.
2. **Forward Swap VaR Rechner:** Forward Starting Swaps mit Vorlaufzeit T_s. Mit $T_s = 0$ entspricht er dem Plain Vanilla Swap.

Beide Rechner arbeiten mit derselben Methodik:

- **Bewertung** mit der aktuellen Zinskurve (letzte Zeile der Zeitreihe),
- **Risikofaktoren** sind die Diskontfaktoren $\mathrm{DF}(t_i)$ an den Zahlungsterminen,
- **Kovarianzmatrix** der täglichen Log-Renditen dieser Diskontfaktoren aus mindestens 251 Handelstagen,
- **Sensitivitäten** sind die vollständigen Ableitungen des Barwerts nach $\ln \mathrm{DF}(t_i)$ (feste *und* variable Seite; beim Forward Swap zusätzlich nach $\ln \mathrm{DF}(T_s)$),
- **VaR** nach dem Varianz-Kovarianz-Ansatz (Delta-Normal) mit historisch geschätzter Kovarianzmatrix.

2 Eingangsdaten

2.1 Zinszeitreihe

Die Rechner lesen eine Zeitreihe von Nullkuponzinsen (stetig verzinst, in Prozent) ein:

$$r_k(T_j), \qquad k = 1, \ldots, K \text{ (Tage)}, \quad j = 1, \ldots, m \text{ (Laufzeiten)}, \tag{1}$$

mit $K \geq 251$. Die Kopfzeile enthält die Laufzeiten (`M` = Monate, `Y`/`J` = Jahre), z. B.

```
Datum,0.25Y,0.5Y,1Y,2Y,3Y,5Y,7Y,10Y
```

Die **letzte Zeile** liefert die aktuelle Zinskurve $r(T_j) = r_K(T_j)$.

2.2 Eingebaute Beispieldaten

Der Plain Vanilla Swap VaR Rechner enthält zwei EUR-Datensätze mit je 251 Handelstagen (14.11.2025 bis 30.10.2026):

- **EUR-Swapkurve** (Nullkupon, aus Swapsätzen gebootstrappt),
- **EUR-Bundesanleihen** (Nullkupon, aus Bundrenditen gebootstrappt).

Es handelt sich um marktnahe, synthetisch erzeugte Daten. Der Forward Swap VaR Rechner enthält andere Beispielreihen (Laufzeiten 1Y bis 5Y); die EUR-Swapkurve kann dort als CSV-Datei geladen werden (Abschnitt 8). Alle Zahlenbeispiele dieses Dokuments verwenden die EUR-Swapkurve; die aktuelle Kurve vom 30.10.2026 lautet:

Laufzeit T_j	0,25	0,5	1	2	3	5	7	10
$r(T_j)$ in %	2,5916	2,7609	2,9267	3,0352	3,0246	3,0753	3,1377	3,2451

Tabelle 1: EUR-Swapkurve (Nullkupon, stetig) am 30.10.2026

3 Plain Vanilla Swap

3.1 Definition und Parameter

Bei einem Plain Vanilla Zinsswap zahlt eine Partei einen festen Zins, die andere einen variablen Zins auf denselben Nominalbetrag; ausgetauscht werden nur Nettozahlungen. Die Rechner bewerten aus Sicht des **Festzinszahlers** (Payer-Swap: erhält variabel, zahlt fest).

Parameter	**Symbol**
Nominalbetrag	N
Fester Zinssatz (p. a.)	r_{fix}
Laufzeit (Jahre)	T
Zahlungsfrequenz (pro Jahr)	$f \in \{1, 2, 4\}$
Anzahl Zahlungen	$n = \lfloor T \cdot f \rfloor$
Zahlungsintervall (Jahre)	$\Delta t = 1/f$

Tabelle 2: Swap-Parameter

3.2 Zahlungstermine

$$t_i = i \cdot \Delta t, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Beispiel (jährlich, 5 Jahre): $t_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

3.3 Zinskurve und Diskontfaktoren

Für die **Bewertung** wird die aktuelle Kurve zwischen den Stützstellen linear interpoliert und außerhalb flach fortgesetzt:

$$r(t) = \begin{cases} r(T_1), & t \le T_1, \\ r(T_j) + \dfrac{r(T_{j+1}) - r(T_j)}{T_{j+1} - T_j}\,(t - T_j), & T_j \le t \le T_{j+1}, \\ r(T_m), & t \ge T_m. \end{cases} \tag{3}$$

Der Diskontfaktor ist

$$\mathrm{DF}(t) = e^{-r(t)\cdot t}. \tag{4}$$

3.4 Forward Rates

Die Forward Rate der Periode $[t_{i-1}, t_i]$ folgt aus den Diskontfaktoren:

$$F_i = \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \left(\frac{\mathrm{DF}(t_{i-1})}{\mathrm{DF}(t_i)} - 1 \right), \qquad t_0 = 0. \tag{5}$$

Für die erste Periode verwendet der Rechner $\mathrm{DF}(t_0)$ mit $t_0 = 0{,}001$ Jahren, also $\mathrm{DF}(t_0) = e^{-r(T_1)\cdot 0{,}001} \approx 1$.

3.5 Cashflows

$$C_{fix} = N \cdot r_{fix} \cdot \Delta t, \tag{6}$$
$$C_{float,i} = N \cdot F_i \cdot \Delta t, \tag{7}$$
$$C_{net,i} = C_{float,i} - C_{fix}. \tag{8}$$

3.6 Barwert

$$\boxed{\mathrm{PV} = \sum_{i=1}^{n} C_{net,i} \cdot \mathrm{DF}(t_i)} \tag{9}$$

Positiver Barwert: der Swap ist für den Festzinszahler im Geld.

4 Forward Starting Swap

4.1 Parameter und Zahlungstermine

Ein Forward Swap beginnt nach der Vorlaufzeit T_s (Forward Start) und läuft T Jahre (Tenor):

$$t_i = T_s + i \cdot \Delta t, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad n = \lfloor T \cdot f \rfloor, \qquad T_e = T_s + T. \tag{10}$$

Beispiel ($T_s = 2$, $T = 3$, jährlich): $t_i \in \{3, 4, 5\}$ – ein „2Y-into-3Y“-Swap (2Yx3Y).

4.2 Forward Rates

$$F_1 = \frac{1}{t_1 - T_s} \left(\frac{\mathrm{DF}(T_s)}{\mathrm{DF}(t_1)} - 1 \right), \tag{11}$$
$$F_i = \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \left(\frac{\mathrm{DF}(t_{i-1})}{\mathrm{DF}(t_i)} - 1 \right), \qquad i \geq 2. \tag{12}$$

Cashflows und Barwert wie in Abschnitt 3.

4.3 Forward Swap Rate

Der faire Festzins (Barwert null) ist

$$r_{fwd} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \mathrm{DF}(t_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{DF}(t_i)}. \tag{13}$$

Für $T_s = 0$ ist dies die Par-Swap-Rate.

5 Risikokennzahlen

Alle Kennzahlen werden numerisch durch Parallelverschiebung der aktuellen Kurve um $\Delta r = 0{,}0001$ (1 bp) ermittelt; die Forward Rates werden dabei mit der verschobenen Kurve neu berechnet.

5.1 DV01

$$\mathrm{DV01} = -\big(\mathrm{PV}(r+\Delta r) - \mathrm{PV}(r)\big). \tag{14}$$

Ein **negativer** DV01 bedeutet, dass der Barwert bei steigenden Zinsen **steigt** – typisch für den Festzinszahler.

5.2 Modified Duration

Die Duration wird auf den **Nominalbetrag** N bezogen:

$$D_{mod} = \frac{\mathrm{DV01} \cdot 10\,000}{N} \approx -\frac{1}{N}\,\frac{\partial \mathrm{PV}}{\partial r}, \qquad \Delta\mathrm{PV} \approx -D_{mod} \cdot N \cdot \Delta r. \tag{15}$$

Steigen alle Zinsen um einen Prozentpunkt, ändert sich der Barwert um etwa $-D_{mod}$ Prozent des Nominals. Für den Festzinszahler ist D_{mod} negativ.

Der Bezug auf das Nominal ist bei Swaps üblich: Der Barwert eines Swaps liegt oft nahe null (bei Abschluss zu Marktkonditionen ist $\mathrm{PV} \approx 0$). Eine auf $|\mathrm{PV}|$ bezogene Duration würde dann sehr groß und könnte das Vorzeichen wechseln; die nominalbezogene Duration bleibt stabil.

5.3 Konvexität

$$\text{Konvexität} = \frac{\mathrm{PV}(r+\Delta r) + \mathrm{PV}(r-\Delta r) - 2\,\mathrm{PV}(r)}{N \cdot (\Delta r)^2}. \tag{16}$$

Auch die Konvexität ist auf das Nominal bezogen; ihr Vorzeichen wird allein vom Zähler bestimmt. Zusammen gilt die Näherung zweiter Ordnung $\Delta\mathrm{PV} \approx N\big(-D_{mod}\,\Delta r + \frac{1}{2}\,\text{Konvexität} \cdot (\Delta r)^2\big)$. Für den Festzinszahler ist die Konvexität typischerweise negativ.

6 Value at Risk

6.1 Diskontfaktor-Zeitreihen

Für jeden Tag k und jeden Zahlungstermin t_i wird die Zinskurve des Tages interpoliert und der Diskontfaktor gebildet:

$$\mathrm{DF}_{k,i} = e^{-r_k(t_i)\cdot t_i}. \tag{17}$$

Innerhalb der Stützstellen wird linear interpoliert, oberhalb der längsten Laufzeit flach fortgesetzt. Für $t < T_1$ wird der Diskontfaktor linear zwischen $\mathrm{DF}(0) = 1$ und $\mathrm{DF}(T_1)$ interpoliert:

$$\mathrm{DF}_k(t) = 1 + \big(\mathrm{DF}_k(T_1) - 1\big)\frac{t}{T_1}. \tag{18}$$

6.2 Log-Renditen

$$R_{k,i} = \ln \frac{\mathrm{DF}_{k,i}}{\mathrm{DF}_{k-1,i}} = -\big(r_k(t_i) - r_{k-1}(t_i)\big) \cdot t_i, \qquad k = 2, \ldots, K. \tag{19}$$

Bei $K = 251$ Tagen ergeben sich 250 Beobachtungen.

6.3 Kovarianz- und Korrelationsmatrix

$$\bar{R}_i = \frac{1}{K-1}\sum_{k=2}^{K} R_{k,i}, \tag{20}$$

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{K-2}\sum_{k=2}^{K}(R_{k,i}-\bar{R}_i)(R_{k,j}-\bar{R}_j), \tag{21}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\Sigma_{ii}}, \qquad \rho_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sigma_i\,\sigma_j}. \tag{22}$$

$\mathbf{\Sigma}$ ist symmetrisch, positiv semidefinit und hat die Dimension $n \times n$; beim Forward Swap kommt der Diskontfaktor $\mathrm{DF}(T_s)$ als zusätzlicher Risikofaktor hinzu ($(n+1)\times(n+1)$).

6.4 Sensitivitätsvektor

Die variablen Cashflows hängen über die Forward Rates selbst von den Diskontfaktoren ab. Mit t_0 als Beginn der ersten Zinsperiode ($t_0 = T_s$ beim Forward Swap, $t_0 = 0{,}001$ Jahre beim Plain Vanilla Swap) teleskopiert die variable Seite, und der Barwert lautet

$$\mathrm{PV} = N\,\mathrm{DF}(t_0) - N\,\mathrm{DF}(t_n) - N\,r_{fix}\,\Delta t\sum_{i=1}^{n}\mathrm{DF}(t_i). \tag{23}$$

Da die Kovarianzmatrix für **Log-Renditen** geschätzt wird, sind die maßgeblichen Sensitivitäten die Ableitungen nach $\ln \mathrm{DF}(t_i)$:

$$\boxed{\begin{aligned} w_i &= -N\,r_{fix}\,\Delta t\,\mathrm{DF}(t_i)\quad (i<n), \qquad w_n = -N\,(1+r_{fix}\Delta t)\,\mathrm{DF}(t_n),\\ w_0 &= N\,\mathrm{DF}(T_s) \end{aligned}} \tag{24}$$

Der Term w_0 entfällt beim Plain Vanilla Swap, weil $\mathrm{DF}(0{,}001) \approx 1$ praktisch nicht schwankt. Beim Forward Swap gilt $\sum_{i=0}^{n} w_i = \mathrm{PV}$.

Damit erfasst der VaR die feste *und* die variable Seite. Frühere Fassungen verwendeten $w_i = C_{net,i}\mathrm{DF}(t_i)$, hielten also die Netto-Cashflows fest; der VaR fiel dadurch viel zu klein aus (im Beispiel unten 40,81 statt 4.817,78 EUR).

6.5 Portfolio-Varianz und VaR

$$\sigma_P^2 = \mathbf{w}^T\mathbf{\Sigma}\,\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i\,\Sigma_{ij}\,w_j, \tag{25}$$

$$\mathrm{VaR}_\alpha(h) = z_\alpha \cdot \sigma_P \cdot \sqrt{h}, \tag{26}$$

mit $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ und Haltedauer h in Tagen: $z_{0{,}95} = 1{,}645$, $z_{0{,}99} = 2{,}326$, $z_{0{,}999} = 3{,}090$.

$$\boxed{\mathrm{VaR}_{99\%,1d} = 2{,}326 \cdot \sqrt{\mathbf{w}^T\mathbf{\Sigma}\,\mathbf{w}}} \tag{27}$$

6.6 Statistische Kennzahlen

Die Rechner zeigen zusätzlich:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Sigma_{ii}} \qquad \text{(durchschnittliche tägliche Volatilität)}, \tag{28}$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} \rho_{i,i+1} \qquad \text{(durchschnittliche Korrelation benachbarter Termine)}. \tag{29}$$

Bei nur einer Zahlung ($n = 1$) ist $\bar{\rho}$ nicht definiert; der Rechner zeigt dann „–“.

7 Zahlenbeispiel: Plain Vanilla Swap

7.1 Parameter

Die Werte entsprechen den Voreinstellungen des Rechners mit den Beispieldaten „EUR-Swapkurve“.

Parameter	**Wert**
Nominalbetrag N	1.000.000 EUR
Fester Zinssatz r_{fix}	3,5 % p. a.
Laufzeit T	5 Jahre
Zahlungsfrequenz f	jährlich
Anzahl Zahlungen n	5
Konfidenzniveau / Haltedauer	99 % / 1 Tag

7.2 Diskontfaktoren, Forward Rates und Cashflows

Die Zinssätze für $t = 1, 2, 3, 5$ sind Stützstellen; $r(4) = (3{,}0246 + 3{,}0753)/2 = 3{,}0500\,\%$. Die feste Zahlung beträgt $C_{fix} = 1.000.000 \cdot 0{,}035 = 35.000$ EUR.

t_i	$r(t_i)$	$\mathrm{DF}(t_i)$	F_i	$C_{float,i}$	$C_{net,i}$	$C_{net,i}\mathrm{DF}(t_i)$
1	2,9267 %	0,971157	2,9673 %	29.672,80	−5.327,20	−5.173,55
2	3,0352 %	0,941102	3,1936 %	31.936,36	−3.063,64	−2.883,20
3	3,0246 %	0,913257	3,0490 %	30.489,57	−4.510,43	−4.119,18
4	3,0500 %	0,885150	3,1754 %	31.753,72	−3.246,28	−2.873,44
5	3,0753 %	0,857474	3,2277 %	32.276,96	−2.723,04	−2.334,94
Summe = Barwert						**−17.384,30**

Tabelle 3: Cashflows in EUR (Swapkurve vom 30.10.2026)

Beispiel erste Periode:

$$F_1 = \frac{1}{1}\left(\frac{0{,}999974}{0{,}971157} - 1\right) = 0{,}029673 = 2{,}9673\,\%. \tag{30}$$

Der Barwert ist negativ, weil der feste Zins (3,5 %) über der Par-Swap-Rate von 3,12 % liegt.

7.3 Risikokennzahlen

$$\mathrm{PV}(r+1\,\mathrm{bp}) = -16.908{,}81\ \mathrm{EUR}, \qquad \mathrm{PV}(r-1\,\mathrm{bp}) = -17.860{,}03\ \mathrm{EUR}, \tag{31}$$

$$\mathrm{DV01} = -\big(-16.908{,}81 - (-17.384{,}30)\big) = -475{,}49\ \mathrm{EUR}, \tag{32}$$

$$D_{mod} = -475{,}49 \cdot 10\,000 / 1.000.000 = -4{,}75, \tag{33}$$

$$\mathrm{Konvexität} = \frac{-16.908{,}81 - 17.860{,}03 + 2 \cdot 17.384{,}30}{1.000.000 \cdot 10^{-8}} = -23{,}14. \tag{34}$$

Der Zähler der Konvexität beträgt genau $-0{,}2314$ EUR; mit den gerundeten Barwerten ergibt sich $-0{,}24$. Bei einem Zinsanstieg um 1 Prozentpunkt gewinnt der Swap nach der Duration etwa 4,75 % des Nominals, also rund 47.500 EUR.

7.4 Diskontfaktor-Zeitreihen und Renditen

Tag	DF(1)	DF(2)	DF(3)	DF(4)	DF(5)
1 (14.11.2025)	0,980362	0,959378	0,938355	0,915488	0,891634
2 (17.11.2025)	0,980351	0,959497	0,937947	0,914604	0,890128
3 (18.11.2025)	0,980151	0,958728	0,937500	0,914116	0,889647
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
251 (30.10.2026)	0,971157	0,941102	0,913257	0,885150	0,857474

Tabelle 4: Diskontfaktoren an den Zahlungsterminen (Auszug)

Log-Renditen am Tag 2, z. B. $R_{2,1} = -(1{,}9845 - 1{,}9833)\,\% \cdot 1 = -0{,}000012$:

$$\mathbf{R}_2 = (-1{,}20;\ 12{,}40;\ -43{,}50;\ -96{,}60;\ -169{,}00) \times 10^{-5}. \tag{35}$$

7.5 Kovarianz- und Korrelationsmatrix

Aus 250 Beobachtungen:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 6{,}158 & 16{,}129 & 25{,}377 & 33{,}251 & 40{,}832 \\ 16{,}129 & 52{,}634 & 78{,}508 & 105{,}915 & 133{,}941 \\ 25{,}377 & 78{,}508 & 144{,}405 & 191{,}640 & 238{,}427 \\ 33{,}251 & 105{,}915 & 191{,}640 & 269{,}389 & 354{,}071 \\ 40{,}832 & 133{,}941 & 238{,}427 & 354{,}071 & 487{,}799 \end{pmatrix} \times 10^{-8} \tag{36}$$

Tägliche Volatilitäten σ_i: 0,0248 %; 0,0725 %; 0,1202 %; 0,1641 %; 0,2209 % – sie steigen mit der Laufzeit, weil $R_{k,i} = -\Delta r \cdot t_i$.

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} 1{,}000 & 0{,}896 & 0{,}851 & 0{,}816 & 0{,}745 \\ 0{,}896 & 1{,}000 & 0{,}901 & 0{,}890 & 0{,}836 \\ 0{,}851 & 0{,}901 & 1{,}000 & 0{,}972 & 0{,}898 \\ 0{,}816 & 0{,}890 & 0{,}972 & 1{,}000 & 0{,}977 \\ 0{,}745 & 0{,}836 & 0{,}898 & 0{,}977 & 1{,}000 \end{pmatrix} \tag{37}$$

7.6 Portfolio-Varianz und VaR

Sensitivitätsvektor mit $N\, r_{fix} \Delta t = 35.000$ EUR:

$$w_i = -35.000 \cdot \mathrm{DF}(t_i) \;\; (i = 1, \ldots, 4), \qquad w_5 = -1.035.000 \cdot \mathrm{DF}(5),$$
$$\mathbf{w} = (-33.990{,}50;\; -32.938{,}56;\; -31.963{,}99;\; -30.980{,}25;\; -887.485{,}08)^T \text{ EUR}. \tag{38}$$

Zwischenschritt $\mathbf{w}^T\boldsymbol{\Sigma}$, z. B. erste Komponente:

$$[\mathbf{w}^T\boldsymbol{\Sigma}]_1 = \big(-33.990{,}50 \cdot 6{,}158 - 32.938{,}56 \cdot 16{,}129 - 31.963{,}99 \cdot 25{,}377 - 30.980{,}25 \cdot 33{,}251 - 887.485{,}08 \cdot 40{,}832\big) \times 10^{-8} = -0{,}3882, \tag{39}$$

insgesamt $\mathbf{w}^T\boldsymbol{\Sigma} = (-0{,}3882;\; -1{,}2694;\; -2{,}2560;\; -3{,}3332;\; -4{,}5730)$.

$$\sigma_P^2 = \mathbf{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{w} = 4.288.894{,}64 \text{ EUR}^2, \qquad \sigma_P = 2.070{,}96 \text{ EUR}, \tag{40}$$
$$\mathrm{VaR}_{99\%,1d} = 2{,}3263 \cdot 2.070{,}96 = \mathbf{4.817{,}78} \text{ EUR}. \tag{41}$$

Den größten Beitrag liefert die letzte Zahlung (w_5), die neben dem Festzins auch die Rückzahlungswirkung der variablen Seite trägt.

Statistische Kennzahlen: $\bar{\sigma} = 0{,}1386\,\%$, $\bar{\rho} = (0{,}896 + 0{,}901 + 0{,}972 + 0{,}977)/4 = 0{,}9362$.

7.7 Halbjährliche Zahlungen

Mit $f = 2$ (10 Zahlungen, $t_i = 0{,}5; 1{,}0; \ldots; 5{,}0$) ergeben sich: PV $= -18.642{,}20$ EUR, DV01 $= -471{,}81$ EUR, $D_{mod} = -4{,}72$, Konvexität $= -22{,}93$, $\mathrm{VaR}_{99\%,1d} = 4.775{,}83$ EUR.

8 Zahlenbeispiel: Forward Swap

8.1 Parameter

Voreinstellungen des Forward Swap VaR Rechners: $N = 1.000.000$ EUR, $r_{fix} = 3{,}5\,\%$, Forward Start $T_s = 2$, Tenor $T = 3$, jährlich ($n = 3$), Daten: EUR-Swapkurve.

Die EUR-Swapkurve ist im Forward Swap VaR Rechner nicht eingebaut. Zum Nachrechnen sie im Plain Vanilla Swap VaR Rechner mit „Als CSV“ speichern und im Forward Swap VaR Rechner als Zeitreihen-Datei laden.

8.2 Cashflows

Mit $\mathrm{DF}(2) = 0{,}941102$:

$$F_1 = \frac{1}{3-2}\left(\frac{0{,}941102}{0{,}913257} - 1\right) = 0{,}030490 = 3{,}0490\,\%. \tag{42}$$

t_i	DF(t_i)	F_i	$C_{net,i}$	w_i
2	0,941102	–	–	941.101,76
3	0,913257	3,0490 %	−4.510,43	−31.963,99
4	0,885150	3,1754 %	−3.246,28	−30.980,25
5	0,857474	3,2277 %	−2.723,04	−887.485,08
Barwert $= \sum_i w_i$				**−9.327,56**

Tabelle 5: Forward Swap 2Yx3Y (EUR)

Die Forward Swap Rate beträgt 3,15 %.

8.3 Risiko

DV01 = −277,41 EUR, $D_{mod} = -2{,}77$, Konvexität = −19,21;

Risikofaktoren: DF(2), . . . , DF(5) (Sensitivitäten siehe Tabelle); σ_P = 1.516,46 EUR, $\mathrm{VaR}_{99\%,1d}$ = 3.527,82 EUR, $\bar{\sigma} = 0{,}1734\,\%$, $\bar{\rho} = 0{,}9742$.

8.4 Vergleich

Kennzahl	**5Y jährlich**	**5Y halbjährlich**	**Forward 2Yx3Y**
Zahlungen	5	10	3
Barwert (EUR)	−17.384,30	−18.642,20	−9.327,56
DV01 (EUR)	−475,49	−471,81	−277,41
Modified Duration	−4,75	−4,72	−2,77
VaR 99 %, 1 Tag (EUR)	4.817,78	4.775,83	3.527,82

Tabelle 6: Vergleich (EUR-Swapkurve, 30.10.2026)

Der Forward Swap hat weniger Zahlungen und ein geringeres Zinsrisiko; sein VaR ist nicht proportional kleiner, weil die verbleibenden Zahlungen auf den volatileren langen Laufzeiten liegen.

9 Implementierungsdetails

- **Log-Renditen** statt arithmetischer Renditen: zeitadditiv und symmetrisch.
- **Bessel-Korrektur**: Division durch $K - 2$ (Anzahl Renditen minus 1).
- **Validierung** (Konsole): Symmetrie $|\Sigma_{ij} - \Sigma_{ji}| < 10^{-15}$, Korrelationen in $[-1, 1]$, Prüfung auf identische Spalten.
- **Einlesen**: Komma, Semikolon oder Tabulator als Trennzeichen; bei Semikolon ist das Dezimalkomma erlaubt; Spalten werden nach Laufzeit sortiert; unvollständige Zeilen werden übersprungen.
- **Mindestlänge**: 251 vollständige Datenzeilen.

10 Literaturverzeichnis

1. Hull, J. C. (2018). *Options, Futures, and Other Derivatives*. 10th Edition. Pearson.
2. Jorion, P. (2007). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. 3rd Edition. McGraw-Hill.
3. Brigo, D., & Mercurio, F. (2006). *Interest Rate Models – Theory and Practice*. 2nd Edition. Springer.
4. Alexander, C. (2008). *Market Risk Analysis, Volume IV: Value at Risk Models*. Wiley.

11 Anhang: Formelübersicht

Diskontfaktor	$\mathrm{DF}(t) = e^{-r(t)\,t}$
Forward Rate	$F_i = \frac{1}{t_i - t_{i-1}}\big(\mathrm{DF}(t_{i-1})/\mathrm{DF}(t_i) - 1\big)$
Netto-Cashflow	$C_{net,i} = N\,(F_i - r_{fix})\,\Delta t$
Barwert	$\mathrm{PV} = \sum_i C_{net,i}\,\mathrm{DF}(t_i)$
DV01	$\mathrm{DV01} = -\big(\mathrm{PV}(r + \Delta r) - \mathrm{PV}(r)\big)$
Modified Duration	$D_{mod} = \mathrm{DV01} \cdot 10\,000 / N$
Konvexität	$\big(\mathrm{PV}(r+\Delta r) + \mathrm{PV}(r-\Delta r) - 2\mathrm{PV}(r)\big)/\big(N(\Delta r)^2\big)$
Log-Rendite	$R_{k,i} = \ln(\mathrm{DF}_{k,i}/\mathrm{DF}_{k-1,i})$
Kovarianz	$\Sigma_{ij} = \frac{1}{K-2}\sum_k (R_{k,i} - \bar{R}_i)(R_{k,j} - \bar{R}_j)$
Sensitivität	$w_i = -N r_{fix} \Delta t\,\mathrm{DF}(t_i)\ (i < n),\ w_0 = N\,\mathrm{DF}(T_s)$
	$w_n = -N(1 + r_{fix}\Delta t)\,\mathrm{DF}(t_n)$
Value at Risk	$\mathrm{VaR}_\alpha = z_\alpha \sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{w}}\,\sqrt{h}$

Symbol	Bedeutung
N	Nominalbetrag
r_{fix}	Fester Zinssatz
T, T_s	Laufzeit (Tenor), Forward Start
f, Δt	Zahlungsfrequenz, Zahlungsintervall
n	Anzahl Zahlungen
t_i	Zahlungstermin i
T_j, m	Stützstellen der Zinskurve, deren Anzahl
K	Anzahl Tage der Zeitreihe
$r(t)$	Nullkuponzins (stetig) für Laufzeit t
$\mathrm{DF}(t)$	Diskontfaktor
F_i	Forward Rate der Periode i
C_{fix}, $C_{float,i}$, $C_{net,i}$	feste, variable, Netto-Zahlung
$R_{k,i}$	Log-Rendite von $\mathrm{DF}(t_i)$ am Tag k
$\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{\rho}$	Kovarianz-, Korrelationsmatrix
$\mathbf{w}$	Sensitivitätsvektor
σ_P	Portfolio-Standardabweichung
z_α, h	Quantil der Normalverteilung, Haltedauer in Tagen