Value-at-Risk (VaR)

Theoretische Grundlagen und Berechnungsmethoden

Risikomanagement im Finanzwesen

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

7. November 2026

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung in Value-at-Risk **2**
1.1 Definition . . . 2
1.2 Historische Entwicklung . . . 2
1.3 Schlüsselparameter . . . 2

2 Varianz-Kovarianz-Methode (Parametrischer Ansatz) **3**
2.1 Grundprinzip . . . 3
2.2 Mathematische Herleitung . . . 3
2.2.1 Schritt 1: Renditeverteilung . . . 3
2.2.2 Schritt 2: Quantil der Normalverteilung . . . 3
2.2.3 Schritt 3: VaR-Formel . . . 3
2.3 Portfoliobetrachtung . . . 3
2.4 Vor- und Nachteile . . . 4

3 Historische Simulation **5**
3.1 Grundprinzip . . . 5
3.2 Berechnungsschritte . . . 5
3.3 Mathematische Formulierung . . . 5
3.4 Vor- und Nachteile . . . 6

4 Monte-Carlo-Simulation **7**
4.1 Grundprinzip . . . 7
4.2 Berechnungsschritte . . . 7
4.3 Stochastisches Modell . . . 7
4.4 Korrelierte Risikofaktoren . . . 7
4.5 Vor- und Nachteile . . . 8

5 Expected Shortfall (CVaR) **9**
5.1 Definition und Motivation . . . 9
5.2 Berechnung . . . 9
5.3 Vorteile gegenüber VaR . . . 9

6 Methodenvergleich **9**

7 Limitationen des VaR **10**
7.1 Keine Subadditivität . . . 10
7.2 Tail-Blindheit . . . 10
7.3 Prozyklizität . . . 10

8 Anwendungsbeispiel: FX-Portfolio **10**
8.1 Ausgangssituation . . . 10
8.2 Berechnung (Varianz-Kovarianz) . . . 11
8.3 Interpretation . . . 11

9 Weiterführende Literatur **12**

1 Einführung in Value-at-Risk

1.1 Definition

Der Value-at-Risk (VaR) ist ein statistisches Risikomaß, das den maximalen Verlust eines Portfolios oder einer Einzelposition innerhalb eines definierten Zeitraums mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit (Konfidenzniveau) angibt.

Formal ausgedrückt: Der VaR zum Konfidenzniveau α gibt den Schwellenwert an, den der Verlust mit der Wahrscheinlichkeit α nicht überschreitet; die Wahrscheinlichkeit einer Überschreitung beträgt $(1 - \alpha)$.

$$P(\text{Verlust} > \text{VaR}) = 1 - \alpha \tag{1}$$

Beispiel

Ein VaR von 1 Million EUR bei einem Konfidenzniveau von 99% und einer Haltedauer von 10 Tagen bedeutet: Mit 99% Wahrscheinlichkeit wird der Verlust in den nächsten 10 Tagen 1 Million EUR nicht übersteigen.

1.2 Historische Entwicklung

Das VaR-Konzept wurde in den 1990er Jahren bei J.P. Morgan entwickelt und durch das RiskMetrics-System popularisiert. Seit dem Baseler Akkord (Basel II/III) ist VaR ein regulatorischer Standard für Banken zur Bestimmung des erforderlichen Eigenkapitals für Marktrisiken.

1.3 Schlüsselparameter

Drei Parameter definieren jeden VaR:

Konfidenzniveau (α) Typisch 95% oder 99%. Höheres Konfidenzniveau führt zu höherem VaR.

Haltedauer (T) Zeitraum der Risikobetrachtung. Für Handelsportfolios oft 1-10 Tage, für strategische Positionen länger.

Positionswert Marktwert der betrachteten Position oder des Portfolios.

2 Varianz-Kovarianz-Methode (Parametrischer Ansatz)

2.1 Grundprinzip

Die Varianz-Kovarianz-Methode (auch Delta-Normal-Methode genannt) basiert auf der Annahme, dass die Renditen normalverteilt sind. Der VaR wird analytisch aus der Volatilität und dem entsprechenden Quantil der Standardnormalverteilung berechnet.

2.2 Mathematische Herleitung

2.2.1 Schritt 1: Renditeverteilung

Annahme: Die logarithmischen Renditen r folgen einer Normalverteilung:

$$r \sim N(\mu, \sigma^2) \tag{2}$$

wobei μ der Erwartungswert (oft als 0 angenommen für kurze Zeiträume) und σ die Standardabweichung (Volatilität) ist.

2.2.2 Schritt 2: Quantil der Normalverteilung

Das α-Quantil der Standardnormalverteilung z_α bestimmt den kritischen Wert:

$$z_{0,95} = 1,645 \qquad z_{0,99} = 2,326 \tag{3}$$

2.2.3 Schritt 3: VaR-Formel

Für eine Position mit Wert V und täglicher Volatilität σ:

$$\boxed{\text{VaR} = V \times \sigma \times z_\alpha \times \sqrt{T}} \tag{4}$$

Der Faktor $\sqrt{T}$ (Wurzel aus der Haltedauer) skaliert die tägliche Volatilität auf die gewünschte Zeitperiode (Square-Root-of-Time-Regel).

2.3 Portfoliobetrachtung

Für ein Portfolio mit n Positionen berücksichtigt die Varianz-Kovarianz-Methode die Korrelationen zwischen den Positionen:

$$\sigma^2_{\text{Portfolio}} = \sum_i \sum_j w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \tag{5}$$

In Matrixschreibweise:

$$\sigma^2_{\text{Portfolio}} = \mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} \tag{6}$$

wobei $\mathbf{w}$ der Vektor der Gewichte, $\mathbf{\Sigma}$ die Kovarianzmatrix und ρ_{ij} die Korrelation zwischen Position i und j ist.

2.4 Vor- und Nachteile

Vorteile:

- Einfache und schnelle Berechnung
- Analytisch geschlossene Lösung
- Berücksichtigung von Korrelationen bei Portfolios
- Gut geeignet für lineare Risikofaktoren

Nachteile:

- Normalverteilungsannahme oft unrealistisch (Fat Tails)
- Unterschätzt extreme Verluste
- Ungeeignet für nicht-lineare Instrumente (Optionen)
- Volatilität und Korrelationen können zeitvariant sein

3 Historische Simulation

3.1 Grundprinzip

Die historische Simulation ist ein nicht-parametrischer Ansatz, der keine Annahmen über die Verteilung der Renditen trifft. Stattdessen wird die empirische Verteilung der historischen Renditen verwendet, um potenzielle zukünftige Verluste zu schätzen.

3.2 Berechnungsschritte

1. **Datensammlung:** Sammle historische Renditen für einen definierten Zeitraum (z.B. 250 Handelstage)
2. **Portfolio-Neubewertung:** Berechne für jede historische Rendite den hypothetischen Portfoliowert
3. **Gewinn/Verlust-Verteilung:** Erstelle eine Verteilung der hypothetischen Gewinne und Verluste
4. **Sortierung:** Sortiere die Ergebnisse vom größten Verlust zum größten Gewinn
5. **Quantil-Bestimmung:** Der VaR entspricht dem $(1-\alpha)$-Quantil der sortierten Verluste

3.3 Mathematische Formulierung

Gegeben seien n historische Beobachtungstage. Für jede Position j (Wert V_j in Heimatwährung, $V = \sum_j V_j$) sei r_{ij} die tägliche logarithmische Rendite des zugehörigen Risikofaktors (z. B. Wechselkurses) am Tag i.

Schritt 1 – Skalierung auf die Haltedauer. Die Tagesrendite wird mit der Square-Root-of-Time-Regel auf T Tage skaliert und das Portfolio neu bewertet:

$$V_i = \sum_j V_j \cdot \exp\Big(r_{ij}\sqrt{T}\Big), \qquad i = 1, \ldots, n \tag{7}$$

Schritt 2 – Verluste. Der hypothetische Verlust (Gewinne als negative Verluste) und die Rendite über die Haltedauer lauten:

$$L_i = V - V_i, \qquad R_i^{(T)} = \frac{V_i - V}{V} = -\frac{L_i}{V} \tag{8}$$

Schritt 3 – Sortierung. Die Verluste werden absteigend sortiert: $L_{(1)} \geq L_{(2)} \geq \ldots \geq L_{(n)}$. $L_{(1)}$ ist das schlechteste Szenario (Rang 1).

Schritt 4 – VaR. Mit

$$k = \lfloor n \cdot (1-\alpha) \rfloor \tag{9}$$

liegt die Quantilsgrenze zwischen Rang k und Rang $k+1$ (bei $n = 250$, $\alpha = 99\%$ ist $n(1-\alpha) = 2{,}5$). Der historische VaR ist der Mittelwert dieser beiden Ränge:

$$\boxed{\mathrm{VaR}_\alpha^{\mathrm{hist}} = \frac{L_{(k)} + L_{(k+1)}}{2}} \qquad (k \geq 1) \tag{10}$$

Ist $k = 0$ (zu wenige Beobachtungen für das Konfidenzniveau), wird das schlechteste Szenario verwendet: $\text{VaR} = L_{(1)}$.

Schritt 5 – Expected Shortfall. Der ES ist der Durchschnitt der k schlechtesten Verluste, also aller Szenarien, die schlechter sind als die Quantilsgrenze:

$$\boxed{\text{ES}_\alpha^{\text{hist}} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} L_{(i)}} \qquad (k \geq 1;\ \text{sonst ES} = L_{(1)}) \tag{11}$$

Zahlenbeispiel aus dem FX-VaR-Rechner

Portfolio: 100.000 USD, 50.000 GBP und 200.000 CNY; Heimatwährung EUR, Portfoliowert $V = 176.049$ EUR; Beispieldaten mit $n = 250$ Tagen; $\alpha = 99\%$; $T = 10$ Tage.

$k = \lfloor 250 \cdot 0{,}01 \rfloor = \lfloor 2{,}5 \rfloor = 2$

Rang	Rendite 10 Tage	Verlust (EUR)	
1	−3,321 %	5.847	ES
2	−3,268 %	5.754	ES, VaR
3	−2,773 %	4.882	VaR

$$\text{VaR}_{99\%,10d} = \frac{L_{(2)} + L_{(3)}}{2} = \frac{5.754 + 4.882}{2} = \mathbf{5.318\ EUR}$$

$$\text{ES}_{99\%,10d} = \frac{L_{(1)} + L_{(2)}}{2} = \frac{5.847 + 5.754}{2} \approx \mathbf{5.800\ EUR}^{1}$$

Kontrolle: 2,773 % × 176.049 EUR ≈ 4.882 EUR.

3.4 Vor- und Nachteile

Vorteile:

- Keine Verteilungsannahmen erforderlich
- Erfasst automatisch Fat Tails und Schiefe
- Implizite Berücksichtigung von Korrelationen
- Intuitiv verständlich und gut kommunizierbar

Nachteile:

- Abhängig von der Qualität und Länge der historischen Daten
- Annahme: Vergangenheit ist repräsentativ für die Zukunft
- Kann strukturelle Marktveränderungen nicht antizipieren
- Ghost-Effekte: Extreme Ereignisse fallen nach T Tagen aus der Berechnung

[1] Abweichungen in der letzten Stelle entstehen durch Rundung der Einzelverluste.

4 Monte-Carlo-Simulation

4.1 Grundprinzip

Die Monte-Carlo-Simulation generiert eine große Anzahl von Zufallsszenarien basierend auf einem stochastischen Modell. Sie ist die flexibelste VaR-Methode und kann komplexe Portfolios mit nicht-linearen Instrumenten bewerten.

4.2 Berechnungsschritte

1. **Modellspezifikation:** Wähle ein stochastisches Modell für die Risikofaktoren (z.B. geometrische Brownsche Bewegung)
2. **Parameterschätzung:** Schätze die Parameter aus historischen Daten (Drift, Volatilität, Korrelationen)
3. **Zufallszahlengenerierung:** Generiere korrelierte Zufallszahlen (z.B. mittels Cholesky-Zerlegung)
4. **Szenariogenerierung:** Simuliere n Preispfade (typisch: 10.000 - 100.000)
5. **Portfoliobewertung:** Bewerte das Portfolio für jedes Szenario
6. **VaR-Bestimmung:** Bestimme das $(1-\alpha)$-Quantil der simulierten Verluste

4.3 Stochastisches Modell

Das häufigste Modell ist die geometrische Brownsche Bewegung (GBM):

$$dS = \mu S\, dt + \sigma S\, dW \tag{12}$$

In diskreter Form für einen Zeitschritt Δt:

$$S(t+\Delta t) = S(t) \times \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \times \varepsilon\right] \tag{13}$$

wobei $\varepsilon \sim N(0,1)$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist.

4.4 Korrelierte Risikofaktoren

Für multiple korrelierte Risikofaktoren wird die Cholesky-Zerlegung verwendet:

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{L} \times \mathbf{L}' \tag{14}$$

wobei $\mathbf{L}$ eine untere Dreiecksmatrix ist. Korrelierte Zufallszahlen werden generiert durch:

$$\mathbf{z}_{\text{korreliert}} = \mathbf{L} \times \mathbf{z}_{\text{unabhängig}} \tag{15}$$

4.5 Vor- und Nachteile

Vorteile:

- Höchste Flexibilität bei der Modellwahl
- Geeignet für nicht-lineare Instrumente (Optionen, Derivate)
- Kann komplexe Abhängigkeitsstrukturen modellieren
- Ermöglicht Szenarioanalysen und Stresstests

Nachteile:

- Hoher Rechenaufwand
- Modellrisiko: Ergebnisse hängen stark vom gewählten Modell ab
- Sampling Error bei unzureichender Anzahl von Simulationen
- Komplexe Implementierung und Validierung

5 Expected Shortfall (CVaR)

5.1 Definition und Motivation

Der Expected Shortfall (ES), auch Conditional Value-at-Risk (CVaR) genannt, ist ein kohärentes Risikomaß, das die Schwächen des VaR adressiert. Er gibt den erwarteten Verlust an, gegeben dass der Verlust den VaR übersteigt.

Mathematisch:

$$\mathrm{ES}_\alpha = E[\text{Verlust} \mid \text{Verlust} > \mathrm{VaR}_\alpha] \tag{16}$$

$$\mathrm{ES}_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \times \int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_u \, du \tag{17}$$

5.2 Berechnung

Bei Normalverteilung:

$$\mathrm{ES}_\alpha = \sigma \times \frac{\varphi(z_\alpha)}{1-\alpha} \tag{18}$$

wobei $\varphi(z)$ die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung ist.

Bei historischer Simulation ist der ES der Durchschnitt der $k = \lfloor n(1-\alpha) \rfloor$ schlechtesten Verluste (Definition und Zahlenbeispiel siehe Abschnitt 3.3):

$$\mathrm{ES} = \frac{1}{k} \times \sum_{i=1}^{k} L_{(i)} \tag{19}$$

Im Beispiel ($n = 250$, $\alpha = 99\%$, $k = 2$) ergibt sich ES $= (5.847 + 5.754)/2 \approx 5.800$ EUR gegenüber einem VaR von 5.318 EUR.

5.3 Vorteile gegenüber VaR

- **Kohärentes Risikomaß:** Erfüllt Subadditivität ($\mathrm{ES}(A+B) \leq \mathrm{ES}(A) + \mathrm{ES}(B)$)
- **Tail-Risiko:** Berücksichtigt die Schwere extremer Verluste, nicht nur deren Häufigkeit
- **Regulatorisch:** Basel III ersetzt VaR zunehmend durch ES für Marktrisiko
- **Konvexität:** Ermöglicht effiziente Portfoliooptimierung

6 Methodenvergleich

Die folgende Tabelle fasst die wesentlichen Eigenschaften der drei VaR-Methoden zusammen:

Kriterium	**Varianz-Kovarianz**	**Hist. Simulation**	**Monte Carlo**
Verteilungsannahme	Normalverteilung	Keine (empirisch)	Wählbar
Rechenaufwand	Gering	Mittel	Hoch
Fat Tails	Nicht erfasst	Erfasst	Modellabhängig
Nicht-lineare Instr.	Ungeeignet	Bedingt geeignet	Gut geeignet
Implementierung	Einfach	Einfach	Komplex
Modellrisiko	Mittel	Gering	Hoch

Tabelle 1: Vergleich der drei VaR-Methoden

7 Limitationen des VaR

Trotz seiner weiten Verbreitung hat der VaR fundamentale Schwächen:

7.1 Keine Subadditivität

VaR ist kein kohärentes Risikomaß, da er nicht subadditiv ist. In seltenen Fällen kann $\text{VaR}(A + B) > \text{VaR}(A) + \text{VaR}(B)$ sein, was Diversifikation scheinbar bestrafen würde.

7.2 Tail-Blindheit

VaR sagt nichts über die Schwere von Verlusten jenseits des Schwellenwerts aus. Zwei Portfolios mit gleichem VaR können völlig unterschiedliche Tail-Risiken haben.

7.3 Prozyklizität

In Krisenzeiten steigt der VaR, was zu Verkaufsdruck führen kann, der die Krise verschärft. Dieses prozyklische Verhalten kann systemische Risiken verstärken.

8 Anwendungsbeispiel: FX-Portfolio

Betrachten wir ein Beispiel zur Berechnung des VaR für eine Devisenposition:

8.1 Ausgangssituation

- Position: 1.000.000 USD gegen UZS
- Aktueller Kurs: 12.500 UZS/USD
- Tägliche Volatilität: $\sigma = 0,3\%$ (basierend auf historischen Daten)
- Konfidenzniveau: 99%
- Haltedauer: 10 Tage

8.2 Berechnung (Varianz-Kovarianz)

Positionswert in UZS:

$$V = 1.000.000 \times 12.500 = 12.500.000.000 \text{ UZS} \tag{20}$$

VaR-Berechnung:

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{99\%,10d} &= V \times \sigma \times z_{0,99} \times \sqrt{10} && (21)\\ &= 12.500.000.000 \times 0,003 \times 2,326 \times 3,162 && (22)\\ &\approx 276.000.000 \text{ UZS} && (23) \end{aligned}$$

8.3 Interpretation

Mit 99% Wahrscheinlichkeit wird der Verlust aus dieser USD-Position innerhalb der nächsten 10 Handelstage 276 Millionen UZS nicht übersteigen. Anders ausgedrückt: Nur in 1% der Fälle (etwa 2,5 Tage pro Jahr) ist mit einem höheren Verlust zu rechnen.

9 Weiterführende Literatur

- Jorion, P. (2007): *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. 3rd Edition, McGraw-Hill.
- Hull, J.C. (2018): *Risk Management and Financial Institutions*. 5th Edition, Wiley.
- McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P. (2015): *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press.
- Basel Committee on Banking Supervision (2019): *Minimum capital requirements for market risk*. BIS.
- Artzner, P. et al. (1999): Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance* 9(3), 203-228.

Ende des Dokuments
