Value at Risk

Dr. Wolfgang Böhme

May 2017

Inhalt

- Definitionen / Value at Risk
- Varianz-Kovarianz-Methode
- Cornish-Fisher-Approximation

Definitionen 1

Gegeben sei ein Portfolio, dessen Marktwert man in funktionaler Abhängigkeit von Marktdaten (wie z.B. Wechselkursen oder Zinssätzen) beschreiben kann.

$P(t) = P(Y(t), t)$ - der Marktwert des Portfolios zum Zeitpunkt t
$P(t_0) = P(Y(t_0), t_0)$ - der Marktwert des Portfolios zum Anfangseitpunkt t_0

Annahme:

die Zusammensetzung des Portfolios ändert sich nicht im Zeitraum $t - t_0 > 0$

$\Delta P(t) = P(t) - P(t_0)$ - Wertveränderung des Portfolios (Profit and Loss - PnL)

Definitionen 2

Bezeichnungen:

$Y(t)$ - Vektor der Marktdaten zum Zeitpunkt t
$Y_i(t)$ - i-te Komponente des Vektors der Marktdaten
$\nu(t)$ - Zeitkomponente
$P_M(Y(t), \nu(t))$ - Preisfunktion

Die Wertveränderung des Portfolios (PnL) lässt sich dann darstellen:

$$\Delta P(t) = P_M(Y(t), \nu(t)) - P_M(Y(t_0), \nu(t_0))$$

Value at Risk (VaR)

Das Ziel der Abschätzung des Marktrisikos ist eine Aussage über den potentiellen Wertverlust des Portfolios innerhalb einer fixierten Halteperiode (t) , der mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit $(1-\alpha)$ nicht übertroffen wird.

Die Wahrscheinlichkeit P wird auch als Konfidenznivau $(1-\alpha)$ bezeichnet. Der potentielle Wertverlust heißt Value at Risk.

Nur in $\alpha\%$ der Fälle wird ein Verlust-Szenario eintreffen, das den VaR-Wert überschreitet.

$$\alpha = P(\Delta P(t) < VAR(t, \alpha))$$

Mathematisch gesehen ist $VAR(t, \alpha)$ das α-Quantil der Verteilung von $\Delta P(t)$.

Dichtefunktion / Verteilungsfunktion

Dichtefunktion:

Eine integrierbare Funktion f heißt Dichtefunktion der Zufallsvariable X, wenn gilt:

$$\int_a^b f(t)dt = P(a \leq X \leq b)$$

Verteilungsfunktion:

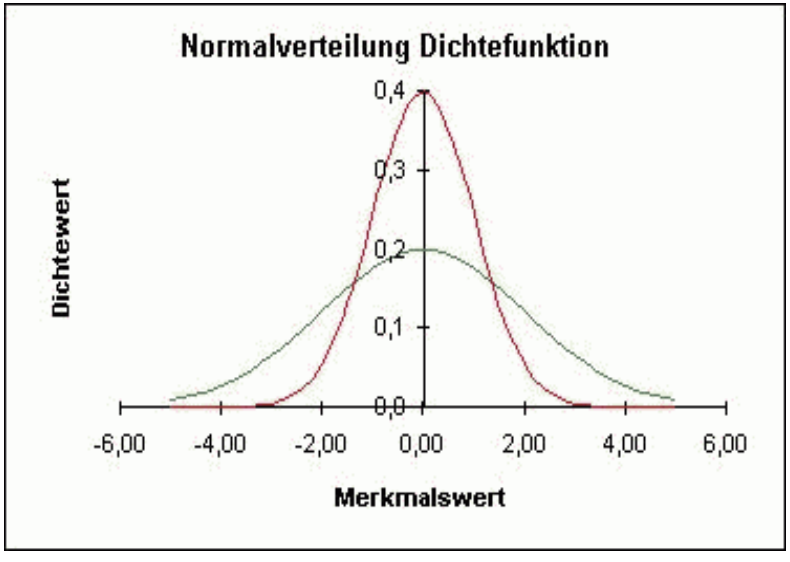
$$F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \ \textit{mit}\ x \in R\ \textit{und}\ X\ -\ \textit{reele Zufallsvariable}$$

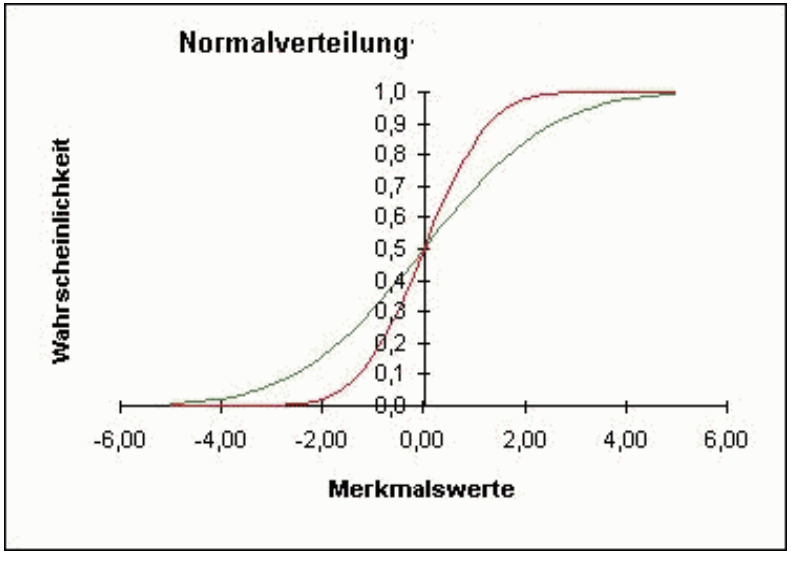
Dichte- (Verteilungs-) funktion / Normalverteilung

Beispiel: Normalverteilung

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$





Interpretation des p-Quantils 1

Quantil der Ordnung p

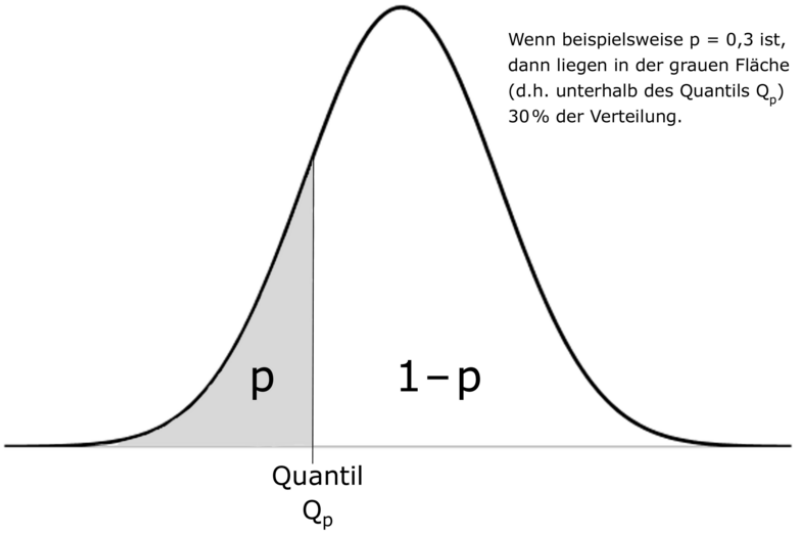
$$F_X^{-1}(p) = inf\,[x \in R, F_X(x) \geq p]\; mit\; X\; -\; reelle\; Zufallsvariable$$

oder in der VaR-Terminologie:

$$VaR_{\Delta P}(\alpha) = F_{\Delta P}^{-1}(\alpha) = inf\,[x \in R, F(x) \geq \alpha]$$

mit ΔP - Wertveränderung des Portfolios
und $F(x)$ Verteilungsfunktion der Wertveränderung des Portfolios

$p = \alpha = 0,05$ *Interpretation des p-Quantils 2*



$$P(X < Q_p) = F(Q_p) = \int_{-\infty}^{Q_p} f(t)dt = p$$

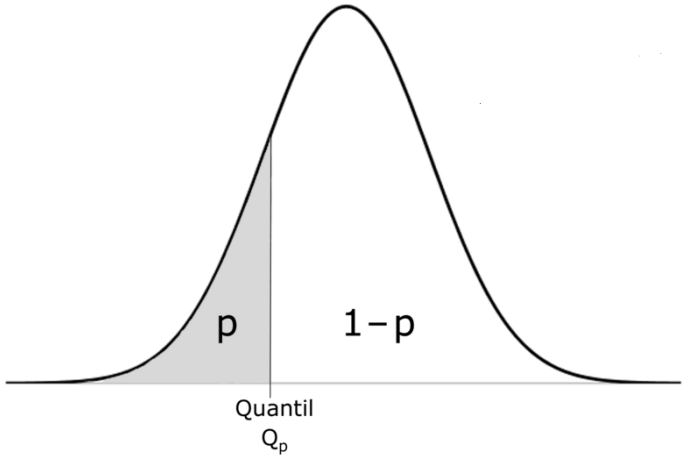
$$F_X^{-1}(p) = inf[x \in R, F_X(x) \geq p] = Q_p$$

in Worten:

- die dunkle Fläche beträgt 5 Prozent der Gesamtfläche
- der kleinste Wert auf der x-Achse, für den gilt $F_X(x) \geq p$ ist Q_p (Quantil)

Interpretation des p-Quantils 4

Bei Standardnormalverteilung :



$$
\begin{aligned}
F_X^{-1}(0,01) &= -2.326348 \\
F_X^{-1}(0,99) &= 2.326348 \\
F_X^{-1}(0,05) &= -1.644854 \\
F_X^{-1}(0,95) &= 1.644854
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Bei schiefen Verteilungen gilt nicht:

$$F_X^{-1}(\alpha) = -F_X^{-1}(1-\alpha)$$

Bemerkungen

- Gebräuchliche Größen für das Konfidenzniveau sind:

  Für interne Modelle in Deutschland: α= 0,01 und 0,001
  Für interne Berechnungen in der Bank:α= 0,01 und 0,05
  Risk Metrics (JP Morgans):α= 0,05

- Die fixierte Halteperiode t sollte so gewählt werden, dass die im Portfolio enthaltenen Positionen aufgelöst werden können. Gebrüchliche Halteperioden sind:

  Für interne Modelle in Deutschland: t = 10
  Für interne Berechnungen in der Bank: t = 1 und t=10

Varianz-Kovarianz-Methode

- Modellierung der Marktdaten
- Modellierung der Wertveränderung eines Portfolios
- VaR eines Portfolio

Modellierung der Marktdaten - 1 Risikofaktor

Wir beschränken uns zunächst auf einen Risikofaktor Y
Ziel: die Bewegung (Veränderung) von Y mit Hilfe eines stochastischen Prozesses beschreiben.

Wiener Prozeß:
W - stochastische Größe
X - Normalverteilte Zufallsgröße $N \sim (0, 1)$

$$\Delta W = X \cdot \sqrt{\Delta t}$$

$\Rightarrow \Delta W \sim N(0, \Delta t)$

Modellierung der Marktdaten - 1 Risikofaktor

Verallgemeinerter Wiener Prozeß:

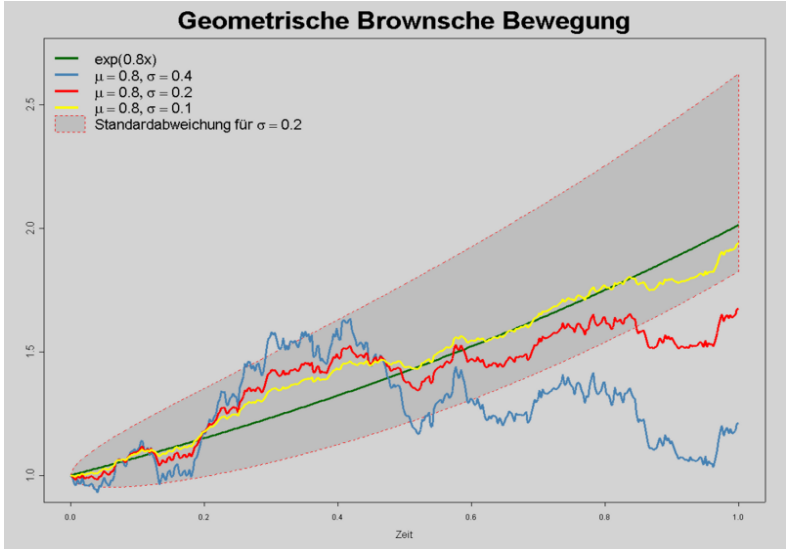
$$\Delta Y = a \cdot \Delta t + b \cdot X \cdot \sqrt{\Delta t}$$

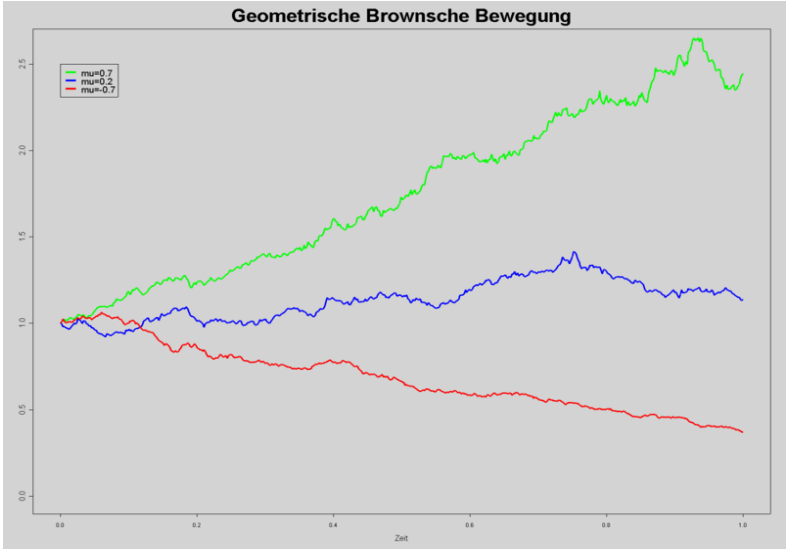
$\Rightarrow \Delta Y \sim N(a \cdot \Delta t, b^2 \cdot \Delta t)$ Interpretation:

$a \cdot \Delta t$ - deterministischer Teil mit Drift (a)
$X \cdot \sqrt{\Delta t}$ - Wiener Prozeß
b - Multiplikator des Wiener Prozesses

auch geometrische Brown'sche Bewegung genannt

geometrische Brown'sche Bewegung Interpretation





$$\Delta Y = \mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot X \cdot \sqrt{\Delta t}$$

Modellierung der Marktdaten - 1 Risikofaktor

Annahme:
Wir modellieren den Prozeß als eine geometrischen Brownschen Bewegung. Die Entwicklung des Risikofaktors Y kann durch folgende Differenzengleichung beschrieben werden:

$$\Delta Y(t) = \mu \cdot Y(t_0) \cdot \Delta t + \sigma \cdot Y(t_0) \cdot \Delta W(t)$$

oder als Differentialgleichung:

$$dY(t) = \mu \cdot Y(t) \cdot dt + \sigma \cdot Y(t) \cdot dW(t)$$

mit μ - Drift
und σ - Volatilität

$W(t)$ -Standard-Wiener Prozess

Modellierung der Marktdaten - 1 Risikofaktor

Umformung nach Itô-Lemma (stochastische Differentialgleichung)

$$dlnY(t) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma \cdot dW(t)$$

$$\begin{aligned} lnY(t) - lnY(t_0) &= \int_{t_0}^{t} (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \int_{t_0}^{t} \sigma \cdot dW(t) \\ &= (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0) + \sigma \cdot \int_{t_0}^{t} dW(t) \\ &\overbrace{=}^{\text{Itô}} (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0) + \sigma \cdot (W(t) - W(t_0)) \end{aligned}$$

Modellierung der Marktdaten - 1 Risikofaktor

Wegen $\Delta W(t) = W(t) - W(t_0) \sim N(0, t - t_0), t > t_0 \geq 0$ kann für die Veränderung des Risikofaktors in der Zeit $\Delta t = t - t_0$ geschrieben werden:

$$\Delta lnY(t) = lnY(t) - lnY(t_0) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot X$$

Wobei X eine standardnormalverteilte Zufallsröße ist. ($X \sim N(0,1)$)
Unter Verwendung des reskalierten Drifts $\tilde{\mu} = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})$ gilt:

$$\begin{aligned} \Delta lnY(t) &= \tilde{\mu}\Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot X \\ Y(t) &= Y(t_0)e^{\tilde{\mu}\Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot X} \Rightarrow \\ \Delta lnY(t) &\sim N(\tilde{\mu}\Delta t, \sigma^2 \Delta t) \end{aligned}$$

(wenn sich die Marktdaten gemäß einer geometrisch Brownsche Bewegung entwickeln, sind die Veränderungen der Marktdaten normalverteilt)

Modellierung der Marktdaten - 1 Risikofaktor

Definition der logarithmischen Rendite:

$$R(t) = \Delta lnY(t) = lnY(t) - lnY(t_0) = ln(\frac{Y(t)}{Y(t_0)})$$

$$R(t) \sim N(\tilde{\mu}\Delta t, \sigma^2 \Delta t)$$

Bemerkung: es genügt die täglichen Renditen zu berechnen ($t_0 = t - 1$):

$$R(t) = \Delta lnY(t) = lnY(t) - lnY(t-1) = ln(\frac{Y(t)}{Y(t-1)})$$

$$R(t) \sim N(\tilde{\mu}, \sigma^2)$$

Modellierung der Marktdaten - 1 Risikofaktor

weitere Modellannahme:
Zentriertheit der logarithmischen Rendite $\tilde{\mu} = 0$:

$$R(t) \sim N(0, \sigma^2)$$

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y(t_0)e^{R(t)\Delta t} \\ Y(t) &= Y(t_0)e^{\sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot X} \end{aligned}$$

VaR eines Risikofaktors

$$
\begin{aligned}
\alpha &= P(\Delta P(t) \leq VAR(t,\alpha)) = \\
&= P(Y(t) - Y(t_0) \leq VAR(t,\alpha)) = \\
&= P(Y(t_0)(e^{\sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot X} - 1)) \leq VAR(t,\alpha)) \\
&= P(X \leq a) = P(X \leq \frac{ln(1 + \frac{VAR(t,\alpha)}{Y(t_0)})}{\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}}) \\
\text{oder } a &= \frac{ln(1 + \frac{VAR(t,\alpha)}{Y(t_0)})}{\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}}
\end{aligned}
$$

da $X \sim N(0,1)$ und $\alpha = P(X \leq a) = F_X(a) \Rightarrow a = F_X^{-1}(\alpha)$

$$
\begin{aligned}
F_X^{-1}(\alpha) &= \frac{ln(1 + \frac{VAR(t,\alpha)}{Y(t_0)})}{\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}} \Rightarrow \\
VAR(t,\alpha) &= Y(t_0)(e^{\sigma \cdot \sqrt{\Delta(t)} \cdot F_X^{-1}(\alpha)} - 1)
\end{aligned}
$$

Approximation des VaR eines Risikofaktors

Taylor- Zerlegung: $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

$$\begin{aligned} e^{\sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(\alpha)} &\approx 1 + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(\alpha) \\ VAR(t, \alpha) &\approx Y(t_0)(\sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(\alpha)) \end{aligned}$$

Bemerkung:

$\sigma = \sigma_R$ Volatilität der Logarithmischen Rendite R

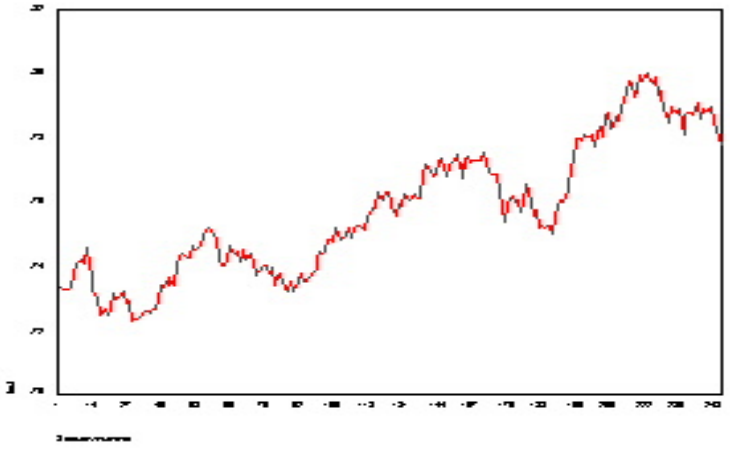
$$VAR(t, \alpha) \approx Y(t_0)[Volatilitaet \cdot \sqrt{Haltedauer} \cdot Quantil(\alpha)]$$

Beispiel: VaR eines Risikofaktors-Daten

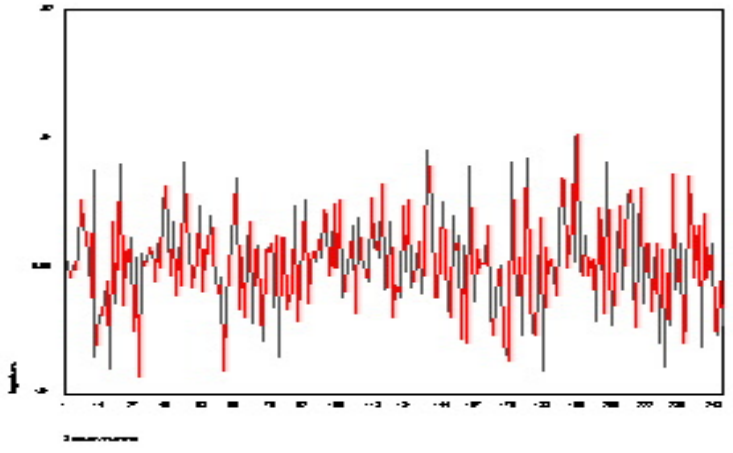
Datum	*FXR*	$R - FXR$
$2007-08-31$	0.7333	
$2007-08-30$	0.7336	-0.00038
$2007-08-29$	0.7329	$+0.00092$
$2007-08-28$	0.7329	$+0.00000$
...	...	...

$$R_i(t) = ln(\frac{Y_i(t)}{Y_i(t-1)})$$

Beispiel: VaR eines Risikofaktors-Daten



Rohdaten Y(t)

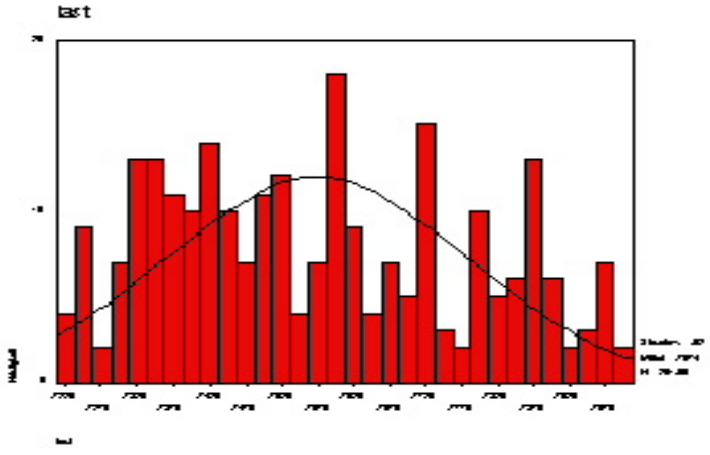


Logarithmische Rendite

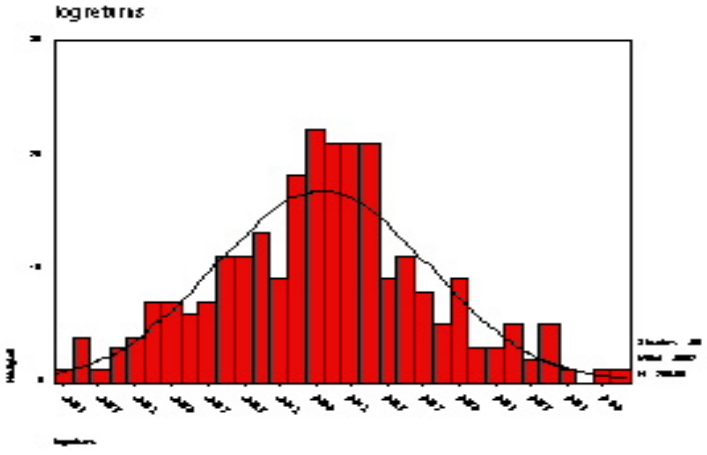
Wechselkurs Dollar - Euro (4.9.2006-31.8.2007)
$\Rightarrow$ 251(0) Beobachtungen

(Inverse Zeitachse)

Beispiel: VaR eines Risikofaktors-Häufigkeitsverteilung



Rohdaten Y(t)



Logarithmische Rendite

Beispiel: VaR eines Risikofaktors

Volatilität der Logreturns $\sigma_R = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 0.003701$

mit dem Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0.000232$

und Haltedauer $t = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta t} = 1$

Konfidenzniveau $\alpha = 0.01 \Rightarrow F^{-1}(\alpha) = -2.326348$

Wechselkurs am 31.8.2007 $Y(t_0) = 0.73338$

$$\begin{aligned} VAR(t,\alpha)) &\approx Y(t_0)\cdot\sigma_R\cdot\sqrt{\Delta t}\cdot F^{-1}(\alpha) \\ &\approx 0.73338\cdot 0.003701\cdot 1\cdot(-2.326348) \\ &\approx -0.006314 \end{aligned}$$

Beispiel: VaR eines Risikofaktors

Haltedauer $t = 10 \Rightarrow \sqrt{\Delta t} = \sqrt{10} = 3.162278$

$$\begin{aligned} VAR(t, \alpha)) &\approx Y(t_0) \cdot \sigma_R \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(\alpha) \\ &\approx 0.73338 \cdot 0.003701 \cdot 3.162278 \cdot (-2.326348) \\ &\approx -0.019968 \end{aligned}$$

Konfidenzniveau $\alpha = 0.05 \Rightarrow F^{-1}(\alpha) = -1.644854$

$$\begin{aligned} VAR(t, \alpha)) &\approx Y(t_0) \cdot \sigma_R \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(\alpha) \\ &\approx 0.73338 \cdot 0.003701 \cdot 1 \cdot (-1.644854) \\ &\approx -0.004465 \end{aligned}$$

VaR eines Instrumentes - 1 Risikofaktor

bisher: $P(t) = Y(t) \Rightarrow \Delta P(t) = Y(t) - Y(t_0)$
nun: $P(t) = N \cdot Y(t) \Rightarrow \Delta P(t) = N(Y(t) - Y(t_0))$

$$\begin{aligned} VAR(t,\alpha)) &\approx N \cdot Y(t_0) \cdot \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \Phi^{-1}(\alpha) \\ &\approx N(t_0) \cdot \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \Phi^{-1}(\alpha) \end{aligned}$$

mit:
$N(t_0) = N \cdot Y(t_0)$ - Portfoliowert zum Zeitpunkt t_0

$$VAR(t,\alpha) \approx N(t_0)[Volatilitaet \cdot \sqrt{Haltedauer} \cdot Quantil(\alpha)]$$

Beispiel: VaR einer FX-Cash Position - 1 Risikofaktor

Position N = 1,000,000 USD Heimatwährung EUR
Volatilität der Logreturns $\sigma_R = 0.0037$
mit dem Mittelwert $\bar{x} = 0.000232$
und Haltedauer $t = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta t} = 1$
Konfidenzniveau $\alpha = 0.01 \Rightarrow F^{-1}(\alpha) = -2.326348$
Wechselkurs am 31.8.2007 $Y(t_0) = 0.73338$

$$
\begin{aligned}
VAR(t, \alpha)) &\approx N \cdot Y(t_0) \cdot \sigma_R \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(\alpha) \\
&\approx 1,000,000.00 \cdot 0.73338 \cdot 0.0037 \cdot 1 \cdot (-2.326348) \\
&\approx 733,381.79 \cdot 0.0037 \cdot 1 \cdot (-2.326348) \\
&\approx -6,314.28
\end{aligned}
$$

Beispiel: VaR einer FX-Cash Position - 1 Risikofaktor

Haltedauer $t = 10 \Rightarrow \sqrt{\Delta t} = \sqrt{10} = 3.162278$

$$\begin{aligned} VAR(t, \alpha)) &\approx N \cdot Y(t_0) \cdot \sigma_R \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(\alpha) \\ &\approx 733,381.79 \cdot 0.0037 \cdot 3.162278 \cdot (-2.326348) \\ &\approx -19,967.51 \end{aligned}$$

Konfidenzniveau $\alpha = 0.05 \Rightarrow F^{-1}(\alpha) = -1.644854$

$$\begin{aligned} VAR(t, \alpha)) &\approx N \cdot Y(t_0) \cdot \sigma_R \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(\alpha) \\ &\approx 733,381.79 \cdot 0.0037 \cdot 1 \cdot (-1.644854) \\ &\approx -4,464.54 \end{aligned}$$

Modellierung der Marktdaten - n Risikofaktoren

Bisher erfolgte die Modellierung durch eine eindimensinale geometrische Brownsche Bewegung:

$$
\begin{aligned}
dY(t) &= \mu \cdot Y(t) \cdot dt + \sigma \cdot Y(t) \cdot dW(t) \\
Y(t) &= Y(t_0) e^{\tilde{\mu}\Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot W} \\
R(t) &\sim N(\tilde{\mu}\Delta t, \sigma\Delta t) \\
\tilde{\mu} &= \mu - \frac{\sigma^2}{2}
\end{aligned}
$$

Modellierung der Marktdaten - n Risikofaktoren

Die Modellierung erfolgt nun durch eine mehrdimensinale geometrische Brownsche Bewegung:

$$
\begin{aligned}
dY_i(t) &= \mu \cdot Y_i(t) \cdot dt + Y_i(t) \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \cdot dW_j(t) \\
Y_i(t) &= Y(t_0) e^{(\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \cdot W_j(t) + t \cdot (\mu_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2)} \\
R_i(t) &\sim N_n(\tilde{\mu}_i \Delta t, \Sigma \cdot \Sigma^T \cdot \Delta t) \\
\tilde{\mu}_i &= \mu_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2
\end{aligned}
$$

Modellierung der Marktdaten - n Risikofaktoren

mit der Kovarianzmatrix Σ :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

mit $\sigma_{ij} = \sigma_i \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_j$
$\rho_{ij} -$ Korrelationskoeffizient
$\sigma_{ij} -$ Kovarianzen

Modellierung der Marktdaten - n Risikofaktoren

Der Vektor der eintägigen logarithmischen Renditen:

$$R(t) = \begin{pmatrix} R_1(t) \\ \dots \\ R_j(t) \\ \dots \\ R_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ln\frac{Y_1(t)}{Y_1(t-1)} \\ \dots \\ ln\frac{Y_j(t)}{Y_j(t-1)} \\ \dots \\ ln\frac{Y_n(t)}{Y_n(t-1)} \end{pmatrix}$$

$$R(t) \sim N_n(0\,, \Sigma \cdot \Sigma^T)$$

Modellierung der Marktdaten - n Risikofaktoren

unter Verwendung der eintägigen Renditen und der Modellannahme der Zentriertheit ($\tilde{\mu}_i = 0$) erhält man :

$$
\begin{aligned}
Y_i(t) &= Y_i(t_0) \cdot e^{(\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \Delta W_i(t))} \\
&= Y_i(t_0) \cdot e^{(\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} X_i \Delta t)} \\
&= Y_i(t-1) \cdot e^{(\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} X_i)} \\
X_i &\sim N_n(0,1)
\end{aligned}
$$

Approximation der Wertveränderung - n Risikofaktoren

$$\begin{aligned}\Delta P &= P(Y_1(t), Y_2(t), ..., Y_n(t)) - P(Y_1(t_0), Y_2(t_0), ..., Y_n(t_0)) = \\ &= P(R_1(t), R_2(t), ..., R_n(t)) - P(R_1(t_0), R_2(t_0), ..., R_n(t_0))\end{aligned}$$

Taylorzerlegung

$$\begin{aligned}\Delta P &\approx \sum_{i=1}^{n} P'_{R_i}\Big|_{t=t_0}(R_i(t) - R_i(t_0)) + P'_{\nu}\Big|_{t=t_0}(\nu(t) - \nu(t_0)) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P''_{R_i,R_j}\Big|_{t=t_0}(R_i(t) - R_i(t_0))(R_j(t) - R_j(t_0)) \\ &+ \frac{1}{2}P''_{\nu}\Big|_{t=t_0}(\nu(t) - \nu(t_0))^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} P''_{R_i,\nu}\Big|_{t=t_0}(R_i(t) - R_i(t_0))(\nu(t) - \nu(t_0))\end{aligned}$$

Approximation der Wertveränderung - n Risikofaktoren

ohne Ableitung nach der Zeit

$$
\begin{aligned}
\Delta P &\approx \sum_{i=1}^{n} P'_{R_i}\Big|_{t=t_0} (R_i(t) - R_i(t_0)) + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P''_{R_i,R_j}\Big|_{t=t_0} (R_i(t) - R_i(t_0))(R_j(t) - R_j(t_0)) \\
&\approx \sum_{i=1}^{n} P'_{R_i}\Big|_{t=t_0} \Delta R_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P''_{R_i,R_j}\Big|_{t=t_0} \Delta R_i(t)\Delta(R_j(t)\,(*) \\
&\approx \Delta \cdot R + \frac{1}{2} \cdot R^T \cdot \Gamma \cdot R \\
\Delta &= \|\Delta_i\| \quad \Delta_i = P'_{R_i}\Big|_{t=t_0} \\
\Gamma &= \|\Gamma_{ij}\| \quad \Gamma_{ij} = P''_{R_i,R_j}\Big|_{t=t_0}
\end{aligned}
$$

Marktdaten, Marktrisikodaten und logarithmische Rendite

Wir unterscheiden:

- Marktdaten ($Y_i(t)$)
- Marktrisikodaten
- logarithmische Rendite ($R_i(t)$)

$$\textit{Marktdaten} \underbrace{\rightarrow}_{\textit{MAPPER}} \textit{Marktrisikodaten} \underbrace{\rightarrow}_{\textit{MAPPER}} \textit{logarithmischeRendite}$$

$$P'_{R_i}\Big|_{t=t_0} = P'_{Y_i}\Big|_{t=t_0} \cdot Y_i(t_0)$$

$$\Delta_i^* = P'_{Y_i}\Big|_{t=t_0} \cdot Y_i(t_0)$$

VaR eines Portfolios / mehrere Risikofaktoren

Annahme:

lineare Aproximation der Wertveränderung des Portfolios
$\Delta P \approx \Delta * R$ *mit* $R \sim N_n(0, \Delta t \Sigma^T \Sigma)$
$\Rightarrow$
ΔP - lineare Transformation von multivariat normalverteilten Zufallsgrößen

$$
\begin{aligned}
\textit{allgemein} \quad &: \quad Z = a^T \cdot Y, Y \sim N_n(\mu, \Sigma^T \Sigma) \\
\sigma_Z^2 \quad &= \quad var(Z) = var(a^T \cdot Y) = a^T \cdot \Sigma \cdot a \\
\sigma_P^2 \quad &= \quad var(\Delta P) = \Delta^{*T} \Sigma \Delta t \Delta^* \quad \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
Var(t, \alpha) \quad = \quad \sigma_P \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(\alpha) = \sqrt{\Delta^{*T} \Sigma \Delta^*} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(\alpha)
$$

VaR eines Portfolios / mehrere Risikofaktoren

Annahme:

nichtlineare Aproximation der Wertveränderung des Portfolios:

$$\Delta P \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^* \Delta W_i(t) + + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^* \Delta W_i(t) \cdot \Delta W_j(t)$$

$\Delta W_i(t) \sim N_n(0, \Sigma \cdot \Sigma^T \Delta t) \quad \Rightarrow$

$var(\Delta P) = \Delta^{*T} \Sigma \Delta t \Delta^* + \frac{1}{2}[(\Gamma^* \Sigma \Delta t)^2]$

ΔP - in der Regel nicht normalverteilt $\Rightarrow$
$Var(t, \alpha) \neq -\sigma_P \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(\alpha)$
$\Rightarrow$ Verwendung der Cornish-Fisher-Approximation

Beispiel 1: VaR für ein USD/EUR Forward Trade

Position $N_{USD} = -1,000,000$ USD (Heimatwährung EUR)
Verkauf der Position in einem Jahr für $N_{EUR} = 700,000$ EUR

Risikofaktoren:

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= w(t) - \mathit{WechselkursEUR/USD} \\ Y_2(t) &= \mathit{IBZ}_{USD}(t) - \mathit{Zero} - \mathit{ZinsenUSD} \\ Y_3(t) &= \mathit{IBZ}_{EUR}(t) - \mathit{Zero} - \mathit{ZinsenEUR} \end{aligned}$$

Wert der Position / Portfolio $P(t_0)$:

$$\begin{aligned} P(t_0) &= P(Y_1(t_0), Y_2(t_0), Y_3(t_0)) = \\ &= P(w(t_0), \mathit{IBZ}_{USD}(t_0), \mathit{IBZ}_{EUR}(t_0)) = \\ &= N_{USD} \cdot w(t_0) \cdot \frac{1}{1 + \mathit{IBZ}_{USD}(t_0)} + N_{EUR} \cdot \frac{1}{1 + \mathit{IBZ}_{EUR}(t_0)} \end{aligned}$$

Beispiel 1: VaR für ein USD/EUR Forward Trade

Risikofaktoren:

$$
\begin{aligned}
Y_1(t) &= w(t) - \ \mathit{WechselkursEUR/USD} \\
Y_1(t) &= \mathit{IBD}_{USD}(t) = \frac{1}{1 + \mathit{IBZ}_{USD}(t)} - \ \mathit{Diskontfaktoren\ USD} \\
Y_1(t) &= \mathit{IBD}_{EUR}(t) = \frac{1}{1 + \mathit{IBZ}_{EUR}(t)} - \ \mathit{Dscontfaktoren\ EUR}
\end{aligned}
$$

Wert der Position / Portfolio $P(t_0)$:

$$
\begin{aligned}
P(t_0) &= P(w(t_0), \mathit{IBD}_{USD}(t_0), \mathit{IBD}_{EUR}(t_0)) = \\
&= N_{USD} \cdot w(t_0) \cdot \mathit{IBD}_{USD}(t_0) + N_{EUR} \cdot \mathit{IBD}_{EUR}(t_0)
\end{aligned}
$$

Beispiel 1: VaR für ein USD/EUR Forward Trade

N_{USD} = -1,000,000 USD
N_{EUR} = 700,000 EUR
t_0: 31.8.2007

Risikofaktoren:

$w(t_0)$ =0.733382
$IBD_{USD}(t_0)$=0.952415
$IBD_{EUR}(t_0)$=0.957041

$$\begin{aligned} P(t_0) &= N_{USD} \cdot w(t_0) \cdot IBD_{USD}(t_0) + N_{EUR} \cdot IBD_{EUR}(t_0) = \\ &= -1,000,000 \cdot 0.733382 \cdot 0.952415 + 700,000 \cdot 0.957041 = \\ &= -28,554.84 \end{aligned}$$

Beispiel 1: VaR für ein USD/EUR Forward Trade

Berechnung der ersten Ableitungen nach Risikofaktoren:

$$P(t_0) = N_{USD} \cdot w(t_0) \cdot IBD_{USD}(t_0) + N_{EUR} \cdot IBD_{EUR}(t_0)$$

$$\begin{aligned} P'_w\Big|_{t=t_0} &= N_{USD} \cdot IBD_{USD}(t_0) \\ P'_{IBD_{USD}}\Big|_{t=t_0} &= N_{USD} \cdot w(t_0) \\ P'_{IBD_{EUR}}\Big|_{t=t_0} &= N_{EUR} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'_w &= -1,000,000 \cdot 0.952415 = -952414.78 \\ P'_{IBD_{USD}} &= -1,000,000 \cdot 0.733382 = -733381.80 \\ P'_{IBD_{EUR}} &= 700,000 \end{aligned}$$

Beispiel 1: VaR für ein USD/EUR Forward Trade

Berechnung der Sensitivitäten Δ^*:

$$\Delta_i^* = P'_{Y_i}\Big|_{t=t_0} \cdot Y_i(t_0)$$

$$\begin{aligned} P'_w \cdot w(t_0) &= -952414.78 \cdot 0.733382 = -698,483.66 \\ P'_{IBD_{USD}} \cdot IBD_{USD}(t_0) &= -733381.80 \cdot 0.952415 = -698,483.66 \\ P'_{IBD_{EUR}} \cdot IBD_{EUR}(t_0) &= 700,000 \cdot 0.957041 = 669,928.82 \end{aligned}$$

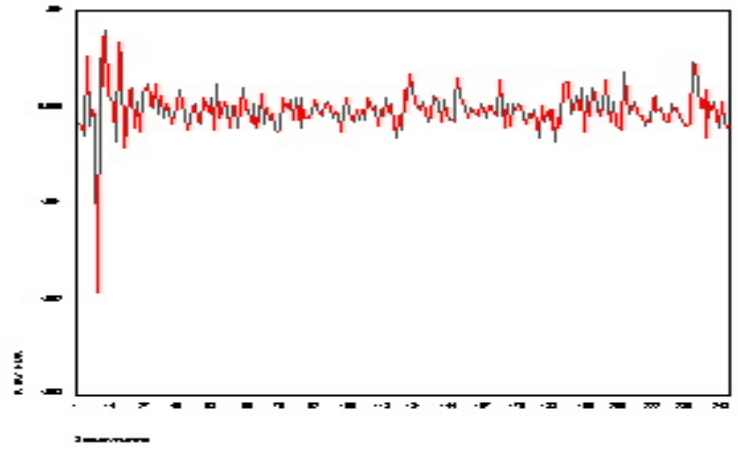
Beispiel 1: VaR für ein USD/EUR Forward Trade

Datum	*FXR*	*R − FXR*	*IBD − EUR*	*R − IBD − EUR*	*IBD − USD*	*R − IBD − USD*
2007 − 08 − 31	0.7333		0.9570		0.9524	
2007 − 08 − 30	0.7336	−0.00038	0.9572	−0.00017	0.9524	−0.00006
2007 − 08 − 29	0.7329	+0.00092	0.9574	−0.00020	0.9530	−0.00061
2007 − 08 − 28	0.7329	+0.00000	0.9576	−0.00029	0.9530	+0.00005
...	...	...	...	...	...	...

$$R_i(t) \quad = \quad ln(\frac{Y_i(t)}{Y_i(t-1)})$$

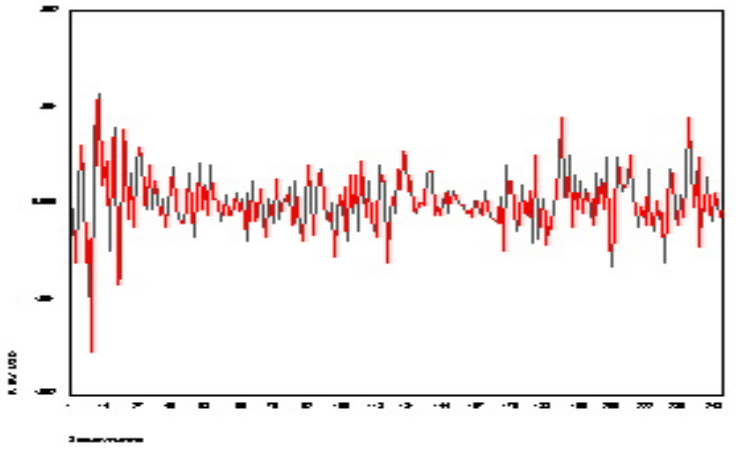
Beispiel 1: VaR für ein USD/EUR Forward Trade

LogReturns



Logarithmische Rendite

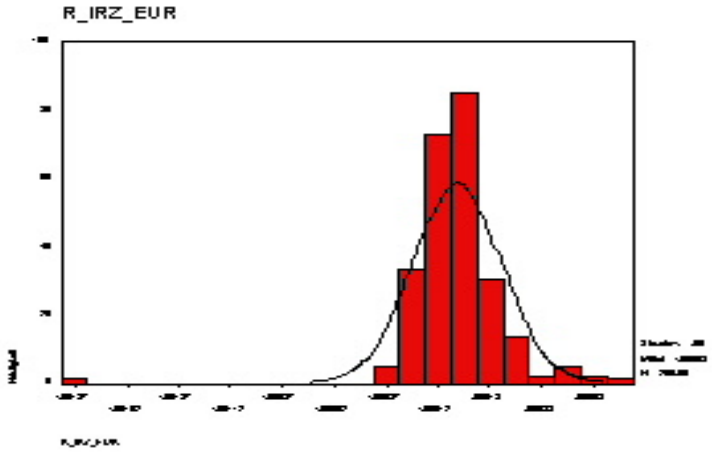
$$ln(\frac{IBD_{EUR}(t)}{IBD_{EUR}(t-1)})$$



Logarithmische Rendite

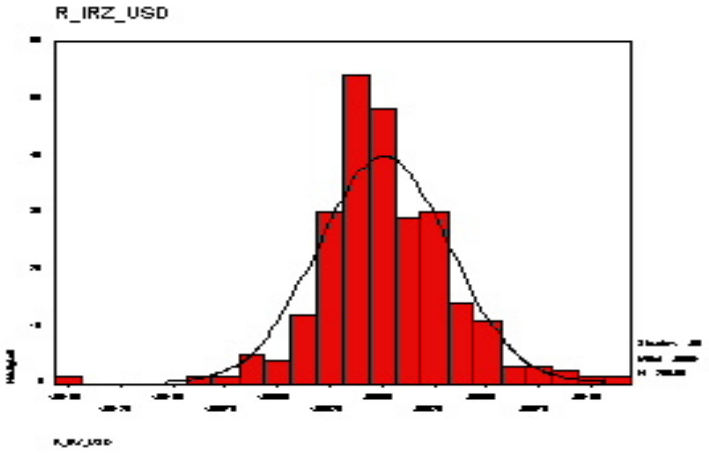
$$ln(\frac{IBD_{USD}(t)}{IBD_{USD}(t-1)})$$

Beispiel 1: VaR für ein USD/EUR Forward Trade LogReturns



Logarithmische Rendite

$$ln(\frac{IBD_{EUR}(t)}{IBD_{EUR}(t-1)})$$



Logarithmische Rendite

$$ln(\frac{IBD_{USD}(t)}{IBD_{USD}(t-1)})$$

Beispiel 1: VaR für ein USD/EUR Forward Trade

Berechnung der Risiken nach Risikofaktoren:

$$
\begin{aligned}
VaR_{Y_i}(t,\alpha)) &\approx \Delta_i \cdot Y_i(t_0) \cdot \sigma_i \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \Phi^{-1}(\alpha) \\
VaR_{Y_i}(t,\alpha)) &\approx P'_{Y_i}\Big|_{t=t_0} \cdot Y_i(t_0) \cdot \sigma_i \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \Phi^{-1}(\alpha) \\
\textit{hier} &: \Delta t = 1\,,\ \alpha = 0,01
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
VaR_w &= P'_w \cdot w(t_0) \cdot \sigma_w \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \Phi^{-1}(\alpha) \\
&= -952,414.78 \cdot 0.7334 \cdot 0.0037 \cdot 1 \cdot (-2.326348) = 6,001.35 \\
VaR_{IBD_{USD}} &= P'_{IBD_{USD}} \cdot IBD_{USD}(t_0) \cdot \sigma_{IBD_{USD}} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \Phi^{-1}(\alpha) \\
&= -733,381.80 \cdot 0.9524 \cdot 0.0002 \cdot 1 \cdot (-2.326348) = 346.30 \\
VaR_{IBD_{EUR}} &= P'_{IBD_{EUR}} \cdot IBD_{EUR}(t_0) \cdot \sigma_{IBD_{EUR}} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \Phi^{-1}(\alpha) \\
&= 700,000.00 \cdot 0.9570 \cdot 0.0003 \cdot 1 \cdot (-2.326348) = -486.31
\end{aligned}
$$

Beispiel 1: VaR für ein USD/EUR Forward Trade

Berechnung des GesamtVar:

$$\begin{aligned} Var(t,\alpha) &= \sqrt{\Delta^{*T}\Sigma\Delta^{*}} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(\alpha) \\ hier &: \Delta t = 1\,,\ \alpha = 0,01 \ \Rightarrow \\ &= -\sqrt{6,554,785.68} \cdot 1 \cdot (-2.326348) = -5,955.99 \end{aligned}$$

mit

$$\Delta^{*T} = \begin{pmatrix} -698,483.66 & -698,483.66 & 669,928.82 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.0000136407 & 0.0000000171 & 0.0000002320 \\ 0.0000000171 & 0.0000000454 & 0.0000000504 \\ 0.0000002320 & 0.0000000504 & 0.0000000974 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1: VaR für ein USD/EUR Forward Trade

Berechnung des GesamtVar:

$$\begin{aligned} Var(t,\alpha) &= -\sqrt{VaR_Y^T \cdot P \cdot VaR_Y} \\ &= -\sqrt{35,473,808.14} = -5,955.99 \end{aligned}$$

mit

$$VaR_Y^T = \begin{pmatrix} 6001.35 & 346.30 & -486.31 \end{pmatrix}$$

P - Korrelationsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1.000000000 & 0.021698758 & 0.201305928 \\ 0.021698758 & 1.000000000 & 0.757755193 \\ 0.201305928 & 0.757755193 & 1.000000000 \end{pmatrix}$$

Haltedauer 10 Tage

constant level of Risk:

$$\begin{aligned} Var(t,\alpha) &= \sqrt{\Delta^{*T}\Sigma\Delta^*}\cdot\sqrt{\Delta t}\cdot F^{-1}(\alpha) \\ hier &: \Delta t = 10\,,\ \alpha = 0,01 \ \Rightarrow \\ &= \sqrt{6,554,785.68}\cdot\sqrt{10}\cdot(-2.326348) = -18,834.49 \end{aligned}$$

Verwendung der 10-tägigen Rendite:

$$\begin{aligned} Var(t,\alpha) &= \sqrt{\Delta^{*T}\Sigma\Delta^*}\cdot\sqrt{\Delta t}\cdot F^{-1}(\alpha) \\ hier &: \Delta t = 1\,,\ \alpha = 0,01 \ \Rightarrow \\ &= \sqrt{70,080,761.65}\cdot 1\cdot(-2.326348) = -19,474.85 \end{aligned}$$

mit

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0,0001420861 & -0,0000000436 & -0,0000016694 \\ -0,0000000436 & 0,0000003203 & 0,0000004273 \\ -0,0000016694 & 0,0000004273 & 0,0000008036 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1: gewichtetes und ungewichtetes VaR

ungewichtet *gewichtet*

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2} \qquad \sigma = \sqrt{(1-\lambda)\sum_{i=1}^{n}\lambda^{i-1}(y_i - \overline{y})^2}$$

i	$\frac{1}{n}$	$(1-\lambda)\lambda^{i-1}$
1	0,004	0,060
2	0,004	0,056
3	0,004	0,053
4	0,004	0,050
...		
250	0,004	0,000

ungewichtet *gewichtet*

$\sigma = 0.0037$ $\sigma = 0.0036$

$$Var(t,\alpha) \quad = \quad \sqrt{\Delta^{*T}\Sigma\Delta^{*}} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot F^{-1}(\alpha)$$

Inhalte

- Zielstellung
- Momente / Kumulanten einer Verteilung
- Zusammenhang zwischen Quantil und Kumulanten einer Verteilung
- Bestimmung der Kumulanten /Momente
- ein Beispiel
- Analysemöglichkeiten

Zielstellung

Ziel: Praktikabler Lösungsansatz zur VaR-Berechnung, auch wenn die Verteilungsfunktion der Wertveränderung des Portfolios nicht oder nur schwierig explizit darstellbar ist (Besonders bei Verwendung der quadratischen Approximation der Wertveränderungsfunktion).

Cornish-Fisher-Approximation unterstellt einen Zusammenhang zwischen den Parametern und Kumulanten einer Verteilung und dem Quantil der Verteilung und dem Quantil der Standardnormalverteilung.

Momente einer Verteilung

$$
\begin{aligned}
X &- \textit{Zufallsvariable} \\
r &- \textit{reelleZahl} \\
m_r(k) &- k - \textit{tes Moment bezueglich der Zahl } r \\
m_r(k) &= E[(X-r)^k] \\
m_0(k) &= E[(X)^k] \;\; \textit{Anfangsmomente}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_0(1) &= E[X] = \mu \\
m_0(2) &= E[(X)^2]
\end{aligned}
$$

Kumulanten und Momente

Kumulanten sind ebenfalls Kenngrößen einer Verteilung, die aus der Charakteristischen Funktion abgeleitet werden. Es besteht ein enger Zusammenhang zu den Momenten und anderer bekannter Parameter einer Verteilung.

$$
\begin{aligned}
\kappa_1 &= m_0(1) = \mu - (\textit{Mittelwert}) \\
\kappa_2 &= m_0(2) - m_0(1)^2 = var(x) - (\textit{Varianz}) \\
\kappa_3 &= 2m_0(1)^3 - 3m_0(1)m_0(2) + m_0(3) = \\
&= \varsigma_3\sqrt{\kappa_2^3} - (\varsigma_3 - \textit{Skewness}) \\
\kappa_4 &= 6m_0(1)^4 + 12m_0(1)^2 m_0(2) - 3m_0(2)^2 - 4m_0(1)m_0(3) + m_0(4) = \\
&= \varsigma_4\kappa_2^2 - (\varsigma_4 - \textit{Kurtosis})
\end{aligned}
$$

Quantile und Kumulanten

Die Cornish-Fischer-Approximation berechnet näherungsweise das Quantil der Verteilung der Wertveränderung des Portfolios in Abhängigkeit der Kumulanten (Momente, Parameter)der Verteilung der Wertveränderung des Portfolios und dem Quantil der Standardnormalverteilung

$$x_\alpha \approx \kappa_1 + \sqrt{\kappa_2}\left(z_\alpha + \frac{1}{6}\frac{\kappa_3}{\sqrt{\kappa_2^3}}(z_\alpha^3 - 1) + \frac{1}{24}\frac{\kappa_4}{\kappa_2^2}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha) - \frac{1}{36}\frac{\kappa_3^2}{\kappa_2^3}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)\right)$$

x_α – α – *Quantil der Verteilung der Wertveraenderung*

z_α – α – *Quantil der Standardnormalverteilung*

κ_i – *Kumulanten*

Quantile und Parameter

andere Darstellung: die Cornish-Fischer-Approximation berechnet näherungsweise das Quantil der Verteilung der Wertveränderung des Portfolios in Abhängigkeit der Parameter der Verteilung der Wertveränderung des Portfolios und dem Quantil der Standardnormalverteilung

$$x_\alpha \approx \mu + \sigma\left(z_\alpha + \frac{1}{6}\varsigma_3(z_\alpha^3 - 1) + \frac{1}{24}\varsigma_4(z_\alpha^3 - 3z_\alpha) - \frac{1}{36}\varsigma_3^2(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)\right)$$

x_α – *α – Quantil der Verteilung der Wertveraenderung*

z_α – *α – Quantil der Standardnormalverteilung*

$\mu, \sigma, \varsigma_3, \varsigma_4$ – *Parameter der Verteilung*

Berechnung der Kumulanten

Die Kumulanten werden aus der Kovarianzmatrix Σ, den Deltas Δ (Vektor der ersten Ableitungen) und den Gammas in der Form der Hessematrix Γ (Matrix der zweiten Ableitungen) berechnet:

$$
\begin{aligned}
\kappa_1 &= \frac{1}{2} trace(\Gamma\Sigma) \\
\kappa_2 &= \frac{1}{2} trace((\Gamma\Sigma)^2) + \Delta^T\Sigma\Delta \\
\kappa_3 &= trace((\Gamma\Sigma)^3) + 3\Delta^T\Sigma(\Gamma\Sigma)\Delta \\
\kappa_4 &= trace(3(\Gamma\Sigma)^4) + 12\Delta^T\Sigma(\Gamma\Sigma)^2\Delta
\end{aligned}
$$