Übungsaufgaben

Plain Vanilla Swap VaR-Rechner

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe 1: Grundlegende Swap-Bewertung **2**

2 Aufgabe 2: DV01 und Zinssensitivität **3**

3 Aufgabe 3: Value at Risk (VaR) **5**

4 Aufgabe 4: Zinskurven und Forward Rates **6**

5 Aufgabe 5: Konvexität und nicht-lineare Effekte **8**

6 Aufgabe 6: Szenario-Analyse **10**

7 Aufgabe 7: Vergleich verschiedener Zinskurvenformen **11**

8 Aufgabe 8: Expected Shortfall (CVaR) **13**

Einführung

Diese Übungsaufgaben dienen zur Vertiefung der theoretischen Konzepte des Plain Vanilla Swap VaR-Rechners. Sie können den interaktiven Online-Rechner verwenden, um Ihre Berechnungen zu überprüfen und die Ergebnisse zu visualisieren.

Hinweis: Bei allen Aufgaben verwenden wir 250 Handelstage pro Jahr für VaR-Berechnungen.

1 Aufgabe 1: Grundlegende Swap-Bewertung

Aufgabenstellung

Ein Unternehmen schließt einen 5-jährigen Plain Vanilla Interest Rate Swap ab mit folgenden Parametern:

- **Nominalbetrag:** EUR 10.000.000
- **Fester Zinssatz:** 3,0% p.a.
- **Zahlungsfrequenz:** Halbjährlich
- **Swap-Richtung:** Payer Swap (zahlt fest, erhält variabel)

Die aktuelle Zinskurve (flach) liegt bei 2,8% p.a. für alle Laufzeiten.

Aufgaben

a) Berechnen Sie den Present Value (PV) des Swaps.

b) Ist der Swap für das Unternehmen aktuell vorteilhaft oder nachteilig? Begründen Sie.

c) Wie viele Zahlungen werden über die Laufzeit geleistet?

Lösungshinweise

a) Present Value:

Bei einem Payer Swap zahlt das Unternehmen die feste Seite und erhält die variable Seite. Der PV ergibt sich aus der Differenz:

$$PV = PV_{Float} - PV_{Fix} \tag{1}$$

Für die feste Seite bei halbjährlicher Zahlung (10 Zahlungen):

$$PV_{Fix} = \sum_{i=1}^{10} \frac{Nominal \cdot r_{fix}}{2} \cdot e^{-r_i \cdot t_i} \tag{2}$$

Mit $r_{fix} = 3{,}0\%$, $r_i = 2{,}8\%$ (Diskontrate, stetige Verzinsung), $t_i = 0{,}5;\ 1{,}0;\ \ldots;\ 5{,}0$ Jahre.

Berechnung eines Zahlungsstroms:

$$Zahlung = 10.000.000 \cdot \frac{0{,}03}{2} = 150.000 \text{ EUR} \tag{3}$$

Beispiel für die erste Zahlung (nach 0,5 Jahren):

$$PV_1 = 150.000 \cdot e^{-0{,}028 \cdot 0{,}5} = 150.000 \cdot 0{,}98610 = 147.915 \text{ EUR} \tag{4}$$

Summe über alle 10 Zahlungen: $PV_{Fix} \approx 1.389.958$ EUR.

Die variable Seite (Floating Leg) lässt sich ohne einzelne Forward Rates bewerten, da sie zusammen mit der Rückzahlung des Nominals immer zum Nennwert notiert:

$$PV_{Float} = Nominal \cdot \left(1 - e^{-r \cdot T}\right) = 10.000.000 \cdot \left(1 - e^{-0{,}028 \cdot 5}\right) \approx 1.306.418 \text{ EUR} \tag{5}$$

$$PV = 1.306.418 - 1.389.958 \approx -83.540 \text{ EUR} \tag{6}$$

Ergebnis: Der PV ist **negativ** (ca. −84.000 EUR). Das Unternehmen zahlt 3,0 %, während der faire Swapsatz bei der aktuellen Kurve nur rund 2,82 % beträgt (Par-Swap-Satz $= \frac{1-DF(T)}{0{,}5 \sum DF(t_i)}$).

b) Vorteilhaftigkeit:

Da der PV negativ ist, ist der Swap für das Unternehmen derzeit **nachteilig**: Es zahlt einen festen Satz über dem Marktniveau und erhält dafür variable Zahlungen, deren Barwert geringer ist. Vorteilhaft würde der Payer Swap erst, wenn die Zinsen steigen (siehe Aufgabe 6).

c) Anzahl Zahlungen:

Bei 5 Jahren und halbjährlicher Frequenz: $5 \times 2 = 10$ Zahlungen

2 Aufgabe 2: DV01 und Zinssensitivität

Aufgabenstellung

Verwenden Sie denselben Swap aus Aufgabe 1. Das Risikomanagement möchte die Zinssensitivität des Swaps verstehen.

Aufgaben

a) Berechnen Sie den DV01 (Dollar Value of 1 Basis Point).

b) Was bedeutet dieser Wert in der Praxis?

c) Wenn die Zinsen parallel um 10 Basispunkte steigen, wie verändert sich der PV?

d) Berechnen Sie die Modified Duration des Swaps.

Lösungshinweise

a) DV01-Berechnung:

Der DV01 misst die Wertänderung bei einer Zinsänderung um 1 Basispunkt (0,01 %):

$$DV01 = |PV(r + 0{,}01\%) - PV(r)| \tag{7}$$

Praktische Vorgehensweise:

1. Berechne PV bei aktueller Zinskurve (2,8 %): −83.540 EUR
2. Verschiebe gesamte Kurve um +1 bp (2,81 %)
3. Berechne neuen PV: −78.820 EUR
4. Differenz = DV01

Ergebnis: DV01 ≈ EUR 4.720

b) Praktische Bedeutung:

Der DV01 zeigt, um wie viel EUR sich der Swap-Wert ändert, wenn die Zinsen um 1 bp steigen bzw. fallen. Bei einem Payer Swap (zahlt fest, erhält variabel):

- Zinsen steigen ⇒ PV steigt (Gewinn), da die erhaltenen variablen Zahlungen steigen
- Zinsen fallen ⇒ PV sinkt (Verlust)

Wirtschaftlich entspricht der Payer Swap einer Short-Position in einer 5-jährigen Festzinsanleihe.

c) Zinsanstieg um 10 bp:

$$\Delta PV \approx +DV01 \times 10 = 4.720 \times 10 \approx +47.200 \text{ EUR} \tag{8}$$

Die exakte Neubewertung ergibt +47.095 EUR; der kleine Unterschied entsteht durch die Konvexität (Aufgabe 5).

d) Modified Duration:

Die übliche Formel bezieht den DV01 auf den Barwert:

$$Modified\ Duration = \frac{DV01 \times 10.000}{|PV|} = \frac{4.720 \times 10.000}{83.540} \approx 565 \tag{9}$$

Dieser Wert ist **nicht sinnvoll interpretierbar**: Der Barwert eines Swaps liegt nahe null (bei Abschluss genau null), sodass jede auf den PV bezogene Duration beliebig groß wird. Für Swaps bezieht man die Duration deshalb auf das Nominal:

$$D_{Nominal} = \frac{DV01 \times 10.000}{Nominal} = \frac{4.720 \times 10.000}{10.000.000} \approx 4{,}7 \text{ Jahre} \tag{10}$$

Der Swap reagiert also auf Zinsänderungen wie eine 5-jährige Anleihe über 10 Mio. EUR mit einer Duration von rund 4,7 Jahren (mit umgekehrtem Vorzeichen).

3 Aufgabe 3: Value at Risk (VaR)

Aufgabenstellung

Das Risikomanagement möchte den maximalen potenziellen Verlust des Swaps aus Aufgabe 1 quantifizieren.

Zusätzliche Parameter:

- **Konfidenzniveau:** 95%
- **Zeithorizont:** 10 Tage
- **Zinsvolatilität:** 1,2% p.a.

Aufgaben

a) Berechnen Sie den 10-Tages VaR bei 95% Konfidenz.

b) Interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Wie ändert sich der VaR bei 99% Konfidenz?

d) Wie ändert sich der VaR bei einem Zeithorizont von 1 Tag?

Lösungshinweise

a) VaR-Berechnung:

Die parametrische VaR-Formel:

$$VaR = z_\alpha \cdot \sigma_{scaled} \cdot 10.000 \cdot |DV01| \tag{11}$$

Wobei:

- z_α = Z-Score für Konfidenzniveau (95 % $\Rightarrow$ 1,645)
- $\sigma_{scaled} = \sigma_{p.a.} \cdot \sqrt{\frac{T}{250}}$ (Skalierung auf T Tage)
- $\sigma_{p.a.} = 1{,}2\% = 0{,}012$ (absolute Zinsvolatilität, also 120 bp p.a.)
- $T = 10$ Tage
- $DV01 \approx 4.720$ EUR (aus Aufgabe 2)

Der Faktor 10.000 rechnet die Zinsänderung von Dezimalzahl in Basispunkte um.
Berechnung:

$$\sigma_{scaled} = 0{,}012 \cdot \sqrt{\frac{10}{250}} = 0{,}012 \cdot 0{,}2 = 0{,}0024 \quad (= 24 \text{ bp}) \tag{12}$$

$$VaR = 1{,}645 \cdot 0{,}0024 \cdot 10.000 \cdot 4.720 \tag{13}$$

$$VaR = 1{,}645 \cdot 24 \cdot 4.720 \tag{14}$$

$$VaR \approx 186.300 \text{ EUR} \tag{15}$$

b) Interpretation:

Mit 95 % Wahrscheinlichkeit wird der Verlust aus dem Swap in den nächsten 10 Handelstagen nicht größer als EUR 186.300 sein. Anders formuliert: In 5 % der 10-Tages-Zeiträume wird der Verlust diesen Betrag überschreiten – bei rund 25 solchen Zeiträumen pro Jahr also etwa einmal jährlich. Für den Payer Swap entsteht dieser Verlust bei fallenden Zinsen.

c) VaR bei 99 % Konfidenz:

Bei 99 % Konfidenz: $z_{0,99} = 2{,}326$

$$VaR_{99\%} = 2{,}326 \cdot 24 \cdot 4.720 \approx 263.500 \text{ EUR} \tag{16}$$

Der VaR ist um ca. 41 % höher bei 99 % Konfidenz ($2{,}326/1{,}645 \approx 1{,}41$).

d) VaR bei 1 Tag:

$$\sigma_{scaled,1d} = 0{,}012 \cdot \sqrt{\frac{1}{250}} = 0{,}012 \cdot 0{,}0632 = 0{,}000759 \tag{17}$$

$$VaR_{1d} = 1{,}645 \cdot 0{,}000759 \cdot 10.000 \cdot 4.720 \approx 58.900 \text{ EUR} \tag{18}$$

Der 1-Tages-VaR beträgt das $\frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0{,}316$-fache des 10-Tages-VaR (Wurzel-Zeit-Regel).

4 Aufgabe 4: Zinskurven und Forward Rates

Aufgabenstellung

Ein Unternehmen schließt einen 3-jährigen Swap ab (halbjährliche Zahlungen) mit folgenden Parametern:

- **Nominalbetrag:** EUR 5.000.000
- **Fester Zinssatz:** 3,5% p.a.
- **Swap-Richtung:** Receiver Swap (erhält fest, zahlt variabel)

Die aktuelle Zinskurve ist **nicht** flach, sondern steigend:

Laufzeit	**Zinssatz**
0,5 Jahre	2,5%
1,0 Jahre	2,7%
1,5 Jahre	2,9%
2,0 Jahre	3,1%
2,5 Jahre	3,2%
3,0 Jahre	3,3%

Tabelle 1: Zinskurven-Stützstellen

Aufgaben

a) Berechnen Sie die Forward Rates für jede Zahlungsperiode.

b) Berechnen Sie den Present Value des Swaps.

c) Vergleichen Sie mit einem Swap bei flacher Zinskurve von 3,0%.

d) Was ist die durchschnittliche implizite Forward Rate?

Lösungshinweise

a) Forward Rates:
Die Forward Rate für Periode $[t_{i-1}, t_i]$ wird aus den Diskontfaktoren berechnet:

$$f_i = \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \cdot \left(\frac{DF(t_{i-1})}{DF(t_i)} - 1 \right) \tag{19}$$

Wobei $DF(t) = e^{-r(t) \cdot t}$ der Diskontfaktor ist.
Beispiel für die erste Periode [0; 0,5]:

$$DF(0) = 1 \tag{20}$$

$$DF(0{,}5) = e^{-0{,}025 \cdot 0{,}5} = 0{,}98758 \tag{21}$$

$$f_1 = \frac{1}{0{,}5} \cdot \left(\frac{1}{0{,}98758} - 1 \right) = 2 \cdot 0{,}01258 = 0{,}02516 = 2{,}52\% \tag{22}$$

Analog für alle 6 Perioden:

Periode	**Diskontfaktor** $DF(t_i)$	**Forward Rate** f_i
0 – 0,5	0,98758	2,52 %
0,5 – 1,0	0,97336	2,92 %
1,0 – 1,5	0,95743	3,33 %
1,5 – 2,0	0,93988	3,73 %
2,0 – 2,5	0,92312	3,63 %
2,5 – 3,0	0,90574	3,84 %

Tabelle 2: Diskontfaktoren und Forward Rates

b) Present Value:
Bei einem Receiver Swap erhält das Unternehmen die feste Seite:

$$PV = PV_{Fix} - PV_{Float} \tag{23}$$

Fixed Leg (konstant 3,5 %):

$$PV_{Fix} = \sum_{i=1}^{6} \frac{5.000.000 \cdot 0{,}035}{2} \cdot DF(t_i) = 87.500 \cdot 5{,}68711 \approx 497.622 \text{ EUR} \tag{24}$$

Floating Leg (mit Forward Rates):

$$PV_{Float} = \sum_{i=1}^{6} \frac{5.000.000 \cdot f_i}{2} \cdot DF(t_i) = 5.000.000 \cdot (1 - DF(3)) \approx 471.286 \text{ EUR} \tag{25}$$

$$PV = 497.622 - 471.286 \approx +26.300 \text{ EUR} \tag{26}$$

Ergebnis: Der PV ist positiv (ca. EUR 26.000), da der feste Satz (3,5 %) über dem fairen Swapsatz dieser Kurve (rund 3,31 %) liegt.

c) Vergleich mit flacher Kurve:

Bei einer flachen Kurve von 3,0 % (stetig) sind alle Forward Rates gleich (rund 3,02 % bei halbjährlicher Betrachtung). Der PV steigt auf ca. **+68.000 EUR**, da die Differenz zwischen festem Satz (3,5 %) und den Forward Rates größer ist als bei der steigenden Kurve, deren spätere Forward Rates über 3,5 % liegen.

d) Durchschnittliche Forward Rate:

$$\bar{f} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} f_i \approx 3{,}33\% \tag{27}$$

5 Aufgabe 5: Konvexität und nicht-lineare Effekte

Aufgabenstellung

Verwenden Sie den Swap aus Aufgabe 1 (EUR 10 Mio., 5 Jahre, 3% fest, halbjährlich).

Aufgaben

a) Berechnen Sie die Konvexität des Swaps.

b) Verwenden Sie Duration und Konvexität, um die Wertänderung bei einem Zinsanstieg von 100bp zu schätzen.

c) Vergleichen Sie mit der tatsächlichen Wertänderung (Neuberechnung mit erhöhter Zinskurve).

d) Erklären Sie, warum die Konvexität wichtig ist.

Lösungshinweise

a) Konvexitäts-Berechnung:

Die Konvexität misst die Krümmung der Preis-Zins-Beziehung. Üblicherweise wird sie auf den PV bezogen:

$$Convexity = \frac{1}{PV} \cdot \frac{PV(r + \Delta r) + PV(r - \Delta r) - 2 \cdot PV(r)}{(\Delta r)^2} \tag{28}$$

Wie bei der Duration (Aufgabe 2d) ist die Division durch einen PV nahe null bei Swaps nicht sinnvoll. Man verwendet deshalb die Krümmung in EUR (*Gamma*) je Basispunkt zum Quadrat:

$$\Gamma = \frac{PV(r + \Delta r) + PV(r - \Delta r) - 2 \cdot PV(r)}{(\Delta r_{bp})^2} \tag{29}$$

Mit $\Delta r = 0{,}01$ (100 bp):
Schritte:

1. PV_0 bei $r = 2{,}8\%$: -83.540 EUR
2. PV_{up} bei $r = 3{,}8\%$: $+377.234$ EUR
3. PV_{down} bei $r = 1{,}8\%$: -567.347 EUR
4. Einsetzen: $\Gamma = \frac{377.234 - 567.347 + 167.081}{100^2} \approx -2{,}30$ EUR/bp^2

Ergebnis: Die Konvexität des Payer Swaps ist **negativ**. Er verhält sich wie eine Short-Position in einer Festzinsanleihe, deren positive Konvexität sich dabei umkehrt.

b) Wertänderung mit DV01 und Konvexität:
Die Taylor-Approximation zweiter Ordnung (in Basispunkten):

$$\Delta PV \approx DV01 \cdot \Delta r_{bp} + \frac{1}{2} \cdot \Gamma \cdot (\Delta r_{bp})^2 \tag{30}$$

Mit $DV01 \approx 4.721$ EUR (Wertzuwachs je bp Zinsanstieg), $\Gamma \approx -2{,}30$ EUR/bp^2 und $\Delta r_{bp} = +100$:

$$\Delta PV_{linear} = 4.721 \cdot 100 = +472.100 \text{ EUR} \tag{31}$$

$$\Delta PV_{\text{Konvexität}} = \frac{1}{2} \cdot (-2{,}30) \cdot 100^2 = -11.500 \text{ EUR} \tag{32}$$

$$\Delta PV_{gesamt} \approx +460.600 \text{ EUR} \tag{33}$$

c) Tatsächliche Wertänderung:

$$\Delta PV_{actual} = PV(3{,}8\%) - PV(2{,}8\%) = 377.234 - (-83.540) \approx +460.800 \text{ EUR} \tag{34}$$

Die rein lineare Schätzung liegt um rund 11.300 EUR daneben, mit Konvexitätskorrektur nur noch um rund 200 EUR.

d) Bedeutung der Konvexität:

- Der DV01 (bzw. die Duration) ist nur eine lineare Approximation
- Bei großen Zinsänderungen (> 50 bp) wird der Fehler signifikant
- Die Konvexität korrigiert für die Krümmung der Preis-Zins-Beziehung
- Für den Payer Swap ist die Konvexität negativ und damit nachteilig: Gewinne bei Zinsanstieg fallen kleiner aus als Verluste bei einem gleich großen Zinsrückgang (hier $+460.800$ vs. -483.800 EUR bei ± 100 bp). Für einen Receiver Swap ist es umgekehrt.

6 Aufgabe 6: Szenario-Analyse

Aufgabenstellung

Führen Sie eine umfassende Szenario-Analyse für den Swap aus Aufgabe 1 durch.

Szenarien:

Szenario	Parallele Zinsänderung
Extremer Anstieg	+100 bp
Starker Anstieg	+50 bp
Moderater Anstieg	+25 bp
Leichter Anstieg	+10 bp
Basis	0 bp
Leichter Rückgang	-10 bp
Moderater Rückgang	-25 bp
Starker Rückgang	-50 bp

Tabelle 3: Zinsszenarien

Aufgaben

a) Berechnen Sie den PV für jedes Szenario.

b) Erstellen Sie eine Grafik: PV vs. Zinsänderung.

c) Identifizieren Sie das Best-Case und Worst-Case Szenario.

d) Bei welcher Zinsänderung wird der PV null?

e) Wie würden Sie das Risiko hedgen?

Lösungshinweise

a) PV-Berechnung für alle Szenarien:

Für jedes Szenario: Verschiebe die gesamte Zinskurve parallel und berechne den neuen PV.

Ergebnisse (gerundet):

Szenario	Zinssatz	PV (EUR)
+100 bp	3,80%	+377.000
+50 bp	3,30%	+150.000
+25 bp	3,05%	+34.000
+10 bp	2,90%	-36.000
Basis	2,80%	-84.000
-10 bp	2,70%	-131.000
-25 bp	2,55%	-202.000
-50 bp	2,30%	-322.000

Tabelle 4: PV unter verschiedenen Szenarien

b) Grafik:
Die Grafik sollte zeigen:

- Eine nahezu lineare, leicht nach unten gekrümmte (konkave) Beziehung zwischen Zinsänderung und PV
- Bei einem Payer Swap: PV steigt bei steigenden Zinsen
- Die Steigung nimmt mit steigenden Zinsen leicht ab (negative Konvexität, Aufgabe 5)

c) Best-Case und Worst-Case:

- **Best-Case:** Zinsanstieg um 100 bp $\Rightarrow$ PV $\approx$ +377.000 EUR
- **Worst-Case:** Zinsrückgang um 50 bp $\Rightarrow$ PV ≈ -322.000 EUR

d) Break-Even-Zinssatz:
Der PV wird null bei einer Parallelverschiebung von rund +18 bp, also bei einem Zinsniveau von etwa 2,98 % (stetig). Dann entspricht der faire Swapsatz genau dem vereinbarten festen Satz von 3,0 % – der Swap ist at-market.

e) Hedging-Strategien:
Das Risiko des Payer Swaps liegt in **fallenden** Zinsen:

1. **Offsetting Swap:** Schließe einen gegenläufigen Receiver Swap ab
2. **Swaptions:** Kaufe eine Receiver Swaption als Absicherung gegen fallende Zinsen
3. **Duration Matching:** Passe die Duration des Gesamtportfolios an
4. **Dynamisches Hedging:** Verwende Zinsfutures oder FRAs (Kauf von Zinsfutures gewinnt bei fallenden Zinsen)

7 Aufgabe 7: Vergleich verschiedener Zinskurvenformen

Aufgabenstellung

Analysieren Sie den Einfluss verschiedener Zinskurvenformen auf einen 5-jährigen Payer Swap (EUR 10 Mio., 3,0% fest, halbjährlich).

Kurvenformen:

1. **Flach:** 2,8% für alle Laufzeiten
2. **Normal (steigend):** 2,5% (6M) bis 3,3% (5J)
3. **Invertiert (fallend):** 3,2% (6M) bis 2,6% (5J)
4. **Bucklig (humped):** 2,8% (6M) $\rightarrow$ 3,2% (2J) $\rightarrow$ 2,9% (5J)

Aufgaben

a) Berechnen Sie den PV für jede Kurvenform.

b) Welche Kurvenform ist am vorteilhaftesten für den Payer?

c) Berechnen Sie die durchschnittliche Forward Rate für jede Kurve.

d) Wie unterscheiden sich die DV01-Werte?

Lösungshinweise

a) PV für verschiedene Kurven:
Verwenden Sie für jede Kurvenform die spezifischen Zinssätze zur Diskontierung der Cashflows (Zwischenwerte linear interpoliert).

Ergebnisse (gerundet):

Kurvenform	**PV (EUR)**	**Ø Forward Rate**	**DV01 (EUR)**
Flach	−84.000	2,82%	4.721
Normal (steigend)	+139.000	3,33%	4.610
Invertiert (fallend)	−171.000	2,62%	4.765
Bucklig	−32.000	2,92%	4.697

Tabelle 5: PV unter verschiedenen Zinskurven

b) Vorteilhafteste Kurvenform:
Die **normale (steigende) Kurve** ist am vorteilhaftesten für den Payer, da:

- Er die variablen Zahlungen erhält und die steigende Kurve hohe zukünftige Forward Rates impliziert
- Die durchschnittliche Forward Rate (3,33 %) über dem festen Satz (3,0 %) liegt
- Nur bei dieser Kurve der PV positiv ist

Am ungünstigsten ist die invertierte Kurve (niedrige Forward Rates, Ø 2,62 %).

c) Durchschnittliche Forward Rates:
Berechnen Sie für jede Kurve die impliziten Forward Rates wie in Aufgabe 4 und bilden den Durchschnitt über alle 10 Perioden (Werte siehe Tabelle).

d) DV01-Unterschiede:

- Die DV01-Werte liegen eng beieinander (4.610 bis 4.765 EUR), da Laufzeit und Nominal gleich sind
- Höhere Zinsen im langen Bereich (normale Kurve) diskontieren die späten Cashflows stärker ⇒ kleinerer DV01
- Niedrigere lange Zinsen (invertierte Kurve) ⇒ größerer DV01

8 Aufgabe 8: Expected Shortfall (CVaR)

Aufgabenstellung

Zusätzlich zum VaR möchte das Risikomanagement den Expected Shortfall (ES) berechnen.

Parameter:

- Swap aus Aufgabe 1
- Konfidenzniveau: 95%
- Zeithorizont: 10 Tage
- Zinsvolatilität: 1,2% p.a.
- DV01: EUR 4.720 (aus Aufgabe 2)

Aufgaben

a) Berechnen Sie den Expected Shortfall bei 95% Konfidenz.

b) Vergleichen Sie ES mit VaR. Wie unterscheiden sie sich?

c) Welche Kennzahl ist konservativer?

d) Warum bevorzugt Basel III den ES gegenüber dem VaR?

Lösungshinweise

a) Expected Shortfall:

Der ES ist der durchschnittliche Verlust, gegeben dass der VaR überschritten wurde:

$$ES_\alpha = E[Loss \mid Loss > VaR_\alpha] \tag{35}$$

Für normalverteilte Zinsänderungen:

$$ES_\alpha = \frac{\phi(z_\alpha)}{1-\alpha} \cdot \sigma_{scaled} \cdot 10.000 \cdot |DV01| \tag{36}$$

Wobei $\phi(z)$ die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung ist.
Für 95 % Konfidenz ($z_{0,95} = 1{,}645$):

$$\phi(1{,}645) \approx 0{,}1031 \tag{37}$$

$$ES_{95\%} = \frac{0{,}1031}{0{,}05} \cdot 0{,}0024 \cdot 10.000 \cdot 4.720 \tag{38}$$

$$ES_{95\%} = 2{,}063 \cdot 24 \cdot 4.720 \tag{39}$$

$$ES_{95\%} \approx 233.700 \text{ EUR} \tag{40}$$

b) Vergleich ES vs. VaR:

Kennzahl	**95%**	**99%**
VaR	186.300 EUR	263.500 EUR
ES	233.700 EUR	301.900 EUR
Differenz	+25%	+15%

Tabelle 6: VaR vs. Expected Shortfall (10 Tage)

(Für 99 %: $\phi(2{,}326)/0{,}01 \approx 2{,}665$.)

Der ES ist immer mindestens so hoch wie der VaR, da er den durchschnittlichen Verlust im Tail misst, nicht nur die Schwelle.

c) Konservativität:

Der **Expected Shortfall ist konservativer**, da:

- Er die Tail-Verteilung berücksichtigt
- Er Extremverluste über dem VaR erfasst
- Er bei Normalverteilung rund 15–25 % über dem VaR liegt, bei Verteilungen mit dicken Rändern deutlich mehr

d) Basel-III-Präferenz:

Basel III (Fundamental Review of the Trading Book) bevorzugt den ES, weil:

1. **Kohärenz:** ES ist eine kohärente Risikomaßzahl (VaR nicht)
2. **Subadditivität:** $ES(X + Y) \leq ES(X) + ES(Y)$ (fördert Diversifikation)
3. **Tail-Sensitivität:** ES reagiert auf Änderungen in der Tail-Verteilung
4. **Prozyklizität:** Der VaR ignoriert Verluste jenseits der Schwelle und kann so Risiken in ruhigen Phasen unterschätzen

Zusammenfassung der Lernziele

Nach Bearbeitung dieser Aufgaben sollten Sie:

- Den Present Value eines Plain Vanilla Swaps berechnen können
- Zinssensitivität mittels DV01 und Duration quantifizieren können
- Value at Risk für Zinsswaps berechnen und interpretieren können
- Forward Rates aus Zinskurven ableiten können
- Konvexitätseffekte verstehen und anwenden können
- Szenario-Analysen durchführen können

- Verschiedene Zinskurvenformen vergleichen können
- Expected Shortfall berechnen und mit VaR vergleichen können

Hinweise zur Verwendung des Online-Rechners

Der Plain Vanilla Swap VaR-Rechner unterstützt Sie bei der Lösung dieser Aufgaben:

1. **Parametereingabe:** Geben Sie Nominalbetrag, Zinssatz, Laufzeit und Frequenz ein
2. **Zinskurve:** Wählen Sie zwischen manueller Eingabe, CSV-Upload oder Simulation
3. **Spread-Anpassung:** Fügen Sie Credit Spreads hinzu
4. **VaR-Parameter:** Konfigurieren Sie Konfidenz, Volatilität und Horizont
5. **Visualisierung:** Betrachten Sie die Zinskurve und Szenario-Analyse
6. **Export:** Exportieren Sie detaillierte Ergebnisse für weitere Analysen

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!