Mathematische Grundlagen der Zeitreihenanalyse

Deutsch

Wolfgang Böhme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25. Oktober 2026

Dokumentationen dieser Webseite wurden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic) entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **2**
1.1 Notation . . . 2

2 Deskriptive Statistik **3**
2.1 Lagemaße . . . 3
2.1.1 Mittelwert (Arithmetisches Mittel) . . . 3
2.1.2 Median . . . 3
2.1.3 Modus . . . 3
2.2 Streuungsmaße . . . 3
2.2.1 Varianz . . . 3
2.2.2 Standardabweichung . . . 3
2.3 Quartile . . . 3
2.3.1 Interquartilsabstand (IQR) . . . 3
2.4 Formmaße . . . 4
2.4.1 Schiefe (Skewness) . . . 4
2.4.2 Kurtosis (Wölbung) . . . 4

3 Trendfunktionen **5**
3.1 Lineare Regression . . . 5
3.2 Polynomiale Regression . . . 5
3.3 Exponentielle Regression . . . 5
3.4 Logarithmische Regression . . . 6
3.5 Gütemaße . . . 6
3.5.1 Bestimmtheitsmaß (R^2) . . . 6
3.5.2 Adjustiertes R^2 . . . 6
3.5.3 Root Mean Squared Error (RMSE) . . . 6
3.5.4 Mean Absolute Error (MAE) . . . 6

4 Autokorrelationsanalyse **7**
4.1 Autokorrelationsfunktion (ACF) . . . 7
4.2 Partielle Autokorrelationsfunktion (PACF) . . . 7
4.3 Ljung-Box-Test . . . 7

5 Glättungsverfahren **8**
5.1 Simple Moving Average (SMA) . . . 8
5.2 Exponential Moving Average (EMA) . . . 8
5.3 Weighted Moving Average (WMA) . . . 8
5.4 Holt-Winters-Methode . . . 8
5.5 LOESS (Locally Estimated Scatterplot Smoothing) . . . 9

6 Zeitreihen-Zerlegung **10**
6.1 Additive Zerlegung . . . 10
6.2 Multiplikative Zerlegung . . . 10
6.3 Algorithmus . . . 10

7 Filterverfahren **11**
7.1 Hodrick-Prescott-Filter 11
7.2 Butterworth-Filter 11
7.3 Savitzky-Golay-Filter 11

8 Saisonbereinigung **12**
8.1 STL-Zerlegung 12
8.2 X-13 ARIMA-SEATS (vereinfacht) 12
8.3 Census I Methode 13
8.4 Census II Methode 13

9 Vollständiges Beispiel **14**
9.1 Deskriptive Statistik 14
9.2 Lineare Regression 14
9.3 Saisonale Zerlegung (Periode = 12) 14
9.4 HP-Filter mit $\lambda = 14400$ 15

10 Zusammenfassung **16**
10.1 Methodenübersicht 16
10.2 Empfehlungen 16
10.3 Weitere Literatur 16

1 Einführung

Dieses Dokument beschreibt die mathematischen Grundlagen aller im Zeitreihen-Analysator implementierten Methoden. Für jede Methode werden die zugrundeliegenden Formeln, Algorithmen und - wo sinnvoll - Beispiele präsentiert.

1.1 Notation

Wir verwenden folgende Notation:

- y_t: Beobachtung zum Zeitpunkt t
- n: Anzahl der Beobachtungen
- μ: Mittelwert (Erwartungswert)
- σ^2: Varianz
- σ: Standardabweichung

2 Deskriptive Statistik

2.1 Lagemaße

2.1.1 Mittelwert (Arithmetisches Mittel)

$$\mu = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t \tag{1}$$

Beispiel: Für die Zeitreihe $y = [100, 102, 101, 105, 103]$:

$$\mu = \frac{100 + 102 + 101 + 105 + 103}{5} = \frac{511}{5} = 102.2$$

2.1.2 Median

Der Median ist der mittlere Wert der sortierten Zeitreihe:

$$\text{Median} = \begin{cases} y_{\frac{n+1}{2}} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ \frac{y_{\frac{n}{2}} + y_{\frac{n}{2}+1}}{2} & \text{wenn } n \text{ gerade} \end{cases} \tag{2}$$

2.1.3 Modus

Der Modus ist der häufigste Wert in der Zeitreihe.

2.2 Streuungsmaße

2.2.1 Varianz

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \mu)^2 \tag{3}$$

2.2.2 Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \mu)^2} \tag{4}$$

Beispiel: Für $y = [100, 102, 101, 105, 103]$ mit $\mu = 102.2$:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(100 - 102.2)^2 + (102 - 102.2)^2 + \cdots + (103 - 102.2)^2}{5} \\ &= \frac{4.84 + 0.04 + 1.44 + 7.84 + 0.64}{5} = \frac{14.8}{5} = 2.96 \\ \sigma &= \sqrt{2.96} \approx 1.72 \end{aligned}$$

2.3 Quartile

2.3.1 Interquartilsabstand (IQR)

$$Q_1 = 25\%\text{-Quantil} \tag{5}$$

$$Q_3 = 75\%\text{-Quantil} \tag{6}$$

$$\text{IQR} = Q_3 - Q_1 \tag{7}$$

2.4 Formmaße

2.4.1 Schiefe (Skewness)

Misst die Asymmetrie der Verteilung:

$$\text{Schiefe} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \mu)^3}{\sigma^3} \tag{8}$$

Interpretation:

- Schiefe = 0: Symmetrische Verteilung
- Schiefe ¿ 0: Rechtsschief (langer Schwanz rechts)
- Schiefe ¡ 0: Linksschief (langer Schwanz links)

2.4.2 Kurtosis (Wölbung)

Misst die SSpitzheit"der Verteilung:

$$\text{Kurtosis} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \mu)^4}{\sigma^4} - 3 \tag{9}$$

Interpretation (Excess Kurtosis):

- Kurtosis = 0: Normalverteilung
- Kurtosis ¿ 0: Leptokurtisch (spitzer, schwere Ränder)
- Kurtosis ¡ 0: Platykurtisch (flacher, leichte Ränder)

3 Trendfunktionen

3.1 Lineare Regression

Die lineare Trendfunktion hat die Form:

$$\hat{y}_t = a + b \cdot t \tag{10}$$

Die Parameter werden nach der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt:

$$b = \frac{n \sum_{t=1}^{n} t \cdot y_t - \sum_{t=1}^{n} t \sum_{t=1}^{n} y_t}{n \sum_{t=1}^{n} t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n} t\right)^2} \tag{11}$$

$$a = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t - b \sum_{t=1}^{n} t}{n} \tag{12}$$

Beispiel: Für $y = [100, 102, 105, 108, 110]$ mit $t = [0, 1, 2, 3, 4]$:

$$b = \frac{5 \cdot 1130 - 10 \cdot 525}{5 \cdot 30 - 100} = \frac{5650 - 5250}{150 - 100} = \frac{400}{50} = 2.5$$

$$a = \frac{525 - 2.5 \cdot 10}{5} = \frac{500}{5} = 100$$

Trendfunktion: $\hat{y}_t = 100 + 2.5t$

3.2 Polynomiale Regression

Allgemeine Form eines Polynoms p-ten Grades:

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_p t^p = \sum_{k=0}^{p} a_k t^k \tag{13}$$

Die Koeffizienten werden durch Lösung des Normalgleichungssystems bestimmt:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{a} = \mathbf{X}^T \mathbf{y} \tag{14}$$

wobei $\mathbf{X}$ die Vandermonde-Matrix ist:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^p \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^p \end{pmatrix} \tag{15}$$

3.3 Exponentielle Regression

Form:

$$\hat{y}_t = a \cdot e^{bt} \tag{16}$$

Durch Logarithmieren wird dies zu einem linearen Problem:

$$\ln(\hat{y}_t) = \ln(a) + bt \tag{17}$$

3.4 Logarithmische Regression

Form:

$$\hat{y}_t = a + b \cdot \ln(t+1) \tag{18}$$

3.5 Gütemaße

3.5.1 Bestimmtheitsmaß (R^2)

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2} = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}} \tag{19}$$

$R^2 \in [0, 1]$, höhere Werte bedeuten bessere Anpassung.

3.5.2 Adjustiertes R^2

Berücksichtigt die Anzahl der Parameter:

$$R^2_{adj} = 1 - \frac{(1 - R^2)(n-1)}{n-k-1} \tag{20}$$

wobei k die Anzahl der unabhängigen Variablen ist.

3.5.3 Root Mean Squared Error (RMSE)

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)^2} \tag{21}$$

3.5.4 Mean Absolute Error (MAE)

$$\text{MAE} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}|y_t - \hat{y}_t| \tag{22}$$

4 Autokorrelationsanalyse

4.1 Autokorrelationsfunktion (ACF)

Die ACF misst die lineare Abhängigkeit zwischen Beobachtungen mit Lag k:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}(y_t - \mu)(y_{t+k} - \mu)}{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \mu)^2} \tag{23}$$

wobei γ_k die Autokovarianz für Lag k ist.
Eigenschaften:

- $\rho_0 = 1$ (perfekte Korrelation mit sich selbst)
- $-1 \leq \rho_k \leq 1$
- $\rho_k = \rho_{-k}$ (Symmetrie)

4.2 Partielle Autokorrelationsfunktion (PACF)

Die PACF misst die Korrelation zwischen y_t und y_{t+k} nach Elimination des Einflusses aller dazwischenliegenden Lags:

$$\phi_{kk} = \text{PACF}(k) \tag{24}$$

Berechnung über Yule-Walker-Gleichungen oder Durbin-Levinson-Algorithmus.

4.3 Ljung-Box-Test

Testet auf signifikante Autokorrelation:

$$Q = n(n+2)\sum_{k=1}^{h}\frac{\rho_k^2}{n-k} \tag{25}$$

Q folgt asymptotisch einer χ^2-Verteilung mit h Freiheitsgraden.
Hypothesen:

- H_0: Keine Autokorrelation bis Lag h
- H_1: Signifikante Autokorrelation vorhanden

Bei $Q > \chi^2_{0.05,h}$ wird H_0 abgelehnt (Signifikanzniveau 5%).

5 Glättungsverfahren

5.1 Simple Moving Average (SMA)

Einfacher gleitender Durchschnitt mit Fenstergröße m:

$$\hat{y}_t = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} y_{t-i} \tag{26}$$

Beispiel: Für $y = [100, 102, 105, 108, 110]$ mit $m = 3$:

$$\hat{y}_3 = \frac{100 + 102 + 105}{3} = 102.33$$
$$\hat{y}_4 = \frac{102 + 105 + 108}{3} = 105.00$$
$$\hat{y}_5 = \frac{105 + 108 + 110}{3} = 107.67$$

5.2 Exponential Moving Average (EMA)

Exponentielles Glätten mit Parameter α:

$$\hat{y}_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)\hat{y}_{t-1} \tag{27}$$

wobei $\alpha = \frac{2}{m+1}$ für Fenstergröße m.
Eigenschaften:

- Neuere Beobachtungen werden stärker gewichtet
- $\alpha \in (0, 1)$: kleines α = stärkere Glättung

5.3 Weighted Moving Average (WMA)

Linear gewichteter gleitender Durchschnitt:

$$\hat{y}_t = \frac{\sum_{i=0}^{m-1}(m - i) \cdot y_{t-i}}{\sum_{i=0}^{m-1}(m - i)} = \frac{\sum_{i=0}^{m-1}(m - i) \cdot y_{t-i}}{\frac{m(m+1)}{2}} \tag{28}$$

5.4 Holt-Winters-Methode

Doppeltes exponentielles Glätten für Trend:

$$\text{Niveau:} \quad L_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}) \tag{29}$$
$$\text{Trend:} \quad T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1} \tag{30}$$
$$\text{Prognose:} \quad \hat{y}_{t+h} = L_t + h \cdot T_t \tag{31}$$

wobei α der Glättungsparameter für das Niveau und β der Glättungsparameter für den Trend ist.

5.5 LOESS (Locally Estimated Scatterplot Smoothing)

Lokale polynomiale Regression mit Gewichtungsfunktion:

$$\hat{y}_t = \sum_{i \in N_t} w_i(t) y_i \tag{32}$$

Gewichte basieren auf Tri-Cube-Funktion:

$$w_i(t) = \left(1 - \left|\frac{t-i}{d_{\max}}\right|^3\right)^3 \tag{33}$$

wobei N_t die h-nächsten Nachbarn von t sind und $d_{\max}$ die maximale Distanz.

6 Zeitreihen-Zerlegung

Eine Zeitreihe kann in drei Komponenten zerlegt werden:

- Trend (T_t): Langfristige Entwicklung
- Saisonalität (S_t): Periodische Schwankungen
- Restkomponente (R_t): Zufällige Schwankungen

6.1 Additive Zerlegung

$$y_t = T_t + S_t + R_t \tag{34}$$

Geeignet wenn die Amplitude der saisonalen Schwankungen konstant ist.

6.2 Multiplikative Zerlegung

$$y_t = T_t \cdot S_t \cdot R_t \tag{35}$$

Geeignet wenn die Amplitude proportional zum Niveau ist.

6.3 Algorithmus

Schritt 1: Trend-Extraktion mit zentriertem gleitenden Durchschnitt der Periode p:

$$T_t = \frac{1}{p} \sum_{i=-\lfloor p/2 \rfloor}^{\lfloor p/2 \rfloor} y_{t+i} \tag{36}$$

Schritt 2: De-Trending:

$$D_t = \begin{cases} y_t - T_t & \text{(additiv)} \\ y_t / T_t & \text{(multiplikativ)} \end{cases} \tag{37}$$

Schritt 3: Saisonale Komponente durch Mittelung über Perioden:

$$S_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} D_{j+ip} \quad \text{für } j = 1, \ldots, p \tag{38}$$

wobei m die Anzahl vollständiger Perioden ist.
Schritt 4: Normalisierung:

$$S_j^* = \begin{cases} S_j - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} S_j & \text{(additiv)} \\ S_j / \sqrt[p]{\prod_{j=1}^{p} S_j} & \text{(multiplikativ)} \end{cases} \tag{39}$$

Schritt 5: Restkomponente:

$$R_t = \begin{cases} y_t - T_t - S_t & \text{(additiv)} \\ y_t / (T_t \cdot S_t) & \text{(multiplikativ)} \end{cases} \tag{40}$$

Beispiel (additiv): Für monatliche Daten mit $p = 12$ und Jahresdaten:

$$y_{13} = 105, \quad T_{13} = 100, \quad S_1 = 8$$
$$R_{13} = 105 - 100 - 8 = -3$$

7 Filterverfahren

7.1 Hodrick-Prescott-Filter

Der HP-Filter trennt eine Zeitreihe in Trend (τ_t) und Zyklus (c_t):

$$y_t = \tau_t + c_t \tag{41}$$

Der Trend wird durch Minimierung folgender Zielfunktion bestimmt:

$$\min_{\{\tau_t\}} \left\{ \sum_{t=1}^{n} (y_t - \tau_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{n-1} [(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2 \right\} \tag{42}$$

Der erste Term misst die Anpassungsgüte, der zweite Term bestraft Krümmungen im Trend.

Parameter λ:

- $\lambda = 100$: Jährliche Daten
- $\lambda = 1600$: Vierteljährliche Daten
- $\lambda = 14400$: Monatliche Daten
- $\lambda \to 0$: Trend folgt den Daten exakt
- $\lambda \to \infty$: Trend wird linear

Lösung durch Gauss-Elimination des Gleichungssystems:

$$(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{K}^T \mathbf{K})\boldsymbol{\tau} = \mathbf{y} \tag{43}$$

wobei $\mathbf{K}$ die zweite Differenzenmatrix ist.

7.2 Butterworth-Filter

Bidirektionales exponentielles Glätten:

$$\text{Forward:} \quad f_t = \alpha y_t + (1-\alpha) f_{t-1} \tag{44}$$

$$\text{Backward:} \quad b_t = \alpha y_t + (1-\alpha) b_{t+1} \tag{45}$$

$$\text{Trend:} \quad \tau_t = \frac{f_t + b_t}{2} \tag{46}$$

7.3 Savitzky-Golay-Filter

Lokale polynomiale Anpassung mit Fenstergröße m und Polynomgrad p:

$$\hat{y}_t = \sum_{j=-\lfloor m/2 \rfloor}^{\lfloor m/2 \rfloor} c_j y_{t+j} \tag{47}$$

Die Koeffizienten c_j werden durch Least-Squares-Anpassung eines Polynoms im lokalen Fenster bestimmt.

8 Saisonbereinigung

8.1 STL-Zerlegung

STL (Seasonal and Trend decomposition using Loess) ist eine robuste Methode zur Zerlegung von Zeitreihen.

Algorithmus:

Innere Schleife:

1. **Detrending:** Entferne Trend mit LOESS: $D_t = y_t - T_t$
2. **Cycle-Subseries Smoothing:** Glätte jede Subserie der Periode
3. **Low-Pass-Filter:** Glätte saisonale Komponente
4. **Deseasonalizing:** $V_t = y_t - S_t$
5. **Trend Smoothing:** Glätte V_t mit LOESS

Äußere Schleife: Robustifizierung gegen Ausreißer
Ergebnis:

$$y_t = T_t + S_t + R_t \tag{48}$$

8.2 X-13 ARIMA-SEATS (vereinfacht)

X-13 ist die Standard-Methode für offizielle Statistiken.

Vereinfachter Algorithmus:

Schritt 1: Trend mit gleitendem Durchschnitt der Periode p:

$$T_t = \frac{1}{p} \sum_{i=-\lfloor p/2 \rfloor}^{\lfloor p/2 \rfloor} y_{t+i} \tag{49}$$

Schritt 2: Saisonale Faktoren:

$$SF_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (y_{j+ip} - T_{j+ip}) \quad \text{für } j = 1, \ldots, p \tag{50}$$

Schritt 3: Normalisierung:

$$SF_j^* = SF_j - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} SF_j \tag{51}$$

Schritt 4: Saisonbereinigte Reihe:

$$SA_t = y_t - SF_{(t \bmod p)} \tag{52}$$

8.3 Census I Methode

Ratio-to-Moving-Average Methode:

Schritt 1: Zentrierter gleitender Durchschnitt:

$$MA_t = \frac{1}{p} \sum_{i=-\lfloor p/2 \rfloor}^{\lfloor p/2 \rfloor} y_{t+i} \tag{53}$$

Schritt 2: Verhältnisse zum gleitenden Durchschnitt:

$$r_t = \frac{y_t}{MA_t} \tag{54}$$

Schritt 3: Saisonale Indizes durch Mittelung:

$$SI_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} r_{j+ip} \quad \text{für } j = 1, \ldots, p \tag{55}$$

Schritt 4: Normalisierung auf Periode p:

$$SI_j^* = \frac{SI_j}{\frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} SI_j} \cdot p \tag{56}$$

Schritt 5: Saisonbereinigte Reihe:

$$SA_t = \frac{y_t}{SI^*_{(t \bmod p)}} \tag{57}$$

8.4 Census II Methode

Erweiterte Version von Census I mit mehrfachen Durchläufen:

Pass 1: Initiale Trend-Schätzung mit gleitendem Durchschnitt

Pass 2: Berechnung der Saisonal-Irregular-Komponente:

$$SI_t = y_t - T_t \tag{58}$$

Pass 3: Saisonale Komponente durch Mittelung

Pass 4: Glättung der saisonalen Komponente mit 3-Term Moving Average:

$$S_j^* = \frac{S_{j-1} + S_j + S_{j+1}}{3} \tag{59}$$

Pass 5: Zentrierung:

$$S_j^{**} = S_j^* - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} S_j^* \tag{60}$$

Pass 6: Saisonbereinigte Reihe:

$$SA_t = y_t - S^{**}_{(t \bmod p)} \tag{61}$$

Pass 7: Re-Schätzung des Trends aus SA_t

9 Vollständiges Beispiel

Betrachten wir eine monatliche Zeitreihe über 2 Jahre (24 Beobachtungen):

$$y = [100, 95, 98, 102, 110, 120, 125, 118, 112, 105, 98, 95, 105, 98, 102, 108, 118, 130, 138, 128, 120, 110, 102, 9$$

9.1 Deskriptive Statistik

$$\begin{aligned} n &= 24 \\ \mu &= \frac{1}{24}\sum_{t=1}^{24} y_t = \frac{2653}{24} = 110.54 \\ \sigma^2 &= \frac{1}{24}\sum_{t=1}^{24}(y_t - 110.54)^2 = 156.41 \\ \sigma &= \sqrt{156.41} = 12.51 \end{aligned}$$

9.2 Lineare Regression

Mit $t = 0, 1, 2, \ldots, 23$:

$$\begin{aligned} b &= \frac{24 \cdot 28626 - 276 \cdot 2653}{24 \cdot 4324 - 76176} = \frac{687024 - 732228}{103776 - 76176} = \frac{-45204}{27600} = -1.64 \\ a &= \frac{2653 - (-1.64) \cdot 276}{24} = \frac{3105.64}{24} = 129.4 \end{aligned}$$

Trendfunktion: $\hat{y}_t = 129.4 - 1.64t$

Der negative Trend zeigt einen leichten Rückgang über die Zeit (was nicht der visuellen Interpretation entspricht - dies zeigt die Limitation einer rein linearen Anpassung bei saisonalen Daten).

9.3 Saisonale Zerlegung (Periode = 12)

Schritt 1: Trend mit 12-Monats Moving Average (für Monat 7):

$$T_7 = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} y_{i+1} = \frac{1}{12}(95 + 98 + \cdots + 105) = 108.5$$

Schritt 2: De-Trending (additiv):

$$D_7 = y_7 - T_7 = 125 - 108.5 = 16.5$$

Schritt 3: Saisonale Komponenten für jeden Monat:

$$S_{\text{Jan}} = \frac{(y_1 - T_1) + (y_{13} - T_{13})}{2} \approx -10.5$$

Schritt 4: Saisonbereinigte Reihe:

$$SA_7 = y_7 - S_7 = 125 - 16.5 = 108.5$$

9.4 HP-Filter mit $\lambda = 14400$

Das Gleichungssystem $(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{K}^T \mathbf{K})\boldsymbol{\tau} = \mathbf{y}$ wird gelöst.

Für $t = 7$ ergibt sich beispielsweise:

$$\tau_7 \approx 109.2$$

Der Zyklus ist dann:

$$c_7 = y_7 - \tau_7 = 125 - 109.2 = 15.8$$

10 Zusammenfassung

10.1 Methodenübersicht

Kategorie	Methoden
Statistik	Mittelwert, Median, Modus, Varianz, Schiefe, Kurtosis
Trend	Linear, Polynomial (2.-6. Grad), Exponentiell, Logarithmisch
Autokorrelation	ACF, PACF, Ljung-Box-Test
Glättung	SMA, EMA, WMA, Holt-Winters, LOESS
Zerlegung	Additiv/Multiplikativ (Trend, Saisonal, Rest)
Filter	Hodrick-Prescott, Butterworth, Savitzky-Golay
Saisonbereinigung	STL, X-13, Census I, Census II

10.2 Empfehlungen

- **Für Trend-Identifikation:** Beginnen Sie mit linearer Regression, erhöhen Sie den Polynomgrad nur bei Bedarf
- **Für Glättung:** LOESS und Holt-Winters für komplexe Muster, SMA/EMA für einfache Fälle
- **Für Saisonbereinigung:** STL ist robust und flexibel, X-13 für offizielle Statistiken
- **Für Trend-Zyklus-Trennung:** HP-Filter mit angemessenem λ

10.3 Weitere Literatur

- Brockwell, P. J., & Davis, R. A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting.* Springer.
- Hyndman, R. J., & Athanasopoulos, G. (2018). *Forecasting: Principles and Practice.* OTexts.
- Cleveland, R. B., et al. (1990). STL: A Seasonal-Trend Decomposition Procedure Based on Loess. *Journal of Official Statistics*, 6(1), 3-73.
- Hodrick, R. J., & Prescott, E. C. (1997). Postwar US Business Cycles: An Empirical Investigation. *Journal of Money, Credit and Banking*, 29(1), 1-16.