Network Planning

CPM – Critical Path | PERT – Three-Time Estimate

English

Wolfgang Boehme

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25 October 2026

This document describes network planning with CPM and PERT, including a fully worked example and a tool description.

The documentation on this website was developed with the support of the AI Claude (Anthropic).

Table of Contents

1 Introduction and Motivation **2**

2 Key Concepts **2**

3 CPM – Algorithm **3**

4 PERT – Three-Time Estimate **4**

5 Complete Example: Software Project **5**

5.1 Projektstruktur 5
5.2 Expected valuee und Varianceen 5
5.3 Vorwärtsrechnung (früheste Termine) 5
5.4 Rückwärtsrechnung (späteste Termine) 6
5.5 Float Times and Critical Path 6
5.6 Network plan – Grafische Darstellung 7
5.7 PERT – Project duration-Analyse 7
5.7.1 Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Deadlines 7
5.7.2 Normal distribution der Project duration 8

6 Tool Description **8**

6.1 Methoden-Auswahl 8
6.2 Eingabemöglichkeiten 8
6.3 Ausgabe und Interpretation 9

7 Summary **10**

1 Introduction and Motivation

Komplexe Projekte bestehen aus vielen **Activitiesn** (Aktivitäten), die teils parallel, teils sequenziell ausgeführt werden müssen. Die Network planning beantwortet drei zentrale Fragen:

- Wie lange dauert das Projekt mindestens?
- Welche Activities sind **critical** – d. h. eine Verzögerung verlängert das gesamte Projekt?
- Wo gibt es **Float timeen**, die flexibel genutzt werden können?

Typische Anwendungsfelder

- **Bauprojekte:** Planung, Fundament, Rohbau, Innenausbau, Abnahme
- **Softwareentwicklung:** Anforderungen, Design, Implementierung, Test, Deployment
- **Produktentwicklung:** Konzept, Prototyp, Zertifizierung, Serienstart
- **Veranstaltungsorganisation:** Location, Catering, Werbung, Technik, Durchführung

Es gibt zwei verwandte Methoden:

- **CPM** (Critical Path Method): feste Activitysdauern, deterministisch.
- **PERT** (Program Evaluation and Review Technique): drei Zeitschätzungen je Activity, stochastisch.

2 Key Concepts

Definition: Activity und Anordnungsbeziehung

Ein **Activity** i ist eine Projektaktivität mit:

- einer eindeutigen **ID** (z. B. A, B, C)
- einer **Duration** $d_i > 0$
- einer Menge von **Activitiesrn** $V(i)$ – Activities, die abgeschlossen sein müssen, bevor i beginnen kann (*Ende-Start-Anordnung*).

Ein Activity ohne Activitiesr heißt **Startvorgang**; einer ohne Successor heißt **Endvorgang**.

Definition: Früheste und späteste Termine

Für jeden Activity i definiert man:

$$\begin{aligned}
\text{FAS}_i &= \text{Frühester Anfangstermin} = \max_{j \in V(i)} \text{FAE}_j \\
\text{FAE}_i &= \text{Frühester Endtermin} = \text{FAS}_i + d_i \\
\text{SAE}_i &= \text{Spätester Endtermin} \\
\text{SAS}_i &= \text{Spätester Anfangstermin} = \text{SAE}_i - d_i
\end{aligned}$$

Für Startvorgänge gilt $\text{FAS}_i = 0$; für Endvorgänge gilt $\text{SAE}_i = T$ (Project duration).

Definition: Float Times

- **Total float** (GP): $\text{GP}_i = \text{SAS}_i - \text{FAS}_i = \text{SAE}_i - \text{FAE}_i$
  Wie lange darf i verzögert werden, ohne die Project duration zu verlängern?
- **Free float** (FP): $\text{FP}_i = \min_{j: i \in V(j)} \text{FAS}_j - \text{FAE}_i$
  Wie lange darf i verzögert werden, ohne den frühesten Start eines Successors zu beeinflussen?

Definition: Critical Path

Ein Activity heißt **critical**, wenn $\text{GP}_i = 0$. Der **criticale Pfad** ist die längste Folge von Activitiesn vom Start- zum Endvorgang – er bestimmt die minimale Project duration T.

Satz 1: Eigenschaften des criticalen Pfades

1. Jedes Projekt hat mindestens einen criticalen Pfad.
2. Die Project duration T ist gleich der Summe der Durationn aller Activities auf dem criticalen Pfad.
3. Eine Verzögerung eines criticalen Activitys um $\delta > 0$ verlängert das Projekt um genau δ.
4. Ein nicht-criticaler Activity kann um GP_i verzögert werden, ohne das Projekt zu verlängern.

3 CPM – Algorithm

Algorithmus: CPM (Vorwärts-Rückwärts-Rechnung)

Schritt 1 – Topologische Sortierung: Ordne die Activities so, dass alle Activitiesr von i vor i kommen (z. B. Kahn-Algorithmus).
Schritt 2 – Vorwärtsrechnung (früheste Termine):

- Setze $\text{FAS}_i = 0$ für alle Startvorgänge.

- Für alle weiteren i (in topologischer Reihenfolge): $\mathrm{FAS}_i = \max_{j \in V(i)} \mathrm{FAE}_j$.
- $\mathrm{FAE}_i = \mathrm{FAS}_i + d_i$.

Schritt 3 – Project duration: $T = \max_i \mathrm{FAE}_i$
Schritt 4 – Rückwärtsrechnung (späteste Termine):

- Setze $\mathrm{SAE}_i = T$ für alle Endvorgänge.
- Für alle i (in umgekehrter topologischer Reihenfolge): $\mathrm{SAE}_i = \min_{j: i \in V(j)} \mathrm{SAS}_j$.
- $\mathrm{SAS}_i = \mathrm{SAE}_i - d_i$.

Schritt 5 – Float und criticaler Pfad: $\mathrm{GP}_i = \mathrm{SAS}_i - \mathrm{FAS}_i$. Activity i ist critical $\Leftrightarrow \mathrm{GP}_i = 0$.

4 PERT – Three-Time Estimate

Definition: PERT-Zeitschätzung

Bei PERT schätzt man für jeden Activity i drei Durationn:

- a_i: **optimistische** Duration (bestmöglicher Fall)
- m_i: **wahrscheinlichste** Duration (normalster Fall)
- b_i: **pessimistische** Duration (schlechtester Fall)

Der **Expected value** und die **Variance** der Activitysdauer sind:

$$t_{e,i} = \frac{a_i + 4m_i + b_i}{6}, \qquad \sigma_i^2 = \left(\frac{b_i - a_i}{6}\right)^2$$

Definition: PERT-Project duration

Die erwartete Project duration und ihre Variance (Summe entlang des criticalen Pfades $\mathcal{K}$):

$$\mu_T = \sum_{i \in \mathcal{K}} t_{e,i}, \qquad \sigma_T^2 = \sum_{i \in \mathcal{K}} \sigma_i^2$$

Nach dem Zentralen Grenzwertsatz gilt näherungsweise:

$$T \sim \mathcal{N}(\mu_T,\ \sigma_T^2)$$

Satz 2: Wahrscheinlichkeit der Termineinhaltung

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Projekt bis zu einem Termin T_D abgeschlossen

ist:

$$P(T \le T_D) = \Phi\left(\frac{T_D - \mu_T}{\sigma_T}\right)$$

wobei Φ die Standardnormalverteilungsfunktion ist.

Faustregeln: $P(T \le \mu_T) = 50\%$, $P(T \le \mu_T + \sigma_T) \approx 84{,}1\%$, $P(T \le \mu_T + 2\sigma_T) \approx 97{,}7\%$.
Eine Deadline mit $z = (T_D - \mu_T)/\sigma_T \ge 1{,}645$ hat mindestens 95% Einhaltungswahrscheinlichkeit.

5 Complete Example: Software Project

5.1 Projektstruktur

Beispiel – Softwareprojekt (7 Activities)

ID	Bezeichnung	a	m	b	t_e	Activitiesr
A	Anforderungen	2	3	5	3,17	–
B	Design	3	5	9	5,33	A
C	Prototyp	4	6	10	6,33	A
D	Testing	2	4	7	4,17	B
E	Integration	3	5	8	5,17	C, D
F	Dokumentation	1	2	4	2,17	B
G	Abnahme	2	3	5	3,17	E, F

5.2 Expected valuee und Varianceen

ID	Bezeichnung	a	m	b	$t_e = \frac{a+4m+b}{6}$	$\sigma^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$
A	Anforderungen	2	3	5	$\frac{2+12+5}{6} = 3{,}17$	$\left(\frac{3}{6}\right)^2 = 0{,}25$
B	Design	3	5	9	$\frac{3+20+9}{6} = 5{,}33$	$\left(\frac{6}{6}\right)^2 = 1{,}00$
C	Prototyp	4	6	10	$\frac{4+24+10}{6} = 6{,}33$	$\left(\frac{6}{6}\right)^2 = 1{,}00$
D	Testing	2	4	7	$\frac{2+16+7}{6} = 4{,}17$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0{,}69$
E	Integration	3	5	8	$\frac{3+20+8}{6} = 5{,}17$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0{,}69$
F	Dokumentation	1	2	4	$\frac{1+8+4}{6} = 2{,}17$	$\left(\frac{3}{6}\right)^2 = 0{,}25$
G	Abnahme	2	3	5	$\frac{2+12+5}{6} = 3{,}17$	$\left(\frac{3}{6}\right)^2 = 0{,}25$

5.3 Vorwärtsrechnung (früheste Termine)

Mit den Expected valueen t_e als Durationn:

ID	Activitiesr	FAS_i	$d_i = t_e$	FAE_i
A	–	0	3,17	3,17
B	A	$\text{FAE}_A = 3{,}17$	5,33	8,50
C	A	$\text{FAE}_A = 3{,}17$	6,33	9,50
D	B	$\text{FAE}_B = 8{,}50$	4,17	12,67
E	C,D	$\max(\text{FAE}_C, \text{FAE}_D) = \max(9{,}50;\ 12{,}67) = 12{,}67$	5,17	17,84
F	B	$\text{FAE}_B = 8{,}50$	2,17	10,67
G	E,F	$\max(\text{FAE}_E, \text{FAE}_F) = \max(17{,}84;\ 10{,}67) = 17{,}84$	3,17	21,01

Project duration: $T = \text{FAE}_G = 21{,}01$ Wochen.

5.4 Rückwärtsrechnung (späteste Termine)

ID	Successor	SAE_i	d_i	SAS_i
G	– (Endvorgang)	21,01	3,17	17,84
E	G	$\text{SAS}_G = 17{,}84$	5,17	12,67
F	G	$\text{SAS}_G = 17{,}84$	2,17	15,67
D	E	$\text{SAS}_E = 12{,}67$	4,17	8,50
C	E	$\text{SAS}_E = 12{,}67$	6,33	6,34
B	D,F	$\min(\text{SAS}_D, \text{SAS}_F) = \min(8{,}50;\ 15{,}67) = 8{,}50$	5,33	3,17
A	B,C	$\min(\text{SAS}_B, \text{SAS}_C) = \min(3{,}17;\ 6{,}34) = 3{,}17$	3,17	0

5.5 Float Times and Critical Path

ID	Bezeichnung	FAS	FAE	SAS	SAE	GP	FP	Kritisch
A	Anforderungen	0	3,17	0	3,17	**0**	0	✓
B	Design	3,17	8,50	3,17	8,50	**0**	0	✓
C	Prototyp	3,17	9,50	6,34	12,67	3,17	3,17	–
D	Testing	8,50	12,67	8,50	12,67	**0**	0	✓
E	Integration	12,67	17,84	12,67	17,84	**0**	0	✓
F	Dokumentation	8,50	10,67	15,67	17,84	7,17	7,17	–
G	Abnahme	17,84	21,01	17,84	21,01	**0**	0	✓

Critical path:

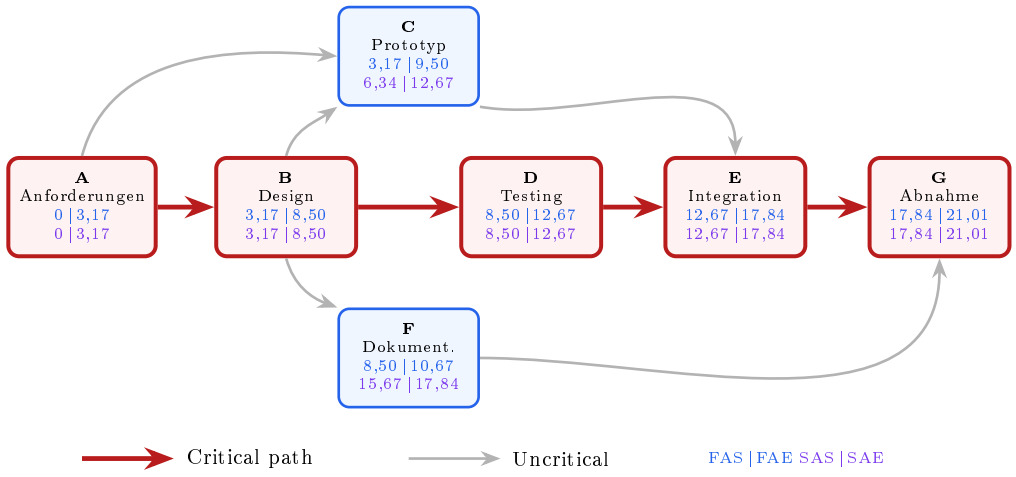
$$A \to B \to D \to E \to G$$

Project duration: $T = 3{,}17 + 5{,}33 + 4{,}17 + 5{,}17 + 3{,}17 = \mathbf{21{,}01}$ Wochen.

Uncriticale Activities:

- C (Prototyp): GP = 3,17 Wochen – kann um bis zu 3,17 Wochen verschoben werden.
- F (Dokumentation): GP = 7,17 Wochen – sehr große Flexibilität.

5.6 Network plan – Grafische Darstellung



5.7 PERT – Project duration-Analyse

Critical path: $A \to B \to D \to E \to G$

Erwartete Project duration:

$$\mu_T = t_{e,A} + t_{e,B} + t_{e,D} + t_{e,E} + t_{e,G} = 3{,}17 + 5{,}33 + 4{,}17 + 5{,}17 + 3{,}17 = \mathbf{21{,}01} \text{ Wochen}$$

Variance der Project duration:

$$\sigma_T^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_D^2 + \sigma_E^2 + \sigma_G^2 = 0{,}25 + 1{,}00 + 0{,}69 + 0{,}69 + 0{,}25 = \mathbf{2{,}88}$$

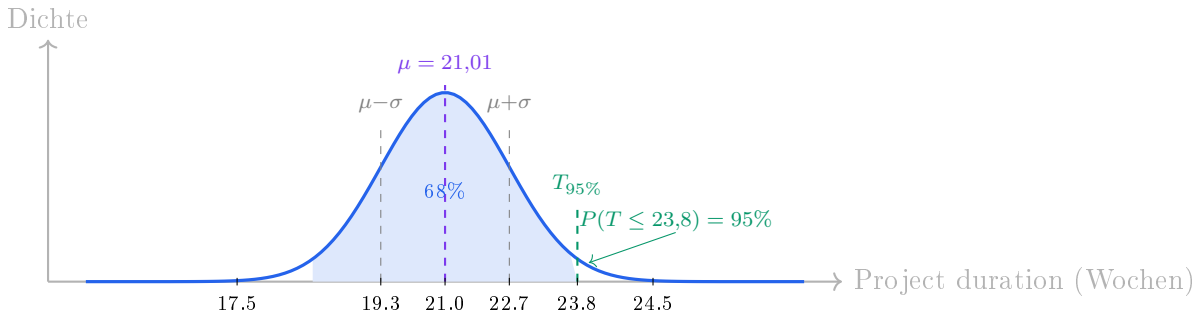
Standard deviation: $\sigma_T = \sqrt{2{,}88} \approx \mathbf{1{,}70}$ Wochen.

5.7.1 Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Deadlines

Deadline T_D	$z = (T_D - 21{,}01)/1{,}70$	$P(T \leq T_D)$	Bewertung
19,31	−1,00	15,9%	Sehr riskant
21,01	0,00	50,0%	Mäßig
22,71	1,00	84,1%	Gut
23,81	1,65	95,0%	Sicher
24,41	2,00	97,7%	Sehr sicher

Interpretation: Bei Planung mit der erwarteten Duration von 21 Wochen hat man nur 50% Chance, den Termin einzuhalten. Um 95% Sicherheit zu erreichen, sollte man **ca. 24 Wochen** einplanen (Float von ca. 3 Wochen).

5.7.2 Normal distribution der Project duration



6 Tool Description

Network plan-Tool – CPM & PERT

Das Tool berechnet CPM und PERT interaktiv für eigene Projekte.

6.1 Methoden-Auswahl

Das Tool bietet drei Modi (umschaltbar per Tab):

- **CPM:** Jeder Activity hat eine feste Duration. Eingabe: ID, Bezeichnung, Activitiesr, Duration.
- **PERT:** Drei Zeitschätzungen pro Activity. Eingabe: ID, Bezeichnung, a (optimistisch), m (wahrscheinlich), b (pessimistisch), Activitiesr.
- **CPM + PERT:** Kombinierter Modus – CPM-Analyse mit PERT-Expected valueen plus Wahrscheinlichkeitsverteilung.

6.2 Eingabemöglichkeiten

1. Eigene Eingabe per Hand:

1. Klick auf + **Neu (leer)** – öffnet leere Tabelle mit 3 Startzeilen.
2. Bezeichnungen, Durationn und Activitiesr eintragen.
3. Mit + **Activity hinzufügen** weitere Activities ergänzen.
4. Klick auf ▶ **Berechnen**.

2. CSV-Import: Strukturierte Projektdaten aus einer CSV-Datei laden. Zwei Formate werden erkannt:

CPM-Format	PERT-Format
`ID;Name;Duration;Activitiesr`	`ID;Name;a;m;b;Activitiesr`
`A;Planung;3;`	`A;Anforderungen;2;3;5;`
`B;Entwurf;5;A`	`B;Design;3;5;9;A`

3. CSV-Export: Die aktuelle Eingabe als CSV hersubject toladen – zum Speichern oder für spätere Bearbeitung.

4. Vordefinierte Beispiele:

- Beispiel 1: Bauprojekt mit 7 Activitiesn (CPM)
- Beispiel 2: Softwareprojekt mit 7 Activitiesn (PERT)

6.3 Ausgabe und Interpretation

Network plan-SVG:

- Jeder Knoten zeigt: **FAS** | **FAE** (oben) und **SAS** | **SAE** (unten).
- **Rote Knoten und Pfeile** = criticaler Pfad.
- Blaue Knoten und graue Pfeile = uncriticale Activities.
- Layout: automatische Schichtung nach topologischer Tiefe.

Ergebnisübersicht: Project duration T, Anzahl criticaler Activities, bei PERT: μ, σ, $P(T \leq \mu + \sigma)$.

Activitysdetails-Tabelle: Alle Termine (FAS, FAE, SAS, SAE), Total float (GP) und Free float (FP) für jeden Activity.

PERT-Verteilung:

- Normal distributionskurve der Project duration mit eingezeichneter $\pm\sigma$-Region.
- Wahrscheinlichkeitstabelle für verschiedene Deadlines mit Ampelbewertung (riskant/mäßig/sich

7 Summary

Kernpunkte: Network planning

1. Der **criticale Pfad** ist die längste Activitysfolge – er bestimmt die Project duration.
2. **Kritische Activities** haben Total float $\mathrm{GP} = 0$; jede Verzögerung verlängert das Projekt.
3. **Uncriticale Activities** haben $\mathrm{GP} > 0$ – dieser Spielraum kann für Ressourcenplanung genutzt werden.
4. Die **Vorwärtsrechnung** liefert früheste Termine (FAS, FAE); die **Rückwärtsrechnung** späteste (SAS, SAE).
5. **PERT** modelliert Unsicherheit: $t_e = (a + 4m + b)/6$, $\sigma^2 = ((b - a)/6)^2$.
6. Die Project duration folgt näherungsweise einer **Normal distribution** $\mathcal{N}(\mu_T, \sigma_T^2)$.
7. Für 95% Einhaltungswahrscheinlichkeit plant man $T_D = \mu_T + 1{,}645\,\sigma_T$.
8. Das Tool subject tostützt manuelle Eingabe, CSV-Import/-Export und zwei vordefinierte Beispiele.