Финансовая математика

Д-р Вольфганг Бёме

Март 2021

Оглавление

1 Основные элементы финансовой математики **2**
- 1.1 Время, капитал, платежи, финансовые потоки . . . 2
- 1.2 Сроки выплаты процентов . . . 5
- 1.3 Процентные периоды . . . 6

2 Проценты и процентные ставки. Методы расчёта **8**
- 2.1 Простые проценты . . . 9
  - 2.1.1 Пересчёт годовой ставки во внутригодовые ставки . . . 10
  - 2.1.2 Использование годовой ставки при внутригодовых периодах . . . 11
  - 2.1.3 Расчёт процентов при последовательных неравных внутригодовых периодах . . . 12
  - 2.1.4 Формирование капитала при простом начислении процентов . . . 14
- 2.2 Сложные проценты (экспоненциальное начисление) . . . 15
  - 2.2.1 Годовые периоды с постоянной ставкой . . . 16
  - 2.2.2 Расчёт процентов при внутригодовых периодах . . . 16
  - 2.2.3 Пересчёт годовой ставки во внутригодовые ставки при сложных процентах . . . 17
  - 2.2.4 Расчёт процентов при последовательных неравных внутригодовых периодах и сложном начислении . . . 18
  - 2.2.5 Смешанное начисление процентов . . . 20
  - 2.2.6 Формирование капитала при сложном начислении . . . 21
  - 2.2.7 Сравнение простого и сложного начислений . . . 22
- 2.3 Непрерывное начисление процентов . . . 23
  - 2.3.1 Связь между годовой и непрерывной ставками — годовое и многолетнее начисление . 24
  - 2.3.2 Связь между годовой и непрерывной ставками — внутригодовое начисление . . . 25

3 Теория ренты **26**
- 3.1 Процессы накопления . . . 26
- 3.2 Постоянные взносы — выплаты совпадают с концом периода . . . 26
  - 3.2.1 Пренумерандо-рента . . . 27
  - 3.2.2 Постнумерандо-рента . . . 29
  - 3.2.3 Бессрочная рента . . . 31
- 3.3 Постоянные взносы — число периодов начисления и взносов не совпадают . . . 32
- 3.4 Динамические ренты . . . 34
  - 3.4.1 Динамическая рента с переменной ставкой . . . 34
  - 3.4.2 Динамическая рента с переменными взносами . . . 35

4 Погашение задолженности **38**
- 4.1 Погашение равными долями — *Ratentilgung* . . . 39
  - 4.1.1 Совпадение периодов . . . 39
  - 4.1.2 Несовпадение периодов . . . 41
- 4.2 Погашение равными аннуитетами — *Annuitätentilgung* . . . 42
  - 4.2.1 Совпадение процентного периода и периода погашения . . . 42
  - 4.2.2 Несовпадение периода погашения с периодом начисления . . . 44
- 4.3 Надбавки и скидки при погашении . . . 45
- 4.4 Изменение условий погашения . . . 46

5 Приложение **50**
- 5.1 Статистические параметры для расчёта рисков . . . 50
- 5.2 Динамические ренты — вывод формул . . . 51
  - 5.2.1 Арифметически возрастающие ренты . . . 51
  - 5.2.2 Геометрически возрастающие ренты . . . 52

Глава 1

Основные элементы финансовой математики

1.1. Время, капитал, платежи, финансовые потоки

В данной книге [Wie18] (см. также [Hul01]) под финансовой математикой понимается математическое описание оценки и динамики денежной суммы (далее — **капитала**) в различные моменты времени или на различных временных отрезках. Уже из этого определения вытекают два важных базовых элемента: денежная сумма (капитал) и время. Известно, что одна и та же денежная сумма существенно зависит от того, в какой момент времени она рассматривается (оценивается). Предположим, у вас есть возможность получить некоторую сумму — скажем, 1000 EUR — сегодня или только через год. Скорее всего, вы предпочтёте получить её сегодня. Независимо от того, как будут развиваться события, 1000 EUR сегодня едва ли будут равноценны той же сумме через год. В пользу этого свидетельствуют следующие соображения:

- Никто не знает, не ухудшится ли ситуация настолько, что плательщик через год вообще не сможет выплатить 1000 EUR. Это называется «риском дефолта плательщика».
- Как правило, инфляция ведёт к обесцениванию денежной суммы. То есть 1000 EUR сегодня, вероятно, стоят больше, чем через год: на ту же сумму сегодня можно купить больше товаров и услуг. Однако обесценивание — не закон природы; возможно и удорожание. В любом случае нужно считаться с изменением стоимости денежной суммы в другой момент времени.
- Если вы уже сегодня располагаете 1000 EUR, вы можете вложить эти деньги — например, в срочный вклад на 1 год или в однолетние государственные облигации — и через год, вероятно, будете располагать суммой, превышающей 1000 EUR. Однако и здесь нельзя исключить, что банк не сможет выполнить свои обязательства или государство не сможет погасить облигации с соответствующими процентами.
- Ещё одним фактором риска является **валютный риск**. Например, если вы планируете отпуск в США через год и уже сегодня на полученные 1000 EUR покупаете, скажем, 1200 USD (курс 1 EUR = 1,20 USD), то та же операция через год может дать совсем другой результат: в зависимости от динамики курса вы получите больше или меньше долларов.

Возможно, вы найдёте и другие причины, по которым одна и та же денежная сумма может различаться в зависимости от момента времени. Здесь важно осознать, что капитал необходимо рассматривать как зависящий от времени. Если капитал (некоторую денежную сумму) обозначить K, то имеет смысл снабдить его временны́м индексом. Через K_t обозначим капитал K в момент t.
Рассматривая капитал в разные моменты t_1 и t_2, получим: в момент t_1 капитал равен K_{t_1}, а в момент t_2 — K_{t_2}. Изменение капитала между двумя соседними моментами обозначается $\Delta = K_{t_2} - K_{t_1}$ при $t_2 > t_1$.
Для наглядности удобно откладывать значения капитала на временно́й оси. Предположим сначала, что t_1 предшествует t_2 ($t_1 < t_2$). Тогда оба момента изобразим на оси t:



Причина изменения капитала может быть различной. Примеры: поступление или расходование денег, выплата процентов. Далее причину изменения капитала будем называть **транзакцией** и обозначать A (или A_i, если транзакций несколько). Поскольку транзакции всегда происходят в определённые моменты времени,

снабдим их временны́м индексом: A_t или A_{it}. Сумму всех транзакций в момент t независимо от знака будем обозначать A_t и рассматривать как одну агрегированную транзакцию.

$$A_t = \sum_{i=1}^{n_t} A_{it} \tag{1.1}$$

$n_t -$ число транзакций в момент t

Капитал K_t в момент t можно вычислить из капитала K_{t_1}, образовавшегося в результате последних транзакций в момент t_1, и всех транзакций в момент t:

$$K_t = K_{t_1} + \sum_{i=1}^{n_t} A_{it} \tag{1.2}$$

$$K_t = K_{t_1} + A_t \tag{1.3}$$

Графически это выглядит следующим образом:



Пример 1:

На текущем счёте выполняются следующие транзакции:

- 5 февраля проводится перевод на 300 EUR.
- 10 февраля снимается 500 EUR в банкомате.
- 20 февраля зачисляется 1000 EUR и проводится перевод 200 EUR.

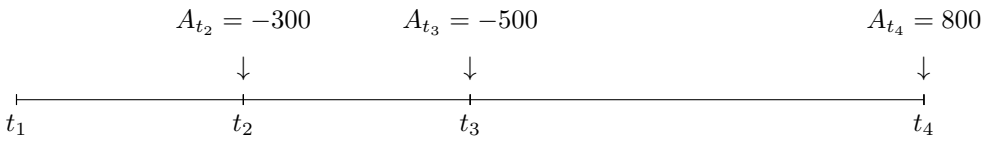
Остаток (капитал) на 1 февраля составлял 800 EUR. На нашей временно́й оси рассматриваем следующие моменты:

- t_1: 1 февраля
- t_2: 5 февраля
- t_3: 10 февраля
- t_4: 20 февраля

Соответствующие транзакции:

$$A_{t_2} = -300\,\text{EUR}$$
$$A_{t_3} = -500\,\text{EUR}$$
$$A_{t_4} = 1000\,\text{EUR} - 200\,\text{EUR} = 800\,\text{EUR}$$

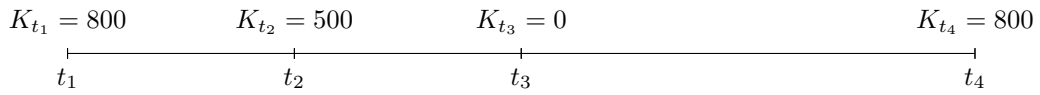
В графической форме:



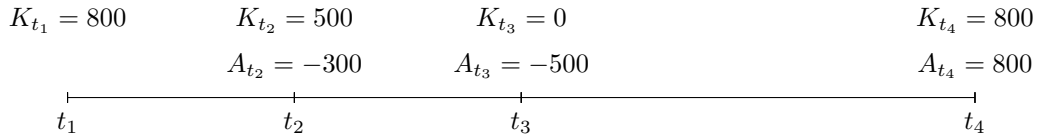
Остаток в рассматриваемые моменты:

$$
\begin{aligned}
K_{t_1} &= 800\,\text{EUR} \\
K_{t_2} &= K_{t_1} + A_{t_2} = 800\,\text{EUR} - 300\,\text{EUR} = 500\,\text{EUR} \\
K_{t_3} &= K_{t_2} + A_{t_3} = 500\,\text{EUR} - 500\,\text{EUR} = 0\,\text{EUR} \\
K_{t_4} &= K_{t_3} + A_{t_4} = 0\,\text{EUR} + 800\,\text{EUR} = 800\,\text{EUR}
\end{aligned}
$$

В графической форме:



Или в объединённой графике. Из неё видно, что транзакции ведут к изменению капитала.



Последовательность транзакций A_{t_i} или последовательность значений капитала K_{t_i} называются **финансовыми потоками** и являются предметом дальнейшего изучения.

Разумеется, финансовые потоки встречаются не только при движении средств на счёте. Другие примеры:

- последовательность платежей в погашение кредита или арендных платежей,
- периодически повторяющиеся платежи, такие как процентные доходы или арендные поступления,
- покупка и продажа ценных бумаг.

Возможны как постоянные, так и постоянно меняющиеся суммы. В приведённом выше примере рассматривалась история транзакций. Не меньший интерес представляют будущие платежи. Важен в любом случае тот факт, что после каждой транзакции стоимость капитала изменяется.

Особую роль в финансовых потоках играют проценты. Как известно, за временно́е предоставление денежных сумм выплачиваются проценты, которые нередко воспринимаются как плата за временно́е использование денег. Само по себе наличие у кого-то денег даёт ему возможность зарабатывать, временно предоставляя их. Это распространённая в условиях капитализма практика, однако с моральной точки зрения она весьма сомнительна. Существуют и иные модели кредитования — например, в исламском банкинге, где денежное вознаграждение за выдачу займов не практикуется.

Интерпретация процентов как цены за временно́е предоставление денег даже в условиях капитализма не является исчерпывающей. Кредитование может нести и негативные последствия для кредитора: он должен считаться с возможностью того, что неблагоприятные обстоятельства не позволят должнику вернуть сумму полностью или частично. Эта возможность называется **риском дефолта заёмщика** и должна учитываться при определении процентной ставки. Дополнительным аспектом являются потери от инфляции. В периоды нехватки денег дефицит может взвинтить процентные ставки до уровня, не соответствующего обычным рыночным условиям.

В рамках данной книги мы не будем исследовать политико-экономическую природу процентов, а сосредоточимся на методах их расчёта.

Для этого принимаем следующие предпосылки:

- отсутствие инфляции,
- отсутствие денежного дефицита,
- отсутствие рисков дефолта.

1.2. Сроки выплаты процентов

Прежде чем подробно заняться расчётом процентов, необходимо рассмотреть несколько базовых понятий и договорённостей. Как уже было сказано, за предоставление денег на определённый срок подлежат уплате **проценты**. Процесс кредитования можно рассмотреть с двух точек зрения: с позиции получателя проценты выплачиваются кредитору; кредитор сам ничего не платит, а получает процентные платежи. В этом смысле процентные платежи — как со стороны плательщика, так и получателя — являются транзакциями в том виде, который рассмотрен в разделе section 1.1.
С точки зрения кредитора, процентные платежи либо покидают систему движения капитала (выплачиваются кредитору), либо присоединяются к капиталу, тем самым практически увеличивая переданную в пользование сумму. С точки зрения получателя, процентные платежи — это обязательства за пользование капиталом, которые либо выплачиваются, либо временно увеличивают долг. Выплата процентов происходит в определённый момент, который называется **датой выплаты процентов**. Необходимо договориться о том, когда и как производятся выплаты и в каком размере. Размер является предметом расчёта процентов (см. главу chapter 2). В принципе возможны два варианта:

- **Единовременная выплата** за весь период предоставления денег (*срок кредитования*). Выплата может производиться в начале, в конце или в заранее определённый момент времени. Разумеется, размер процентов зависит от момента выплаты.
- Срок кредитования (*срок*) разделяется на несколько — как правило, равных — временны́х отрезков, и проценты за каждый из них выплачиваются отдельно. Здесь также можно варьировать точный срок выплаты — как правило, выплата производится в конце соответствующего отрезка, но возможны и другие варианты, например в начале. Важно, что производится **несколько выплат**. Типичный пример: при сроке 10 лет весь период делится на 10 годовых отрезков, и за каждый год производится отдельная выплата — например, в конце года.

Попробуем графически проиллюстрировать финансовые потоки для обоих случаев. Выплаты производятся в конце каждого отрезка.

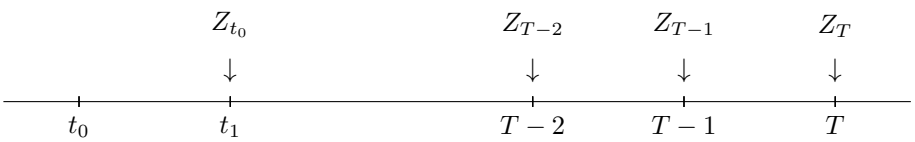
Одна выплата



Обозначения:

t_0	начало срока кредитования
T	конец срока кредитования
Z_T	выплата процентов

Несколько выплат



Обозначения:

t_0	начало срока кредитования
t_1	первая дата выплаты процентов
...	...
$T-1$	предпоследняя дата выплаты
T	последняя дата выплаты
Z_t	выплата процентов в момент t

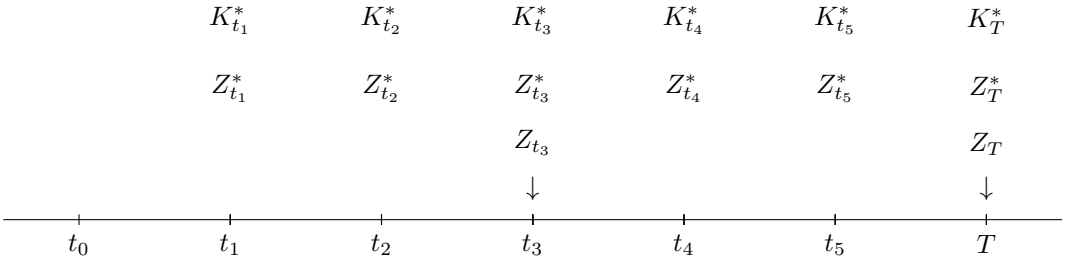
Выплата процентов производится в каждую дату выплаты. Теперь необходимо разобраться, как рассчитываются проценты.

1.3. Процентные периоды

Период, лежащий в основе расчёта процентов, называется **процентным периодом**. Даты выплат могут приходиться на один и тот же процентный период (но необязательно). Весьма часто выплаты производятся в конце или начале процентного периода. Все эти варианты проиллюстрированы примерами.

1. Число выплат меньше числа процентных периодов:

Допустим, проценты начисляются ежегодно, а выплачиваются раз в 3 года. Срок — 6 лет. Таким образом, происходят 2 выплаты; в конце каждого процентного периода проценты накапливаются.



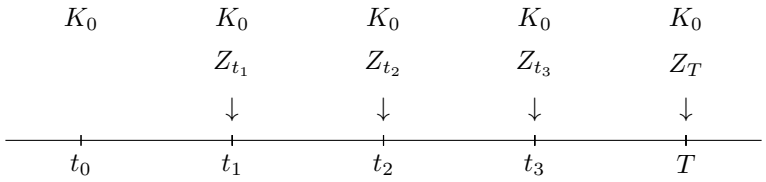
Обозначения:

t_0	начало первого процентного периода (t_0, t_1)
t_1	конец 1-го и начало 2-го периода (t_1, t_2)
t_2	конец 2-го и начало 3-го периода (t_2, t_3)
...	...
$t_6 = T$	конец последнего периода (t_5, t_6) и конец срока
t_3	1-я дата выплаты
(T)	2-я дата выплаты
$Z^*_{t_1}$	проценты за период (t_0, t_1)
$Z^*_{t_2}$	проценты за период (t_1, t_2)
...	...
$Z^*_{t_6}$	проценты за период (t_5, t_6)
Z_{t_3}	1-я выплата процентов
Z_T	2-я выплата процентов
K_{t_0}	капитал в момент t_0 (начальный)
K_t	капитал в момент t

Проценты за периоды (t_0, t_1), (t_1, t_2), (t_2, t_3), а также (t_3, t_4), (t_4, t_5) и (t_5, t_6) начисляются, но не выплачиваются. Они накапливаются в Z_{t_3} и Z_T и суммарно выплачиваются в даты t_3 и T. В конце срока кредитования переданный капитал K_{t_0} возвращается кредитору.

2. Внутри одного процентного периода несколько дат выплаты:

Процентный период — 1 год, выплаты — полугодовые. Срок — 2 года; итого 4 выплаты.



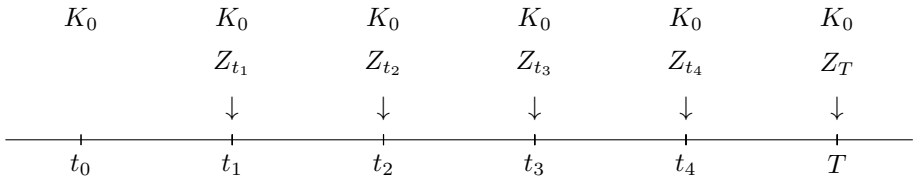
Обозначения:

t_0	начало первого периода (t_0, t_2)
t_2	конец 1-го и начало 2-го периода (t_2, T)
T	конец срока кредитования
(t_1)	1-я дата выплаты
(t_2)	2-я дата выплаты
...	...
(T)	4-я дата выплаты
Z_{t_1}	1-я выплата
Z_{t_2}	2-я выплата
...	...
Z_T	4-я выплата
K_{t_0}	капитал в моменты t_0, t_1, t_2, t_3 и T

Расчёт процентов производится в конце каждого процентного периода. Капитал не изменяется, так как в даты выплат проценты выплачиваются.

3. Выплаты производятся в конце каждого процентного периода:

Капитал начисляется ежегодно (процентный период — 1 год). Выплаты — также в конце года. Срок — 5 лет:



Обозначения:

t_0	начало первого периода (t_0, t_1)
t_1	конец 1-го и начало 2-го периода (t_1, t_2)
...	...
T	конец последнего периода (t_4, T) и конец срока
Z_{t_1}	1-я выплата за период (t_0, t_1)
Z_{t_2}	2-я выплата за период (t_1, t_2)
...	...
Z_T	последняя выплата за период (t_4, T)
K_{t_0}	капитал в моменты t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 и T

Глава 2

Проценты и процентные ставки. Методы расчёта

Для расчёта процентов необходимы следующие величины:

1. продолжительность процентного периода,
2. размер предоставленного капитала,
3. процентная ставка.

Продолжительность процентного периода вычисляется из конечного и начального моментов периода. Обозначив начало через t_0, а конец — через t_1 ($t_1 > t_0$), получим:

$$\Delta t = t_1 - t_0$$

Размер начисляемого капитала в начале периода по-прежнему обозначается K_{t_0}.
Процентная ставка необходима для определения размера процентов в зависимости от величины капитала K_{t_0} и продолжительности периода Δt. Процентная ставка (обозначается i) указывает процентную долю за предоставление капитала в размере 1 ($K = 1$) в течение периода (t_0, t_1). Иными словами, ставка i — это проценты Z, которые зарабатывает капитал $K = 1$ за период (t_0, t_1). За предоставление капитала K_{t_0} на срок Δt выплачиваются проценты в размере $K_{t_0} \cdot i$. В общем виде:

$$Z = K \cdot i \tag{2.1}$$

Описанный принцип расчёта процентов предполагает, что ставка i задаётся именно для продолжительности данного периода. Это означало бы: для предоставления 2000 EUR на 2,5 месяца нам потребовалась бы «2,5-месячная ставка», чтобы рассчитать проценты как долю капитала. В принципе это возможно, но не принято. Как правило, используется годовая ставка $i_{\text{год}}$ или месячная ставка, из которых выводится ставка для любого периода.

Таким образом, необходимо различать, для какого периода задана ставка. В идеальном случае ставка соответствует периоду — например, годовая ставка для годового периода или месячная ставка для месячного периода. Если это не так, либо применяется метод пересчёта, либо ставка адаптируется к длине периода. Оба подхода будут рассмотрены.

Если ставка соответствует продолжительности периода, расчёт процентов за один период по простой формуле:

$$Z = K \cdot i$$

Здесь K — капитал в начале периода, i — специфическая для периода ставка.

Сложнее, если ставка не соответствует периоду. Прежде чем перейти к этому случаю, необходимо обсудить расчёт процентов, когда число выплат не совпадает с числом периодов. Если выплаты из нескольких периодов объединяются в одну выплату на дату, то накопившиеся за период проценты должны присоединяться к

капиталу, поскольку они не выплачиваются. Лежащая в основе теория называется **сложными процентами** или **экспоненциальным начислением**. В отличие от этого расчёт процентов внутри одного периода (при условии, что ставка соответствует его длине) производится без эффекта сложных процентов и называется **простыми процентами**. Оба метода рассмотрены в следующем разделе.

2.1. Простые проценты

Рассмотрим несколько типичных случаев применения простых процентов.

1. Процентный период и срок кредитования совпадают.
2. Срок кредитования разбит на ряд — часто равных — процентных периодов. В конце (или в начале) каждого периода производятся выплаты. Важно, что проценты *выплачиваются*, а не присоединяются к капиталу в конце периода.
3. Срок кредитования не превышает одного года. Здесь также применяются простые проценты — как это обычно бывает — при использовании годовой ставки.

Принимаем два дополнительных предположения, которые позднее будут сняты:

1. Процентная ставка соответствует длине процентного периода.
2. Процентная ставка постоянна на всём сроке.

Примеры:

1. Срок и единственный процентный период — 1 год. Задана годовая ставка.
2. Срок — 3 года, периоды — по 1 году. Задана годовая ставка. Выплаты — в конце каждого периода.
3. Срок — 1 год. Длина каждого периода — полгода. Задана полугодовая ставка. Выплаты — после каждого периода (то есть раз в полгода).

Для каждого периода j проценты Z_j рассчитываются по правилу простых процентов:

$$Z_j = K \cdot i \tag{2.2}$$

В конце каждого периода производится выплата процентов. При нескольких периодах проценты не присоединяются к капиталу, поскольку по соглашению каждый период сопровождается выплатой. Капитал в каждом периоде постоянен.

Рассчитаем проценты для примеров. Годовая ставка для примеров 1 и 2 — 5%, для примера 3 полугодовая ставка — $2{,}5\%$, капитал — 1000 EUR:

1. $Z = K \cdot i = 1000 \cdot 0{,}05 = 50$
   Единовременная выплата — 50 EUR.
2. $Z_j = K \cdot i = 1000 \cdot 0{,}05 = 50,\ j = 1, 2, 3$
   Три выплаты по 50 EUR.
3. $Z_j = K \cdot i = 1000 \cdot 0{,}025 = 25,\ j = 1, 2$
   Две полугодовые выплаты по 25 EUR. На практике возможна одна выплата в размере 50 EUR.

Простые проценты, как правило, применяются тогда, когда длина периода не превышает одного года. Если период короче года, говорят о **внутригодовом начислении**.

На практике выплаты нередко производятся после нескольких внутригодовых периодов, что методически небезупречно: ведь проценты накапливаются после каждого периода и сами должны были бы начисляться в последующих периодах вплоть до выплаты.

Исходим из того, что ставка соответствует длине периода. Если это не так, применяются два подхода:

1. Пересчёт заданной ставки в ставку, соответствующую длине периода.
2. Использование заданной ставки (даже если она не соответствует длине периода) с модификацией расчётной формулы.

В банковской практике принято использовать годовые ставки (обозначение $i_{p/a}$ или, если не оговорено иное, i), в том числе при внутригодовых периодах. В принципе можно выбрать произвольную длину периода — это будет рассмотрено позднее. Распространены следующие внутригодовые периоды и ставки:

- полугодовой период / полугодовая ставка (обозначение $i_{\frac{1}{2}}$)
- квартальный период / квартальная ставка (обозначение $i_{\frac{1}{4}}$)
- месячный период / месячная ставка (обозначение $i_{\frac{1}{12}}$)
- дневной период / дневная ставка (обозначение при определённых условиях $i_{\frac{1}{360}}$)

Обозначение основано на подходе из [Wie18], где год в зависимости от способа рассмотрения делится на несколько равных временных интервалов. Число всех интервалов в году называется в [Wie18] **базой**. Таким образом:

- при полугодовых периодах база $= 2$
- при квартальных периодах база $= 4$
- при месячных периодах база $= 12$
- при дневных периодах база $= 360$

Последнее обозначение основано на том, что продолжительность года принимается равной 360 дням. Подробнее — в разделе subsection 2.1.2

В общем виде внутригодовая ставка для периода длиной m интервалов при заданной базе обозначается $i_{\frac{m}{\text{база}}}$.

Например, $i_{\frac{7}{12}}$ обозначает ставку для периода в семь месяцев при базе 12. Иная запись — $i_{\frac{210}{360}}$, при базе 360: ставка за 210 дней, что соответствует 7 месяцам (при условии 30 дней в месяце).

2.1.1. Пересчёт годовой ставки во внутригодовые ставки

Формула пересчёта в общем виде:

$$i_{\frac{1}{m}} = \frac{i}{m} \tag{2.3}$$

$$i = i_{\frac{1}{m}} \cdot m \tag{2.4}$$

Здесь m — число внутригодовых периодов в году. Для полугодовой, квартальной и месячной ставок:

$$i_{\frac{1}{2}} = \frac{i}{2}$$
$$i_{\frac{1}{4}} = \frac{i}{4}$$
$$i_{\frac{1}{12}} = \frac{i}{12}$$

Разумеется, можно рассчитать и нестандартные внутригодовые ставки, например двухмесячную (обозначение $i_{\frac{1}{6}}$, так как год состоит из 6 двухмесячных периодов):

$$i_{\frac{1}{6}} = \frac{i}{6}$$

Пример:

Годовая ставка $i = 6\%$. Каковы соответствующие полугодовая, квартальная, месячная и двухмесячная ставки и проценты?

Внутригодовые ставки:

$$i_{\frac{1}{2}} = \frac{0{,}06}{2} = 0{,}03$$
$$i_{\frac{1}{4}} = \frac{0{,}06}{4} = 0{,}015$$
$$i_{\frac{1}{12}} = \frac{0{,}06}{12} = 0{,}005$$
$$i_{\frac{2}{12}} = \frac{0{,}06}{6} = 0{,}01$$

Проценты за один период:

$$Z_{\frac{1}{2}} = 1000 \cdot 0{,}03 = 30$$
$$Z_{\frac{1}{4}} = 1000 \cdot 0{,}015 = 15$$
$$Z_{\frac{1}{12}} = 1000 \cdot 0{,}005 = 5$$
$$Z_{\frac{2}{12}} = 1000 \cdot 0{,}01 = 10$$

2.1.2. Использование годовой ставки при внутригодовых периодах

Используем стандартные длины периодов: полугодовые, квартальные или месячные. Расчёт прост:

$$Z_{\frac{1}{2}} = K \cdot \frac{1}{2} \cdot i$$
$$Z_{\frac{1}{4}} = K \cdot \frac{1}{4} \cdot i$$
$$Z_{\frac{1}{12}} = K \cdot \frac{1}{12} \cdot i$$

Проценты за полугодовые, квартальные и месячные периоды обозначены $Z_{\frac{1}{2}}$, $Z_{\frac{1}{4}}$ и $Z_{\frac{1}{12}}$ соответственно. Аналогично можно рассчитать проценты и для производных периодов, например для двухмесячного периода:

$$Z_{\frac{2}{12}} = K \cdot \frac{2}{12} \cdot i$$

Пример:

Рассчитать проценты за периоды полгода, квартал, месяц и два месяца при годовой ставке 6% и капитале 1000 EUR:

$$Z_{\frac{1}{2}} = 1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}06 = 30$$
$$Z_{\frac{1}{4}} = 1000 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0{,}06 = 15$$
$$Z_{\frac{1}{12}} = 1000 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0{,}06 = 5$$
$$Z_{\frac{2}{12}} = 1000 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0{,}05 = 10$$

При нестандартных длинах периодов используется число дней периода. Здесь необходимы дополнительные договорённости. Число дней в периоде зависит от так называемого **соглашения о подсчёте дней** (*day count convention*). Наряду с точным подсчётом дней для месяцев (январь: 31 день, февраль: 28 или 29 дней и т.д.) и для года (365 или 366 дней) — обозначаем сокращённо act — нередко применяются упрощения (например, каждый месяц — 30 дней, год — 360 дней). Существуют и другие распространённые комбинации:

$day\,count\,conv.$	Дней в месяце	Дней в году
$30/360$	30	360
$30/365$	30	365
$act/360$	фактич.	360
$act/365$	фактич.	365
act/act	фактич.	фактич.

Проиллюстрируем подход для периода (1.1 — 30.6.) в високосный год. Период составляет ровно 182 дня (январь: 31, февраль: 29, март: 31, апрель: 30, май: 31, июнь: 30). Число дней согласно *day count convention* варьируется в зависимости от договорённости:

$day\,count\,conv.$	Дней в месяце	Дней в году	1.1–30.6
$30/360$	30	360	$180/360$
$30/365$	30	365	$180/365$
$act/360$	фактич.	360	$182/360$
$act/365$	фактич.	365	$182/365$
act/act	фактич.	фактич.	$182/366$

Ещё один пример: 1.2. — 31.3. (невисокосный год) — 59 дней.
Капитал: 100 EUR. Ставка: 0,05.

$day\,count\,conv.$	Дней/мес.	Дней/год	1.2–31.3.	Проценты
$30/360$	30	360	$180/360$	$60/360 \cdot 5\,\text{EUR} = 0{,}833\,\text{EUR}$
$30/365$	30	365	$180/365$	$60/365 \cdot 5\,\text{EUR} = 0{,}822\,\text{EUR}$
$act/360$	факт.	360	$59/360$	$59/360 \cdot 5\,\text{EUR} = 0{,}819\,\text{EUR}$
$act/365$	факт.	365	$59/365$	$59/365 \cdot 5\,\text{EUR} = 0{,}808\,\text{EUR}$
act/act	факт.	факт.	$59/365$	$59/365 \cdot 5\,\text{EUR} = 0{,}808\,\text{EUR}$

2.1.3. Расчёт процентов при последовательных неравных внутригодовых периодах

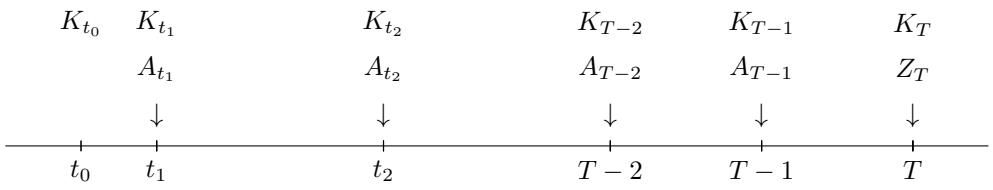
До сих пор предполагалось, что все периоды равны. Это характерно для многих финансовых продуктов, однако существует немало примеров с различными по длине последовательными периодами.

Типичный пример — начисление процентов по текущим счетам в кредитных учреждениях. Регулярные поступления и списания приводят к тому, что остаток изменяется при каждой транзакции и затем остаётся постоянным в течение нескольких дней. Время, в течение которого остаток неизменен, образует процентный период. Один период непосредственно следует за другим в течение всего расчётного срока. В конце расчётного периода — как правило, квартала — кредитное учреждение начисляет накопленные проценты. При положительном остатке начисляются кредитные проценты, при отрицательном — дебетовые.

Финансовый поток текущего счёта в течение расчётного периода можно рассматривать как последовательность неравных по длине, следующих друг за другом процентных периодов. Динамику потока задают транзакции, постоянно изменяющие размер начисляемого капитала. Обозначив моменты изменения остатка через t_i $(i = 1, 2, ..., T)$, получим последовательность $(T-1)$ периодов:

$$(t_1, t_2), (t_2, t_3), ..., (T-2, T-1), (T-1, T)$$

В графической форме:



Обозначения:

t_0	начало первого периода (t_0, t_1)
t_1	конец 1-го и начало 2-го периода (t_1, t_2)
t_2	конец 2-го периода
$T-2$	начало предпоследнего периода $(T-2, T-1)$
$T-1$	конец предпоследнего и начало последнего периода $(T-1, T)$
T	конец последнего периода $(T-1, T)$
A_{t_1}	транзакция в момент t_1
A_{t_2}	транзакция в момент t_2
A_{T-2}	транзакция в момент $T-2$
A_{T-1}	транзакция в момент T_1
Z_T	выплата процентов за период (t_1, T) в момент T
K_{t_0}	остаток в момент t_0 (начальный)
K_{t_1}	остаток в момент t_1
K_{t_2}	остаток в момент t_2
K_{T-2}	остаток в момент T_2
K_{T-1}	остаток в момент $T-1$
K_T	остаток в момент T

Замечание: в графике для каждого момента указана только одна транзакция. При нескольких транзакциях их следует понимать как агрегат.

Капитал изменяется в момент транзакции(й):

$$K_{t_{j+1}} = K_{t_j} + A_{t_{j+1}} \tag{2.5}$$

Расчёт процентов в конце каждого периода (t_j, t_{j+1}) (при заданной годовой ставке i):

$$Z_{(t_j,t_{j+1})} = K_{t_j} \cdot \frac{\Delta_{(t_j,t_{j+1})}}{\Delta_{\text{год}}} \cdot i \tag{2.6}$$

Обозначения:

$Z_{(t_j,t_{j+1})}$	проценты за период (t_j, t_{j+1})
K_{t_j}	капитал в начале периода (t_j, t_{j+1})
$\Delta_{(t_j,t_{j+1})}$	длина периода в днях согласно выбранному соглашению
$\Delta_{\text{год}}$	длина года в днях согласно соглашению
i	годовая ставка

В банковской практике нередко проценты не выплачиваются и не присоединяются к капиталу. Изменение капитала вызывается исключительно транзакциями, а проценты пока не учитываются. Как вариант — проценты можно присоединить к капиталу и тоже начислять. Этот подход рассматривается в разделе section 2.2.

Применяемый в кредитных учреждениях метод, на мой взгляд, не является корректным — он даёт кредитному учреждению дополнительный доход. Так, при расчёте по текущим счетам применяется так называемый **ступенчатый метод** (*Staffelmethode*). Проценты за каждый период рассчитываются, как описано выше, но к капиталу не присоединяются. В конце расчётного периода T проценты за каждый из периодов суммируются в единую выплату:

$$Z_T = \sum_{j=1}^{n} Z_{(t_j,t_{j+1})}$$

Здесь n — число периодов в расчётном сроке.

На примере движения средств по текущему счёту в течение квартала проиллюстрируем ступенчатый метод.

Пример

В IV квартале выполняются следующие операции:

11.10. Пополнение на 1500,00 EUR
19.11. Пополнение на 300,00 EUR
Перевод 450 EUR
15.12. Снятие в банкомате 500,00 EUR

Транзакции:
$t_1 = 11.10.$ $A_1 = 1500{,}00$ EUR
$t_2 = 19.11.$ $A_2 = -150{,}00$ EUR
$t_3 = 15.12.$ $A_3 = -500{,}00$ EUR

Начальный остаток на 1.10.: 10 000,00 EUR.

Остаток без процентов:
$t_0 = 1.10.$ $K_0 = 10\,000{,}00$ EUR
$t_1 = 11.10.$ $K_1 = 11\,500{,}00$ EUR
$t_2 = 19.11.$ $K_2 = 11\,350{,}00$ EUR
$t_3 = 15.12.$ $K_3 = 10\,850{,}00$ EUR
$t_4 = 31.12.$ $K_4 = 10\,850{,}00$ EUR

Расчёт процентов для каждого периода. Годовая ставка по остатку — 2%. Соглашение $30/360$:

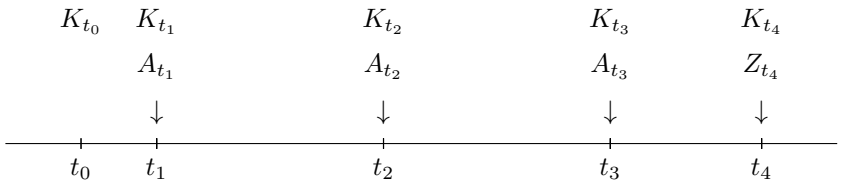
$$Z_{t_0,t_1} = 10000 \cdot \frac{10}{360} \cdot 0{,}02 = 5{,}56$$
$$Z_{t_1,t_2} = 11500 \cdot \frac{39}{360} \cdot 0{,}02 = 24{,}92$$
$$Z_{t_2,t_3} = 11350 \cdot \frac{26}{360} \cdot 0{,}02 = 16{,}39$$
$$Z_{t_3,t_4} = 10850 \cdot \frac{15}{360} \cdot 0{,}02 = 9{,}04$$

По ступенчатому методу проценты суммируются и в конце квартала зачисляются на счёт:

$$\begin{aligned} Z_{t_4} &= Z_{t_0,t_1} + Z_{t_1,t_2} + Z_{t_2,t_3} + Z_{t_3,t_4} = \\ &= 5{,}56 + 24{,}92 + 16{,}39 + 9{,}04 = 55{,}91 \\ K_{t_4} &= 10\,850{,}00 + 55{,}91 = 10\,905{,}91 \end{aligned}$$

Строго говоря, суммы процентов следовало бы прибавлять к капиталу по мере их начисления. Тогда и сам расчёт процентов нужно было бы скорректировать, поскольку в его основе лежит изменённый капитал — то есть фактически начисляются проценты на проценты. Этот пример продолжается в разделе о сложных процентах.

При ступенчатом методе финансовый поток выглядит следующим образом:



2.1.4. Формирование капитала при простом начислении процентов

Формирование капитала при простом начислении означает, что проценты присоединяются к капиталу. Капитал после одной или нескольких выплат всегда превышает начальный. При одном периоде:

$$K_{t_1} = K_{t_0} + Z_{(t_0,t_1)} = K_{t_0} + K_{t_0} \cdot i = K_{t_0} \cdot (1 + i)$$

Обозначения:

K_{t_0}	начальный капитал в момент $t = t_0$
K_{t_1}	конечный капитал в момент $t = t_1$
$Z_{(t_0,t_1)}$	проценты за период (t_0, t_1)
i	ставка для длины периода (t_0, t_1)

Накопленный капитал K_{t_1} в финансовой математике называется **будущей стоимостью** (*Endwert*), начальный капитал K_{t_0} **— текущей стоимостью** (*Barwert*).

Выражение $q = (1 + i)$ называется **коэффициентом наращения** (*Aufzinsfaktor*), а выражение $\frac{1}{q} = \frac{1}{1+i}$ —

коэффициентом дисконтирования (*Abzinsfaktor, Diskontfaktor*). Тогда:

$$K_{t_1} = K_{t_0} \cdot q$$
$$K_{t_0} = K_{t_1} \cdot \frac{1}{q}$$

Если ставка задана не для длины периода, её следует определить согласно разделу subsection 2.1.1.

При более чем одном, но равных по длине периодах (числом m) формула принимает вид:

$$K_{t_m} = K_{t_0} + \sum_{j=1}^{m} Z_{(t_{j-1},t_j)} \tag{2.7}$$
$$= K_{t_0} \cdot (1 + m \cdot i) \tag{2.8}$$

Обозначения:

K_{t_0}	начальный капитал в момент $t = t_0$
K_{t_m}	конечный капитал (будущая стоимость) в момент $t = t_m$
$Z_{(t_{j-1},t_j)}$	проценты за период (t_{j-1}, t_j)
i	ставка для длины периода (t_{j-1}, t_j)

С помощью коэффициентов наращения и дисконтирования:

$$K_{t_m} = K_{t_0} \cdot q$$
$$K_{t_0} = K_{t_m} \cdot \frac{1}{q}$$
$$q = (1 + m \cdot i)$$
$$\frac{1}{q} = \frac{1}{(1 + m \cdot i)}$$

При переменных ставках для каждого периода формулы модифицируются:

$$K_{t_m} = K_{t_0} + \sum_{j=1}^{m} Z_{(t_{j-1},t_j)}$$
$$= K_{t_0} + \sum_{j=1}^{m} K_{t_0} \cdot i_j$$
$$= K_{t_0} \cdot (1 + \sum_{j=1}^{m} i_j)$$

Здесь i_j — ставка, специфическая для периода (t_{j-1}, t_j).

Среднюю постоянную ставку можно вывести, приравняв конечные стоимости при постоянной и переменной ставках:

$$K_{t_0} \cdot (1 + m \cdot i) = K_{t_0} \cdot (1 + \sum_{j=1}^{m} i_j)$$
$$i = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^{m} i_j$$

Средняя постоянная ставка равна арифметическому среднему переменных ставок.

В качестве примера — Федеральные сберегательные облигации типа A. Срок — 6 лет, процентный период — 1 год. Выплаты производятся в конце каждого периода. Ставки ежегодно возрастают и составляют в настоящее время $0{,}5\%;\ 1\%;\ 1{,}5\%;\ 2\%;\ 2{,}25\%;\ 2{,}75\%$.

2.2. Сложные проценты (экспоненциальное начисление)

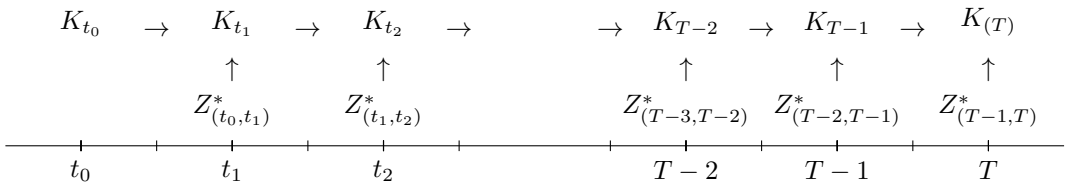
В отличие от простых, при сложных процентах начисленные проценты сами начисляются в последующих периодах. Необходимым условием является наличие нескольких периодов. При этом неважно, насколько длинен период. Сложные проценты могут применяться и для внутригодовых периодов.

2.2.1. Годовые периоды с постоянной ставкой

Для наглядности сначала предположим, что срок длится несколько лет. В конце срока производится **одна** выплата. Процентный период — 1 год. Срок разбит на n годовых периодов. Задана постоянная годовая ставка.

Начисление производится постнумерандо: проценты, накопленные в каждом периоде, в конце периода присоединяются к капиталу. Эти проценты обозначаем Z^* в отличие от выплаченных Z. Новый капитал, увеличенный на проценты, становится основой для следующего периода.

Финансовые потоки для этой схемы:



Обозначения:

t_0	начало 1-го периода (t_0, t_1)
t_1	конец 1-го и начало 2-го периода (t_1, t_2)
t_2	конец 2-го и начало 3-го периода (t_2, t_3)
$T-2$	конец периода $(T-3, T-2)$ и начало предпоследнего $(T-2, T-1)$
$T-1$	конец предпоследнего и начало последнего периода $(T-1, T)$
T	конец последнего периода (конец срока)
$Z^*_{(t_{j-1},t_j)}$	начисление за период (t_{j-1}, t_j)
K_{t_0}	начальный капитал
K_{t_j}	капитал в момент t_j
K_T	конечный капитал в момент T

Рассмотрим формирование капитала начиная с **первого** периода:

$$\begin{aligned} Z^*_{(t_0,t_1)} &= K_{t_0} \cdot i \\ K_{t_1} &= K_{t_0} + Z^*_{(t_0,t_1)} = K_{t_0} \cdot (1+i) \end{aligned}$$

Для **последнего** периода:

$$\begin{aligned} Z^*_{(T-1,T)} &= K_{T-1} \cdot i \\ K_T &= K_{T-1} \cdot (1+i) = K_{t_0} \cdot (1+i)^n \end{aligned}$$

Видно, что начисление идёт экспоненциально с постоянным темпом роста i. Аналогично простым процентам, выражение $(1+i)$ называется **коэффициентом наращения**, а $\frac{1}{1+i}$ **— коэффициентом дисконтирования** за один период:

$$q = (1+i) \tag{2.9}$$

$$\hat{q} = \frac{1}{q} = \frac{1}{(1+i)} \tag{2.10}$$

K_T **— будущая стоимость**, K_{t_0} **—** начальный капитал или **текущая стоимость**. Связь между ними:

$$K_T = K_{t_0} \cdot q^n \tag{2.11}$$

$$K_{t_0} = K_T \cdot \frac{1}{q^n} = K_T \cdot \hat{q}^n \tag{2.12}$$

q^n **— коэффициент наращения**, $\hat{q} = \frac{1}{q^n}$ **— коэффициент дисконтирования** для n периодов.

2.2.2. Расчёт процентов при внутригодовых периодах

Теперь рассмотрим начисление на основе внутригодовых периодов.

Капитал начисляется внутригодово (m периодов в году), срок — несколько лет (число лет $= n$), проценты в конце каждого периода присоединяются к капиталу. Задана периодоспецифическая ставка $i_{\text{период}}$. Как правило, используются полугодовые, квартальные, месячные и дневные периоды. Для последних применяем соглашение $30/360$. Соответствующие ставки: $i_{\frac{1}{2}}$, $i_{\frac{1}{4}}$, $i_{\frac{1}{12}}$ и $i_{\frac{1}{360}}$ (в общем виде $i_{\frac{1}{m}}$).

Конечный капитал:

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{m}})^m \\ K_2 &= K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{m}})^{2m} \\ ... &= ... \\ K_n &= K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{m}})^{nm} \end{aligned}$$

После m_0 периодов накопленный капитал: $K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{m}})^{m_0}$.

Пример

Капитал 10 000 EUR, квартальная ставка 2%, срок — 5 лет:

$$K_5 = 10000 \cdot (1 + 0{,}02)^{20} = 14859{,}47$$

После 3 лет и 3 кварталов: $K_{3\frac{3}{4}} = 10000 \cdot 1{,}02^{15} = 13458{,}68$.

Как показано в следующем подразделе, квартальная ставка 2% не соответствует годовой ставке $4 \cdot 2\% = 8\%$.

2.2.3. Пересчёт годовой ставки во внутригодовые ставки при сложных процентах

По аналогии с простым начислением возникает вопрос: как пересчитать годовые ставки во внутригодовые при сложном начислении? Начнём со стандартных внутригодовых периодов: месяц, квартал, полугодие. Внутригодовые ставки обозначаются, как и при простом начислении: $i_{\frac{1}{12}}$, $i_{\frac{1}{4}}$ и $i_{\frac{1}{2}}$.

На примере квартальной ставки поясним пересчёт. Начисление — в конце каждого квартала, проценты присоединяются к капиталу:

$$\begin{aligned} Z_1 &= K_0 \cdot i_{\frac{1}{4}} \\ K_1 &= K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{4}}) \\ K_4 &= K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{4}})^4 = K_0 \cdot (1 + i) \\ i &= (1 + i_{\frac{1}{4}})^4 - 1 \end{aligned}$$

В общем виде:

$$K_m = K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{m}})^m = K_0 \cdot (1 + i) \tag{2.13}$$

Пересчёт внутригодовой ставки в годовую:

$$i = (1 + i_{\frac{1}{m}})^m - 1 \tag{2.14}$$

Для месячной и полугодовой ставок:

$$\begin{aligned} i &= (1 + i_{\frac{1}{2}})^2 - 1 \\ i &= (1 + i_{\frac{1}{12}})^{12} - 1 \end{aligned}$$

Обратный пересчёт:

$$i_{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{(1 + i)} - 1 \tag{2.15}$$

Пример

10 000 EUR, месячная ставка $0{,}5\%$, срок — 1 год.

1. Какова сумма в конце года?

2. Какова соответствующая годовая ставка?
3. Какова была бы сумма при простом начислении?
4. Какова при этом годовая ставка при простом начислении?

Сложное начисление:

$$K_{12} = 10000 \cdot (1 + 0{,}005)^{12} = 10\,616{,}77$$
$$i = (1 + 0{,}005)^{12} - 1 = 0{,}0617$$

Простое начисление:

$$K_{12} = 10000 \cdot (1 + 0{,}06 \cdot 12) = 10\,600{,}00$$
$$i = 0{,}005 \cdot 12 = 0{,}06$$

При сложном начислении итоговая сумма больше на 16,77 EUR, годовая ставка выше (6,17% против 6%).

2.2.4. Расчёт процентов при последовательных неравных внутригодовых периодах и сложном начислении

Вернёмся к примеру из раздела subsection 2.1.3 и покажем корректный расчёт с учётом сложных процентов. Напомним сначала постановку задачи и результат ступенчатого метода.

Пример

В четвёртом квартале года происходят следующие движения по счёту:

11.10.	Пополнение на 1500,00 EUR
19.11.	Пополнение на 300,00 EUR
	Перевод 450 EUR
15.12.	Снятие в банкомате 500,00 EUR

Отсюда транзакции:

$$t_1 = 11.10. \quad A_{t_1} = 1500{,}00 \text{ EUR}$$
$$t_2 = 19.11. \quad A_{t_2} = -150{,}00 \text{ EUR}$$
$$t_3 = 15.12. \quad A_{t_3} = -500{,}00 \text{ EUR}$$

Начальный остаток на 1.10.: $K_{t_0} = 10\,000{,}00$ EUR. Остаток без учёта процентов:

$$t_0 = 1.10. \quad K_{t_0} = 10\,000{,}00 \text{ EUR}$$
$$t_1 = 11.10. \quad K_{t_1} = 11\,500{,}00 \text{ EUR}$$
$$t_2 = 19.11. \quad K_{t_2} = 11\,350{,}00 \text{ EUR}$$
$$t_3 = 15.12. \quad K_{t_3} = 10\,850{,}00 \text{ EUR}$$
$$t_4 = 31.12. \quad K_{t_4} = 10\,850{,}00 \text{ EUR}$$

По ступенчатому методу проценты за каждый период начисляются отдельно при годовой ставке 2%, соглашение $30/360$:

$$Z_{t_0,t_1} = 10000 \cdot \frac{10}{360} \cdot 0{,}02 = 5{,}56$$
$$Z_{t_1,t_2} = 11500 \cdot \frac{39}{360} \cdot 0{,}02 = 24{,}92$$
$$Z_{t_2,t_3} = 11350 \cdot \frac{26}{360} \cdot 0{,}02 = 16{,}39$$
$$Z_{t_3,t_4} = 10850 \cdot \frac{15}{360} \cdot 0{,}02 = 9{,}04$$

$$Z(t_0, t_4) = 5{,}56 + 24{,}92 + 16{,}39 + 9{,}04 = 55{,}91$$
$$K_{t_4} + Z(t_0, t_4) = 10850{,}00 + 55{,}91 = 10905{,}91$$

Конечный капитал по ступенчатому методу — 10 905,91 EUR.

Строго говоря, начисленные проценты должны присоединяться к капиталу. Если проценты не выплачиваются и добавляются к капиталу, то капитал $K^*_{t_{j+1}}$ после начисления процентов в момент t_{j+1} увеличивается на накопленные проценты $Z^*_{(t_j,t_{j+1})}$:

$$K^*_{t_{j+1}} = K^*_{t_j} + Z^*_{(t_j,t_{j+1})} = K_{t_j} + A_{t_{j+1}} + Z^*_{(t_j,t_{j+1})}$$

Скорректированный капитал $K^*_{t_j}$ включает накопленные проценты. В следующем расчётном периоде основой для начисления служит уже не K_{t_j}, а $K^*_{t_j}$. Соответствующие проценты обозначаются $Z^*_{(t_j,t_{j+1})}$:

$$Z^*_{(t_j,t_{j+1})} = K^*_{t_j} \cdot \frac{\Delta_{(t_j,t_{j+1})}}{\Delta_{\text{год}}} \cdot i$$

Исключение — первый период: здесь для расчёта используется K_{t_0}:

$$Z_{(t_0,t_1)} = K_{t_0} \cdot \frac{\Delta_{(t_0,t_1)}}{\Delta_{\text{год}}} \cdot i$$

Корректный расчёт для примера (годовая ставка 2%, соглашение $30/360$):

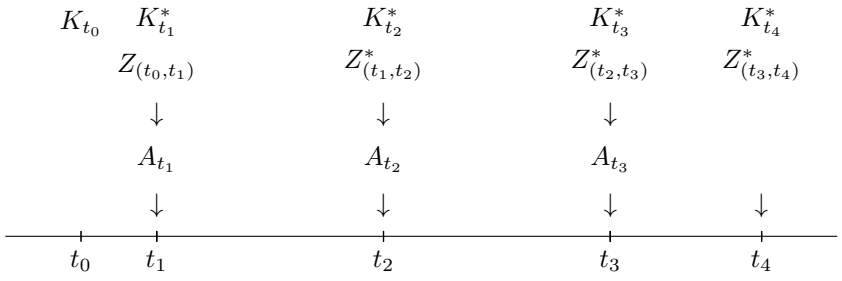
$$Z_{t_0,t_1} = 10000 \cdot \frac{10}{360} \cdot 0{,}02 = 5{,}56$$

Далее проценты не выплачиваются, а присоединяются к капиталу:

$$\begin{aligned}
K^*_{t_1} &= K_{t_1} + Z_{t_0,t_1} = 11500{,}00 + 5{,}56 = 11505{,}56 \\
Z^*_{t_1,t_2} &= K^*_{t_1} \cdot \frac{39}{360} \cdot 0{,}02 = 11505{,}56 \cdot \frac{39}{360} \cdot 0{,}02 = 24{,}93 \\
K^*_{t_2} &= K^*_{t_1} + A_2 + Z^*_{t_1,t_2} = 11505{,}56 - 150 + 24{,}93 = 11380{,}48 \\
Z^*_{t_2,t_3} &= 11380{,}48 \cdot \frac{26}{360} \cdot 0{,}02 = 16{,}44 \\
K^*_{t_3} &= 11380{,}48 - 500 + 16{,}44 = 10896{,}93 \\
Z^*_{t_3,t_4} &= 10896{,}93 \cdot \frac{15}{360} \cdot 0{,}02 = 9{,}08 \\
K^*_{t_4} &= 10896{,}93 + 9{,}08 = 10906{,}01
\end{aligned}$$

Корректный конечный капитал с учётом начисления на каждую часть составляет 10 906,01 EUR, что на 10 центов больше, чем по ступенчатому методу.

Графическое представление финансовых потоков:



При нестандартных длинах периодов пересчёт ставок производится на основе соглашения о подсчёте дней. Предположим, первый период — 156 дней, соглашение $30/360$. Второй и последний период — 3 месяца. Таким образом, сумма 10 000 EUR предоставляется на $246 = 156 + (3 \cdot 30)$ дней. Годовая ставка $i = 5\%$.

Проценты за первый период (по принципу простых):

$$\begin{aligned}
Z_1 &= 10000 \cdot 0{,}05 \cdot \frac{156}{360} = 216{,}67 \\
K_1 &= 10000 + 216{,}67 = 10216{,}67 \\
i_{\frac{156}{360}} &= 0{,}05 \cdot \frac{156}{360} = 0{,}0217
\end{aligned}$$

Второй период (также по принципу простых, но от K_1):

$$Z_2 = 10216{,}67 \cdot 0{,}05 \cdot \frac{90}{360} = 127{,}71$$
$$K_2 = 10216{,}67 + 127{,}71 = 10344{,}37$$

Конечная стоимость — 10 344,37 EUR. Можно найти единую ставку для 246 дней, дающую тот же результат:

$$10344{,}37 = 10000 \cdot (1 + i \cdot \frac{246}{360})$$
$$i = \left(\frac{10344{,}37}{10000} - 1\right) \cdot \frac{360}{246} = 0{,}0504$$

Только из-за двух периодов вместо одного эффективная ставка выросла с 5% до $5{,}04\%$.

При применении годовой ставки 5% к единому периоду 246 дней:

$$K_2 = 10000 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot \frac{246}{360}) = 10341{,}67$$

Конечная стоимость немного меньше (разница 2,70 EUR).

2.2.5. Смешанное начисление процентов

Смешанное начисление — применение одновременно простых и сложных процентов — возникает, когда сроки выплат приходятся на периоды, в которых действуют оба метода. Типичный пример: вложение K_0 на 3 года и 2 месяца при годовых периодах и заключительном двухмесячном периоде. Итого 4 периода: для первых трёх — сложное начисление, для последнего двухмесячного — простое. Имеется 4 даты расчёта процентов:

t_1 — конец первого периода (t_0, t_1)
t_2 — конец второго периода (t_1, t_2)
t_3 — конец третьего периода (t_2, t_3)
t_4 — конец четвёртого периода и дата выплаты

Расчёт производится в два шага:

1. за период (t_0, t_3) из 3 периодов
2. за период (t_3, t_4) из 1 периода

$$K_{t_3} = K_0 \cdot (1 + i)^3$$
$$K_T = K_{t_4} = K_{t_3} \cdot \left(1 + i \cdot \frac{2}{12}\right)$$

В объединённой форме:

$$K_T = K_0 \cdot (1 + i)^3 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{2}{12}\right)$$

При $K_0 = 10\,000$ EUR и $i = 5\%$:

$$K_T = 10000 \cdot (1{,}05)^3 \cdot \left(1 + 0{,}05 \cdot \frac{2}{12}\right) = 11576{,}25 \cdot 1{,}008 = 11672{,}72$$

В общем виде (m периодов сложного, k дней простого начисления, соглашение $30/360$):

$$K_T = K_0 \cdot (1 + i)^m \cdot \left(1 + i \cdot \frac{k}{360}\right) \tag{2.16}$$

Разумеется, перед экспоненциальным начислением может быть расположен и неполный внутригодовой период.

В нашем примере предполагалось, что m периодов длятся по одному году. Это необязательно. Если, например, в течение m лет начисление производится поквартально, необходимо рассмотреть $4m$ квартальных периодов:

$$K_T = K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{4}})^{4m} \cdot \left(1 + i \cdot \frac{2}{12}\right)$$

Обозначения:

i	годовая ставка
$i_{\frac{1}{4}}$	квартальная ставка

Квартальная ставка вычисляется из годовой:

$$i_{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{1+i} - 1$$

В общем виде при n внутригодовых периодах:

$$i_{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{1+i} - 1 \tag{2.17}$$

$$K_T = K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{n}})^{m \cdot n} \cdot \left(1 + i \cdot \frac{k}{360}\right) \tag{2.18}$$

2.2.6. Формирование капитала при сложном начислении

Формирование капитала при сложном начислении с периодоспецифической ставкой $i_{\text{период}} = i$ и n равными периодами:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

Периоды могут быть внутригодовыми, годовыми или многолетними. Важно, что ставка задана или вычислима. Накопленный капитал после n периодов (K_n) называется **будущей стоимостью**. Выражение $q = (1 + i)$ образует **коэффициент наращения**. Процесс накопления:

$$K_n = K_0 \cdot q^n \tag{2.19}$$

Обратная величина $\frac{1}{q} = \hat{q}$ называется **коэффициентом дисконтирования**. Он служит для расчёта **текущей стоимости** K_0:

$$K_0 = K_n \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^n = K_n \cdot \hat{q}^n \tag{2.20}$$

Если даты выплат расположены не только в начале или конце равных периодов, а к ним ещё добавлен укороченный период — расчёт производится по принципу смешанного начисления (см. subsection 2.2.5). При n годовых периодах и одном внутригодовом периоде длиной k дней (соглашение $30/360$):

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n \cdot \left(1 + i \cdot \frac{k}{360}\right)$$

На практике нередко используют приближённо только экспоненциальное начисление:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^{(n + \frac{k}{360})}$$

Для примера из раздела subsection 2.2.5 получим:

$$K_4 = K_0 \cdot (1 + i)^{(3 + \frac{2}{12})} \quad \text{вместо}$$

$$K_4 = K_0 \cdot (1 + i)^3 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{2}{12}\right)$$

Подставляя числа ($K_0 = 10000$, $i = 5\%$):

$$K_4 = 10000 \cdot 1{,}05^{(3 + \frac{2}{12})} = 11670{,}77 \quad \text{(приближение)}$$

$$K_4 = 10000 \cdot 1{,}05^3 \cdot \left(1 + 0{,}05 \cdot \frac{2}{12}\right) = 11672{,}72 \quad \text{(точно)}$$

Обратно: ставку, эквивалентную смешанному начислению (то есть дающую тот же результат при чисто экспоненциальном начислении) — называемую **эффективной ставкой** i_{eff} — можно найти из:

$$11672{,}72 = 10000 \cdot (1 + i_{eff})^{(3+\frac{2}{12})}$$
$$(1 + i_{eff}) = \left(\frac{11672{,}72}{10000}\right)^{\frac{1}{3+\frac{2}{12}}}$$
$$i_{eff} = \left(\frac{11672{,}72}{10000}\right)^{\frac{1}{3+\frac{2}{12}}} - 1 = 0{,}050055$$

Эффективная ставка чуть выше 5%.

2.2.7. Сравнение простого и сложного начислений

Принципиальное различие между простым и сложным начислениями состоит в том, что при сложном начислении проценты, накопленные в одном периоде, сами начисляются в последующих периодах. Сопоставим формулы конечного капитала K_T. Предполагаем, что для обоих методов используется одинаковая периодо-специфическая ставка i.

$$K_T = K_0 \cdot (1 + i \cdot n) \quad \text{(простое)}$$
$$K_T = K_0 \cdot (1 + i)^n \quad \text{(сложное)}$$

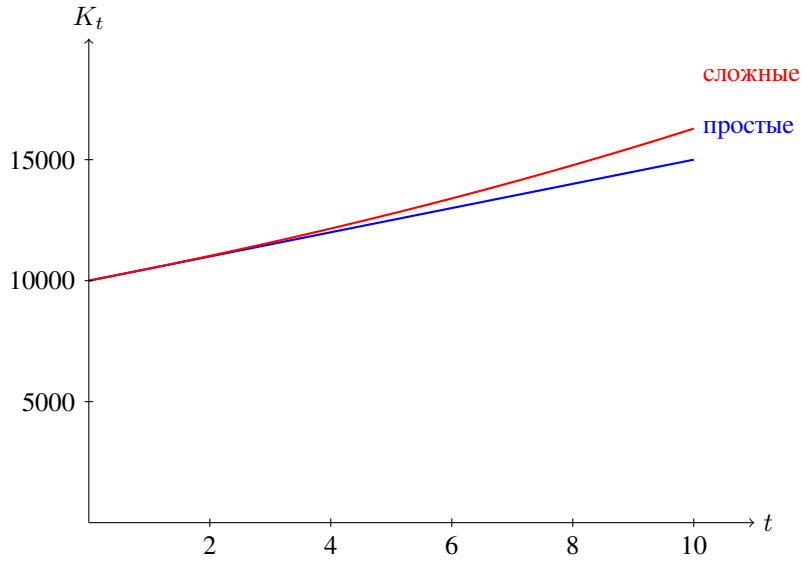
Прирост капитала за один период:

$$\Delta K_t = K_t - K_{t-1} = K_0 \cdot i \quad \text{(простое)}$$
$$\Delta K_t = K_t - K_{t-1} = K_0 \cdot (1 + i)^{t-1} \cdot i \quad \text{(сложное)}$$

Поскольку $K_0 \cdot (1 + i)^{t-1} \cdot i > K_0 \cdot i$, прирост при сложном начислении больше. При простом прирост постоянен ($\Delta K_t = \text{const}$) — **процесс с постоянным приростом**.

При сложном ставка постоянна ($i = \text{const}$), а прирост растёт — **экспоненциальный рост**.

Оба процесса роста хорошо поддаются графическому представлению. Выберем $K_0 = 10000$, $n = 10$, $i = 5\%$:



Различия при пересчёте годовых ставок во внутригодовые при простом и сложном начислениях уже упоминались в примере subsection 2.2.3. В общем виде:

Пересчёт ставок при двух методах:

$$i = i_{\frac{1}{m}} \cdot m \quad \text{(простое)}$$
$$i = (1 + i_{\frac{1}{m}})^m - 1 \quad \text{(сложное)}$$
$$i_{\frac{1}{m}} = \frac{i}{m} \quad \text{(простое)}$$
$$i_{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{(1+i)} - 1 \quad \text{(сложное)}$$

2.3. Непрерывное начисление процентов

До сих пор предполагалось конечное число периодов начисления в году. Год разделён на m равных внутригодовых периодов, накопленный капитал в конце года:

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + i_{\frac{1}{m}})^m$$

При постоянном увеличении числа периодов проценты реинвестируются всё в более коротких периодах: сначала 2 полугодовых, затем 4 квартальных, 12 месячных, 360 дневных и, наконец, 8640 часовых ($m = 2, 4, 12, 360, 8640$). Можно представить почасовое начисление ($m = 8640$) или даже ежеминутное и ежесекундное.

$$K_1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$ — возрастает при $m = 2, 4, 12, 360, 8640, \ldots$

Этот процесс можно продолжать бесконечно: периоды становятся бесконечно малыми, их число — бесконечно большим. Периодоспецифическая ставка стремится к нулю. В конечном итоге проценты немедленно реинвестируются — происходит **непрерывное начисление**.

Рассчитаем внутригодовые ставки $i_{\frac{1}{m}}$ для различных длин периодов при заданной годовой ставке $i = 100\%$. Начальный капитал — 1 EUR.

Таблица значений при $i = 100\%$, $K_0 = 1$ EUR:

Ставка	$\frac{1}{m}$	$K_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})^m$
$i_{\frac{1}{1}}$	1	2,0000
$i_{\frac{1}{2}}$	0,50	2,2500
$i_{\frac{1}{4}}$	0,25	2,4414
$i_{\frac{1}{12}}$	0,0833	2,6121
$i_{\frac{1}{360}}$	0,0028	2,7363
$i_{\frac{1}{8640}}$	0,0000157	2,7181

Внутригодовая ставка $\frac{i}{m}$ при росте m стремится к нулю.

Известно, что последовательность $(1 + \frac{1}{n})^n$ с ростом m стремится к числу Эйлера $e = 2{,}71828\ldots$:

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$$

Отсюда:
При стремлении числа периодов к бесконечности получаем **непрерывное начисление**:

$$K_t = K_0 \cdot e^{i_s \cdot t} \tag{2.21}$$

Здесь i_s — **непрерывная ставка**. Интервал $(0, t)$ — период начисления начального капитала K_0. Для различения от обычной годовой ставки i непрерывную ставку обозначаем i_s. Непрерывные ставки широко используются в научных работах по финансовой математике — доказано преимущество использования непрерывных, а не дискретных процессов накопления. В разделе об оценке рисков (см. **??**) мы ещё вернёмся к этой теме.

Пример

10 000 EUR при непрерывной ставке 5%, момент $t = 3$ (3 года от начала):

$$K_3 = 10000 \cdot e^{0{,}05 \cdot 3} = 10000 \cdot e^{0{,}15} = 11618{,}34 \text{ EUR}$$

Капитал вырос до 11 618,34 EUR.

После одного года ($t = 1$) накопленный капитал составляет 10 512,71 EUR:

$$K_1 = 10000 \cdot e^{0{,}05} = 10512{,}71$$

Можно предположить, что непрерывное начисление со ставкой 5% не даёт того же результата, что простое или сложное начисление с обычной ставкой 5%. Соотношение между ставкой и непрерывной ставкой рассматривается в следующем подразделе.

2.3.1. Связь между годовой и непрерывной ставками — годовое и многолетнее начисление

Рассмотрим пример. Капитал 10 000 EUR при непрерывной ставке 5%, непрерывно начисляемый в течение 1 года:

$$K_1 = 10000 \cdot e^{0{,}05} = 10512{,}71 \text{ EUR}$$

При простом или сложном начислении за 1 год (при той же ставке 5%):

$$K_1 = 10000 \cdot (1 + 0{,}05) = 10500{,}00 \text{ EUR}$$

Накопленный капитал при непрерывном начислении — 10 512,71 EUR, при простом и сложном за 1 год — лишь 10 500,00 EUR. (Совпадение простого и сложного начислений за 1 год — очевидное.)

Чтобы определить, какая непрерывная ставка соответствует обычной годовой i, необходимо приравнять оба накопленных капитала. Непрерывную ставку обозначаем i_s:
Равенство конечных стоимостей при сложном и непрерывном начислениях за 1 год:

$$\begin{aligned} K_0 \cdot (1 + i) &= K_0 \cdot e^{i_s} \\ 1 + i &= e^{i_s} \\ i_s &= \ln(1 + i) \\ i_s &= \ln(1{,}05) = 0{,}0488 \end{aligned}$$

Годовой ставке $i = 5\%$ соответствует непрерывная ставка $i_s = 4{,}88\%$.

Обратно — из непрерывной ставки можно вывести годовую. Если, например, $i_s = 5\%$:

$$\begin{aligned} i &= e^{i_s} - 1 \\ i &= e^{0{,}0488} - 1 = 0{,}05 \\ i &= e^{0{,}05} - 1 = 0{,}0513 \end{aligned}$$

Непрерывной ставке $i_s = 4{,}88\%$ соответствует $i = 5\%$; непрерывной ставке $i_s = 5\%$ — $i = 5{,}13\%$. Выполняется $i < i_s$.

При сроке более 1 года результат аналогичный:

$$\begin{aligned} K_n &= K_0 \cdot e^{i_s \cdot n} = K_0 \cdot (1 + i)^n \\ i_s &= \ln(1 + i) \end{aligned}$$

Итоговые соотношения между обычной ставкой i и непрерывной i_s при годовом и многолетнем начислении:
При многолетнем сроке:

$$i_s = \ln(1 + i) \tag{2.22}$$

$$i = e^{i_s} - 1 \tag{2.23}$$

Соответствующий накопленный капитал:

$$K_t = K_0 \cdot e^{i_s \cdot t} \tag{2.24}$$

$$K_t = K_0 \cdot (1 + i)^t \tag{2.25}$$

2.3.2. Связь между годовой и непрерывной ставками — внутригодовое начисление

Если срок t меньше года ($t < 1$), непрерывную ставку необходимо адаптировать. Задана годовая ставка i и внутригодовой срок. Число $\frac{k}{m}$ характеризует длину внутригодового срока, измеренную в базе m, где $m > k$. Например, сроку в 1 квартал соответствует длина $0{,}25$ года ($\frac{1}{4}$ при базе $m = 4$, ведь год — 4 квартала). При сроке 58 дней при базе 360: $\frac{58}{360} = 0{,}1611$ года. При заданной годовой ставке i внутригодовую ставку $i_{\frac{k}{m}}$ находим:

$$i_{\frac{k}{m}} = i \cdot \frac{k}{m}$$

Теперь выведем внутригодовую непрерывную ставку $i_{s(\frac{k}{m})}$:

$$K_0 \cdot (1 + i_{\frac{k}{m}}) = K_0 \cdot e^{i_{s(\frac{k}{m})}}$$
$$\ln(1 + i_{\frac{k}{m}}) = i_{s(\frac{k}{m})}$$

Таким образом, формула пересчёта внутригодовой периодоспецифической ставки $i_{\frac{k}{m}}$ в непрерывную $i_{s(\frac{k}{m})}$:

$$i_{s(\frac{k}{m})} = \ln(1 + i_{\frac{k}{m}}) \tag{2.26}$$

Примеры:

$$i_{s(\frac{1}{4})} = \ln(1 + 0{,}05 \cdot \frac{1}{4}) = 0{,}0124$$
$$i_{s(\frac{58}{360})} = \ln(1 + 0{,}05 \cdot \frac{58}{360}) = 0{,}0080$$

Конечные стоимости при $K_0 = 10\,000$ EUR:

$$K_{\frac{1}{4}} = 10000 \cdot e^{0{,}0124} = 10124{,}77$$
$$K_{\frac{58}{360}} = 10000 \cdot e^{0{,}0080} = 10080{,}32$$

При простом начислении:

$$K_{\frac{1}{4}} = 10000 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot \frac{1}{4}) = 10125{,}00$$
$$K_{\frac{58}{360}} = 10000 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot \frac{58}{360}) = 10080{,}56$$

Глава 3

Теория ренты

3.1. Процессы накопления

Последовательность транзакций A_i называется **финансовым потоком**. Транзакции вызывают изменения капитала K_t:



Если ранее транзакции определялись главным образом процентными выплатами, то теперь мы расширяем рассмотрение на платежи, которые могут как увеличивать, так и уменьшать капитал. Особый интерес представляют постоянно повторяющиеся платежи, встречающиеся как при накоплении капитала, так и при погашении долгов. В первом шаге определяем будущие и текущие стоимости на основе тех же ставок, что и для начисления — как принято в классической финансовой математике. Позднее для определения текущих стоимостей будут использоваться безрисковые ставки.

Транзакции могут быть периодически повторяющимися платежами, которые мы называем **взносами** и обозначаем R. Взносы могут быть постоянными или переменными. В зависимости от того, когда конкретно производятся взносы, говорят о **пренумерандо-** или **постнумерандо-процессах накопления**. Проценты тоже можно рассматривать как транзакции — если они не выплачиваются, а увеличивают капитал. Как правило, проценты начисляются в конце периода. Задана периодоспецифическая ставка $i_{\text{период}}$.

Далее рассматриваем следующие случаи:

1. Постоянная ставка и постоянные взносы в конце периода (section 3.2): пренумерандо-рента (subsection 3.2.1), постнумерандо-рента (subsection 3.2.2) и бессрочная рента (subsection 3.2.3).
2. Постоянные взносы, периоды начисления и выплат не совпадают, ставка постоянна (section 3.3).
3. Переменная ставка (subsection 3.4.1).
4. Переменные взносы — динамическая рента (subsection 3.4.2).

3.2. Постоянные взносы — выплаты совпадают с концом периода

В этом разделе предполагается, что выплаты процентов и взносы происходят в конце каждого периода. Если период — год, говорят о постоянных годовых рентах; при внутригодовых периодах — о внутригодовых рентах. Должна быть задана периодоспецифическая ставка. Если это не так — необходимо её вычислить. Важно, что взносы производятся в начале или конце периода.

3.2.1. Пренумерандо-рента

Рассмотрим ренты с постоянными пренумерандо-взносами. В принципе пренумерандо-рента — частный случай финансового потока с пренумерандо-транзакциями, где транзакция постоянна ($A_t = R_t = R = \text{const}$). Формулы накопления:

$$\begin{aligned} K_0 &= R \\ K_1 &= K_0 \cdot q + R \\ K_2 &= K_1 \cdot q + R \\ ... &= ... \\ K_{T-1} &= K_{T-2} \cdot q + R \\ K_T &= K_{T-1} \cdot q + R \end{aligned}$$

Графически:



Каждый взнос можно рассмотреть как частичную сумму B_t, наращиваемую до конца срока:
1-я частичная сумма: $B_1 = R \cdot (1+i)^T = R \cdot q^T$
2-я частичная сумма: $B_2 = R \cdot (1+i)^{T-1} = R \cdot q^{T-1}$
...
Последняя: $B_T = R \cdot (1+i) = R \cdot q$
Сумма всех частичных сумм даёт накопленный капитал в момент T:

$$\sum_{t=1}^{T} B_t = R \cdot \sum_{t=1}^{T} q^t$$

Выражение $\sum_{t=1}^{T} q^t = q + q^2 + \ldots + q^T$ представляет собой геометрическую прогрессию. Как известно, сумма первых T элементов:

$$\sum_{t=1}^{T} q^t = q + q^2 + \ldots + q^T = q \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1}$$

Следовательно, будущая стоимость пренумерандо-ренты (конечная стоимость ренты) K_T после T взносов:

$$K_T = R \cdot q \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1} \tag{3.1}$$

Прежде чем привести пример, отметим, что постоянные взносы возможны в следующих случаях:

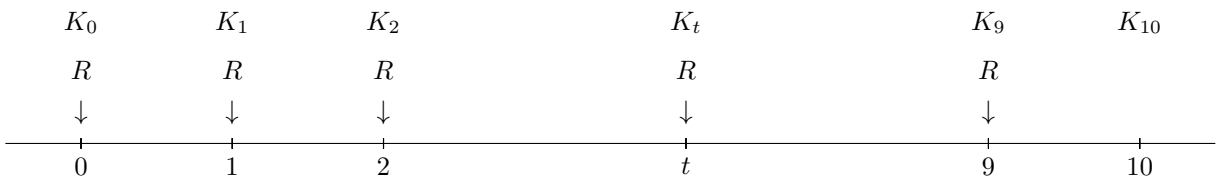
1. Периоды длятся ровно 1 год — тогда говорят о **постоянных годовых рентах**. Задаётся годовая ставка и срок T лет.

2. Внутригодовые периоды при заданной внутригодовой ставке. Если задана годовая ставка, её необходимо пересчитать. Число периодов может быть любым — в том числе более года.

Характерно для всех случаев: всегда должна быть задана или вычислена периодоспецифическая ставка. Формульный аппарат идентичен во всех описанных случаях. Иной подход необходим, если периоды начисления и взносов не совпадают — см. section 3.3.

Пример

Вносится ежегодно в начале года 1000 EUR в течение 10 лет при годовой ставке 5%. В конце 10-го года получается следующая сумма (конечная стоимость ренты K_{10}). Процесс накопления графически:



$$K_{10} = 1000 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05} = 13\,206{,}70 \text{ EUR}$$

Текущая стоимость (дисконтирование конечной):

$$\begin{aligned} BW_0 &= K_{10} \cdot \frac{1}{q^{10}} = R \cdot \frac{1}{q^9} \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} \\ &= 1000 \cdot \frac{1}{1{,}05^9} \cdot \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05} = 8107{,}77 \text{ EUR} \end{aligned}$$

Вложение 8107,77 EUR в начале срока при 5% годовых дало бы ту же конечную стоимость — 13 206,70 EUR. Иными словами, 10 пренумерандо-взносов по 1000 EUR или единовременный взнос 8107,77 EUR равнозначны.

До сих пор текущая стоимость ренты вычислялась как дисконтированная конечная стоимость в начале срока, обозначаемая BW_0 — текущая стоимость в момент $t = 0$. Возможен и другой подход. Предположим, к моменту t ($t > 0$) уже были сделаны некоторые взносы. Для простоты принимаем, что t совпадает только с датами взносов, то есть $t \in (0, T)$, $t \in \mathbb{N}$. Число уже сделанных взносов равно t, ещё осталось $T - t$ пренумерандо-взносов. Текущую стоимость ренты можно рассчитать и для момента t: сначала определяется конечная стоимость предстоящих взносов, которая затем дисконтируется к t.
Так полученная стоимость обозначается BW_t. Конечная стоимость предстоящих взносов — K^*_{T-t}:

$$\begin{aligned} K^*_{T-t} &= R \cdot q \cdot \frac{q^{T-t} - 1}{q - 1} \\ BW_t &= K^*_{T-t} \cdot \frac{1}{q^{T-t}} = R \cdot \frac{1}{q^{T-t-1}} \cdot \frac{q^{T-t} - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

Для нашего примера: в момент $t = 6$ уже сделано 6 взносов, осталось 4:

$$\begin{aligned} K^*_4 &= 1000 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1{,}05^4 - 1}{0{,}05} = 4525{,}63 \text{ EUR} \\ BW_6 &= 4525{,}63 \cdot \frac{1}{1{,}05^4} = 3723{,}25 \text{ EUR} \end{aligned}$$

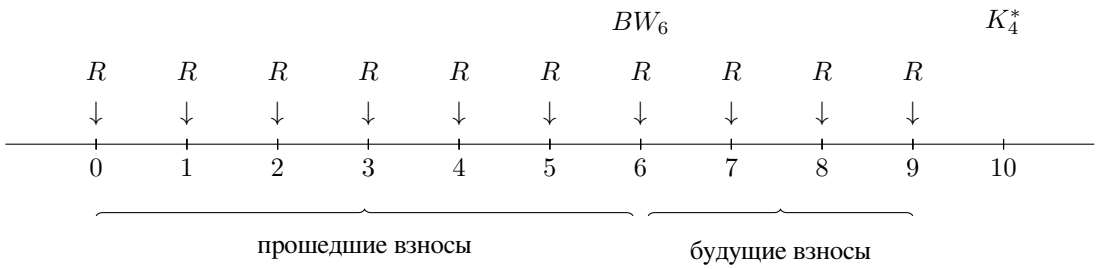
Конечная стоимость предстоящих выплат — 4525,63 EUR. Текущая стоимость в момент $t = 6$ — 3723,25 EUR. Если вложить эту сумму в $t = 6$, то к концу срока получится 4525,63 EUR. Иными словами, текущая стоимость предстоящих взносов составляет 3723,25 EUR.

Графически расчёт BW_6:

$$\begin{aligned} K^*_{T-t} &= R \cdot q \cdot \frac{q^{T-t} - 1}{q - 1} \\ BW_t &= R \cdot \frac{1}{q^{T-t-1}} \cdot \frac{q^{T-t} - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

Для примера при $t = 6$ (сделано 6 взносов, осталось 4):

$$\begin{aligned} K^*_4 &= 1000 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1{,}05^4 - 1}{0{,}05} = 4525{,}63 \text{ EUR} \\ BW_6 &= 4525{,}63 \cdot \frac{1}{1{,}05^4} = 3723{,}25 \text{ EUR} \end{aligned}$$



Здесь необходимо отметить: связь текущей и конечной стоимостей правомерна лишь тогда, когда ставки наращения/дисконтирования и ставка ренты совпадают. Они относятся к конкретному финансовому продукту и служат для внутреннего расчёта.

Формулу ренты можно преобразовать для расчёта размера взноса или срока при заданном коэффициенте наращения:
Обратные формулы:

$$R = K_T \cdot \frac{q-1}{q} \cdot \frac{1}{q^T - 1} \tag{3.2}$$

$$T = \frac{\ln\left(1 + \frac{K_T}{R} \cdot \frac{q-1}{q}\right)}{\ln q} \tag{3.3}$$

Капитал можно также использовать для финансирования многолетних рентных выплат (так называемое **расходование капитала**). Идея проста. Пусть K — начальный капитал, начисляемый по ставке i; одновременно из него на ту же ставку формируется рента для выплаты. Оба процесса объединяются:

$$K_T = K \cdot q^T - R \cdot q \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1}$$

K_T — капитал, остающийся после T взносов и начисления. Если капитал должен быть полностью исчерпан: $K_T = 0$:

$$R \cdot q \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1} = K \cdot q^T$$

$$R = \frac{K \cdot q^T \cdot (q-1)}{q \cdot (q^T - 1)}$$

Пример: Пенсионер располагает 200 000 EUR при выходе на пенсию; банк предлагает ставку 5%; пренумерандо-рента на 20 лет:

$$R = \frac{200000 \cdot 1{,}05^{20} \cdot 0{,}05}{1{,}05 \cdot (1{,}05^{20} - 1)} = 15284{,}30 \text{ EUR}$$

Проверка:

$$K_T = -R \cdot q \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1}$$

$$K_{20} = -15284{,}30 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1{,}05^{20} - 1}{0{,}05} = -530659{,}46$$

$$K_T = K \cdot q^T$$

$$K_{20} = 200000 \cdot 1{,}05^{20} = 530659{,}46$$

Пренумерандо-рента расходует капитал 530 659,46 EUR — ровно столько, сколько накоплено. Финансирование и выплаты совпадают.

3.2.2. Постнумерандо-рента

Постнумерандо-рента отличается от пренумерандо-ренты тем, что взнос производится только в конце соответствующего периода и потому не участвует в начислении процентов за этот период. Процесс накопления соответственно модифицируется:

Взносы в конце периода:

$$\begin{aligned} K_0 &= 0 \\ K_1 &= R \\ K_2 &= K_1 \cdot q + R \\ ... &= ... \\ K_{T-1} &= K_{T-2} \cdot q + R \\ K_T &= K_{T-1} \cdot q \end{aligned}$$



Будущая стоимость:

$$K_T = R \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1} \tag{3.4}$$

Как в разделе subsection 3.2.1, процесс можно рассматривать как сумму наращиваемых частичных сумм B_t:
1-я частичная сумма: $B_1 = R \cdot (1+i)^{T-1} = R \cdot q^{T-1}$
2-я частичная сумма: $B_2 = R \cdot (1+i)^{T-2} = R \cdot q^{T-2}$
...
Последняя: $B_T = R = R \cdot q^0$
Сумма всех частичных сумм:

$$\sum_{t=1}^{T} B_t = R \cdot \sum_{t=0}^{T-1} q^t = R \cdot (1 + q + q^2 + \ldots + q^{T-1}) = R \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1}$$

Будущая стоимость постнумерандо-ренты:

$$K_T = R \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1} \tag{3.5}$$

Замечания о применимости те же, что и в разделе subsection 3.2.1: годовые ренты, внутригодовые или многолетние при постоянных взносах.

Пример

Вносится ежегодно в конце года 1000 EUR в течение 10 лет, как в примере раздела subsection 3.2.1, при $i = 5\%$:

$$K_{10} = 1000 \cdot \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05} = 12\,577{,}81 \text{ EUR}$$

Текущая стоимость:

$$\begin{aligned} BW_0 &= K_{10} \cdot \hat{q}^{10} = K_{10} \cdot \frac{1}{q^{10}} \\ BW_0 &= R \cdot \frac{1}{q^{10}} \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 1000 \cdot \frac{1}{1{,}05^{10}} \cdot \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05} = 7721{,}73 \text{ EUR} \end{aligned}$$

Вложение 7721,73 EUR в начале срока при 5% годовых дало бы 12 577,81 EUR — то же, что 10 постнумерандо-взносов по 1000 EUR. То есть они равнозначны.
Текущую стоимость для момента t (при наличии уже сделанных t взносов) вычисляют аналогично разделу subsection 3.2.1:

$$\begin{aligned} K_{T-t} &= R \cdot \frac{q^{T-t} - 1}{q - 1} \\ BW_t &= K_{T-t} \cdot \frac{1}{q^{T-t}} \end{aligned}$$

Для нашего примера при $t = 6$ (осталось 4 взноса):

$$K_4 = 1000 \cdot \frac{1{,}05^4 - 1}{0{,}05} = 4310{,}12 \text{ EUR}$$

$$BW_6 = 4310{,}12 \cdot \frac{1}{1{,}05^4} = 3545{,}95 \text{ EUR}$$

Конечная стоимость предстоящих выплат — 4310,12 EUR; текущая стоимость в $t = 6$ — 3545,95 EUR. Если вложить эту сумму в момент $t = 6$, к концу срока получится 4310,12 EUR.

Лишь конечная стоимость примера из раздела subsection 3.2.1 заменяется на конечную стоимость постнумерандо-ренты.

Также в постнумерандо-случае процесс расходования капитала поддаётся формальному описанию. Размер взноса:

$$R = \frac{K \cdot q^T \cdot (q-1)}{q^T - 1}$$

Обратные формулы:

$$R = K_T \cdot \frac{q-1}{q^T - 1} \tag{3.6}$$

$$T = \frac{\ln\!\left(1 + \frac{K_T}{R} \cdot (q-1)\right)}{\ln q} \tag{3.7}$$

Для примера из раздела subsection 3.2.1 (200 000 EUR, 5%, 20 лет):

$$R = \frac{200000 \cdot 1{,}05^{20} \cdot (1{,}05 - 1)}{1{,}05^{20} - 1} = 14556{,}48 \text{ EUR}$$

Постнумерандо-взнос 14 556,48 EUR в год полностью расходует начальный капитал 200 000 EUR за 20 лет.

3.2.3. Бессрочная рента

Бессрочная рента — частный случай, когда капитала достаточно для бесконечного числа выплат. Условие (постнумерандо):

$$R \le K \cdot i \tag{3.8}$$

Если взнос равен процентному доходу, бессрочная рента полностью покрывается из процентов, начальный капитал не уменьшается.
Пренумерандо:

$$R \le K \cdot \frac{i}{1+i} \tag{3.9}$$

Бессрочные ренты применяются на практике, когда из капитала выплачиваются постоянные суммы без его расходования — например, финансирование премий Нобелевской премии или фондов.

Пример: Ежегодная выплата 100 000 EUR, капитал не расходуется, $i = 5\%$:

$$K = R \cdot \tfrac{1}{i} \quad \text{— постнумерандо}$$

$$K = R \cdot \tfrac{1+i}{i} \quad \text{— пренумерандо}$$

$$K = 100000 \cdot \tfrac{1}{0{,}05} = 2\,000\,000 \quad \text{— постнумерандо}$$

$$K = 100000 \cdot \tfrac{1{,}05}{0{,}05} = 2\,100\,000 \quad \text{— пренумерандо}$$

При выплате в конце года нужно 2 000 000 EUR, в начале — 2 100 000 EUR. Более высокая сумма приведёт к постоянному росту капитала.

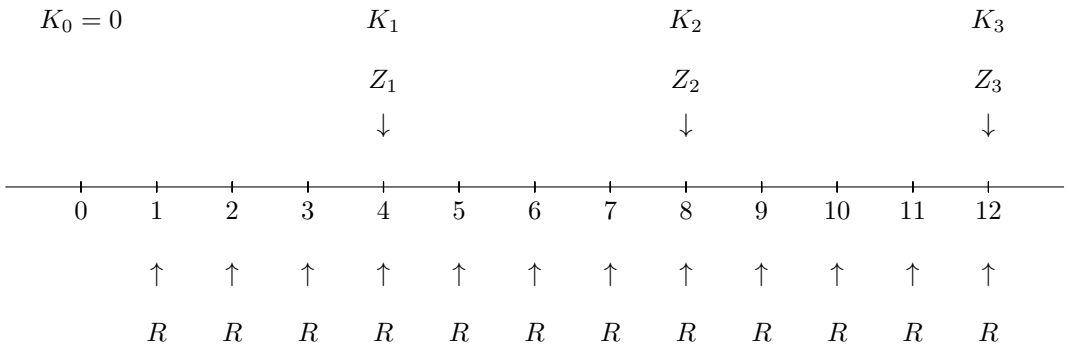
3.3. Постоянные взносы — число периодов начисления и взносов не совпадают

Существует множество комбинаций, когда числа периодов начисления и выплат не совпадают. Здесь рассматривается только следующий случай:

- внутригодовые взносы при годовом начислении.

Период начисления — 1 год (задана годовая ставка i). Взносы — внутригодовые, m в год, постнумерандо.

Иллюстрация процесса выплат и начисления на примере с квартальными взносами $R = 1000$ EUR, срок 3 года, $i = 5\%$.



Обозначения:

	K_t	капитал в конце периода t, $t = 1, 2, 3$
	Z_t	проценты за период t
	R	квартальные взносы

В общем случае: год делится на m подпериодов. В конце каждого года накопленный капитал наращивается сложными процентами по ставке i. Внутри года капитал начисляется по принципу простых процентов с внутригодовой ставкой $i_{\frac{1}{m}} = \frac{i}{m}$. В нашем примере $i_{\frac{1}{4}} = \frac{i}{4}$ (квартальная ставка).

В первом году возникают следующие проценты, суммируемые в конце года:

Взнос	Остаток до конца года	Проценты до конца года
1-й взнос	$m-1$	$R \cdot i \cdot \frac{m-1}{m}$
2-й взнос	$m-2$	$R \cdot i \cdot \frac{m-2}{m}$
...	...	...
j-й взнос	$m-j$	$R \cdot i \cdot \frac{m-j}{m}$
...	...	...
m-й взнос	0	0

Итоговые проценты за год:

$$Z_1 = R \cdot \sum_{j=1}^{m} i \cdot \frac{m-j}{m} = R \cdot i \cdot \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^{m} (m-j) = R \cdot i \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{(m-1)m}{2} = R \cdot i \cdot \frac{m-1}{2}$$

Накопленный капитал в конце первого года:

$$K_1 = R \cdot m + Z_1 = R \cdot \left[m + i \cdot \frac{m-1}{2} \right]$$

Рекуррентно для следующих лет:

$$K_2 = K_1 \cdot (1+i) + R \cdot m + Z_2$$
$$R \cdot m + Z_2 = R \cdot \left[m + i \cdot \frac{m-1}{2} \right]$$
$$\Rightarrow K_2 = R \cdot \left[m + i \cdot \frac{m-1}{2} \right] \cdot [1 + (1+i)]$$

Для последующих лет аналогично:

$$K_3 = R \cdot \left[m + i \cdot \frac{m-1}{2} \right] \cdot [1 + (1+i) + (1+i)^2]$$
$$\ldots = \ldots$$
$$K_n = R \cdot \left[m + i \cdot \frac{m-1}{2} \right] \cdot [1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1}]$$

Общая формула:

$$K_n = R \cdot \left[m + i \cdot \frac{m-1}{2} \right] \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{3.10}$$

Для примера (4 взноса в год, 1-й год):
Таблица процентов в первый год (при $m = 4$):

Взнос	Остаток до конца года в кварталах	Проценты до конца года
1-й взнос	3	$1000 \cdot 0{,}05 \cdot \frac{3}{4} = 37{,}50$
2-й взнос	2	$1000 \cdot 0{,}05 \cdot \frac{2}{4} = 25{,}00$
3-й взнос	1	$1000 \cdot 0{,}05 \cdot \frac{1}{4} = 12{,}50$
4-й взнос	0	0

Накопленные проценты: $Z_1 = 37{,}50 + 25{,}00 + 12{,}50 = 75$ EUR.
Накопленный капитал в конце первого года:

$$K_1 = R \cdot m + Z_1 = 1000 \cdot 4 + 75 = 4075$$

Для расчёта капитала во 2-м году (K_2) накопленный капитал K_1 наращивается. Затем добавляются m взносов и проценты, как в 1-м году:

$$K_2 = K_1 \cdot (1+i) + R \cdot m + Z_2 = 4075 \cdot 1{,}05 + 1000 \cdot 4 + 75 = 8353{,}75$$
$$Z_2 = R \cdot \sum_{j=1}^{m} i \cdot \frac{m-j}{m} = 75$$

Накопленный капитал в конце второго года — 8353,75 EUR.
Капитал вновь наращивается, к нему добавляются m взносов и проценты:

$$K_3 = K_2 \cdot (1+i) + R \cdot m + Z_3 = 8353{,}75 \cdot 1{,}05 + 1000 \cdot 4 + 75 = 12846{,}44$$
$$Z_3 = 75$$

В итоге данная рента приносит 12 846,44 EUR.

К тому же результату приходим, применяя формулу напрямую (без рекурсии):

$$K_3 = 1000 \cdot \left[4 + 0{,}05 \cdot \frac{3}{2} \right] \cdot [1 + (1 + 0{,}05) + (1 + 0{,}05)^2] = 12846{,}44$$
$$K_3 = 1000 \cdot \left[4 + 0{,}05 \cdot \frac{3}{2} \right] \cdot \frac{(1 + 0{,}05)^3 - 1}{0{,}05} = 12846{,}44$$

3.4. Динамические ренты

Рассматриваются два способа динамизации взносов:

1. Ставка непостоянна — предполагаем, что она не меняется непрерывно, а фиксируется на некоторый период, после чего пересматривается.
2. Размер взноса непостоянен: взнос растёт на постоянную сумму (арифметически) или с постоянным темпом (геометрически).

3.4.1. Динамическая рента с переменной ставкой

Срок делится на интервалы $(0, d_1), (d_1, d_2), \ldots, (d_{T-1}, d_T)$, в каждом из которых ставка постоянна:

Интервал	Ставка
$(0, d_1)$	$i_{(0,d_1)}$
(d_1, d_2)	$i_{(d_1,d_2)}$
...	...
(d_{T-1}, d_T)	$i_{(d_{T-1},d_T)}$

Постнумерандо-рента, постоянный взнос R. Конечные стоимости частичных рент:

$$\begin{aligned} K_{(0,d_1)} &= R \cdot \frac{(1+i_{(0,d_1)})^{d_1} - 1}{i_{(0,d_1)}} \\ K_{(d_1,d_2)} &= R \cdot \frac{(1+i_{(d_1,d_2)})^{d_2-d_1} - 1}{i_{(d_1,d_2)}} \\ \ldots &= \ldots \\ K_{(d_{T-1},d_T)} &= R \cdot \frac{(1+i_{(d_{T-1},d_T)})^{d_T-d_{T-1}} - 1}{i_{(d_{T-1},d_T)}} \end{aligned}$$

Частичные стоимости (кроме последней) наращиваются до конца срока:

$$\begin{aligned} K^*_{(0,d_1)} &= K_{(0,d_1)} \cdot (1+i_{(d_1,d_2)})^{d_2-d_1} \cdots (1+i_{(d_{T-1},d_T)})^{d_T-d_{T-1}} \\ K^*_{(d_1,d_2)} &= K_{(d_1,d_2)} \cdot (1+i_{(d_2,d_3)})^{d_3-d_2} \cdots (1+i_{(d_{T-1},d_T)})^{d_T-d_{T-1}} \\ \ldots &= \ldots \\ K^*_{(d_{T-2},d_{T-1})} &= K_{(d_{T-2},d_{T-1})} \cdot (1+i_{(d_{T-1},d_T)})^{T-d_{T-1}} \end{aligned}$$

Итого:

$$K_T = K^*_{(0,d_1)} + K^*_{(d_1,d_2)} + \ldots + K^*_{(d_{T-2},d_{T-1})} + K_{(d_{T-1},d_T)}$$

Пример:

$T = 12$ лет, три интервала, $R = 10\,000$ EUR, постнумерандо:

Интервал	Интервал	Ставка
$(0, d_1)$	$(0, 4)$	5%
(d_1, d_2)	$(4, 7)$	6%
(d_2, T)	$(7, 12)$	7%

Частичные ренты:

$$\begin{aligned} K_{(0,4)} &= 10000 \cdot \frac{1{,}05^4 - 1}{0{,}05} = 43101{,}25 \\ K_{(4,7)} &= 10000 \cdot \frac{1{,}06^3 - 1}{0{,}06} = 31836{,}00 \\ K_{(7,12)} &= 10000 \cdot \frac{1{,}07^5 - 1}{0{,}07} = 57507{,}39 \end{aligned}$$

Наращение до конца срока:

$$\begin{aligned} K^*_{(0,4)} &= 43101{,}25 \cdot 1{,}06^3 \cdot 1{,}07^5 = 71998{,}98 \\ K^*_{(4,7)} &= 31836{,}00 \cdot 1{,}07^5 = 80657{,}08 \\ K^*_{(7,12)} &= 57507{,}39 \end{aligned}$$

$$K_T = 71998{,}98 + 80657{,}08 + 57507{,}39 = 210163{,}45 \text{ EUR}$$

3.4.2. Динамическая рента с переменными взносами

В принципе при переменных взносах можно действовать аналогично переменным ставкам: для каждого интервала постоянных взносов рассчитываются частичные ренты, наращиваются до конца срока и суммируются. В данном разделе рассматривается иная форма переменных взносов — арифметически или геометрически возрастающие взносы.

Ренты с арифметически возрастающими взносами

Закон роста:

$$\begin{aligned} R_1 &= R \\ R_2 &= R + \Delta \\ R_t &= R + (t-1) \cdot \Delta \end{aligned}$$

Δ — постоянный прирост за период.
Постнумерандо: каждый взнос наращивается до конца срока:

$$\begin{aligned} B_1 &= R \cdot q^{T-1} \\ B_2 &= (R + \Delta) \cdot q^{T-2} \\ ... &= ... \\ B_t &= (R + (t-1) \cdot \Delta) \cdot q^{T-t} \\ ... &= ... \\ B_T &= R + (T-1) \cdot \Delta \end{aligned}$$

Частичные ренты B_t суммируются. Уже из этого представления можно производить практические расчёты:

$$K_T = \sum_{t=1}^{T} B_t = \sum_{t=1}^{T} (R + (t-1) \cdot \Delta) \cdot q^{T-t}$$

Разумеется, можно вывести общую формулу. Заинтересованный читатель найдёт вывод в приложении subsection 5.2.1. Для пренумерандо-ренты достаточно умножить конечную стоимость постнумерандо-ренты на коэффициент наращения q.
Общая формула (вывод — в приложении subsection 5.2.1):

$$K_T = \frac{q^T - 1}{q - 1} \cdot \left(\frac{\Delta}{q - 1} - \frac{T \cdot \Delta}{q^T - 1} + R \right) \tag{3.11}$$

Для пренумерандо умножить на q.

Пример:

5 лет, постнумерандо, $R_1 = 1000$ EUR, $\Delta = 100$ EUR/год, $i = 5\%$:

$$R_1 = 1000,\ R_2 = 1100,\ R_3 = 1200,\ R_4 = 1300,\ R_5 = 1400$$

$$\begin{aligned} B_1 &= 1000 \cdot 1{,}05^4 = 1215{,}51 \\ B_2 &= 1100 \cdot 1{,}05^3 = 1273{,}39 \\ B_3 &= 1200 \cdot 1{,}05^2 = 1323{,}00 \\ B_4 &= 1300 \cdot 1{,}05 = 1365{,}00 \\ B_5 &= 1400 \end{aligned}$$

$$K_5 = 6576{,}90 \text{ EUR}$$

По формуле:

$$K_5 = \frac{1{,}05^5 - 1}{0{,}05} \cdot \left(\frac{100}{0{,}05} - \frac{5 \cdot 100}{1{,}05^5 - 1} + 1000 \right) = 5{,}5256 \cdot (2000 - 1809{,}75 + 1000) = 6576{,}90$$

Пренумерандо: $K_5^* = 6576{,}90 \cdot 1{,}05 = 6905{,}75$ EUR.

Можно рассчитать и текущие стоимости ренты:

$$BW = K_T \cdot \frac{1}{q^T}$$
$$BW = K_5 \cdot \frac{1}{q^5} = 6576{,}90 \cdot \frac{1}{1{,}05^5} = 5152{,}47$$
$$BW^* = K_5^* \cdot \frac{1}{q^5} = 6905{,}75 \cdot \frac{1}{1{,}05^5} = 5410{,}84$$

Ренты с геометрически возрастающими взносами

Взносы возрастают с постоянным темпом β (экспоненциальный рост). Взносы постнумерандо:

$$R_1 = R$$
$$R_2 = R \cdot (1 + \beta)$$
$$R_t = R \cdot (1 + \beta)^{t-1}$$

Каждый взнос наращивается до конца срока:

$$B_1 = R \cdot q^{T-1}$$
$$B_2 = R \cdot (1 + \beta) \cdot q^{T-2}$$
$$... = ...$$
$$B_t = R \cdot (1 + \beta)^{t-1} \cdot q^{T-t}$$
$$B_T = R \cdot (1 + \beta)^{T-1}$$

Частичные ренты B_t суммируются. Вывод общей формулы — в приложении subsection 5.2.2.
Общая формула (вывод — в приложении subsection 5.2.2):

$$K_T = R \cdot q^{T-1} \cdot \frac{\left(\frac{1+\beta}{q}\right)^T - 1}{\frac{1+\beta}{q} - 1}, \quad (1 + \beta) \neq q$$

Пример:

5 лет, постнумерандо, $R_1 = 1000$ EUR, $\beta = 10\%$, $i = 5\%$:

$$R_1 = 1000,\ R_2 = 1100,\ R_3 = 1210,\ R_4 = 1331,\ R_5 = 1461{,}10$$

$$B_1 = 1000 \cdot 1{,}05^4 = 1215{,}51$$
$$B_2 = 1100 \cdot 1{,}05^3 = 1273{,}39$$
$$B_3 = 1210 \cdot 1{,}05^2 = 1334{,}03$$
$$B_4 = 1331 \cdot 1{,}05 = 1397{,}55$$
$$B_5 = 1461{,}10$$

$$K_5 = 6681{,}58 \text{ EUR}$$

По формуле:

$$K_5 = 1000 \cdot 1{,}05^4 \cdot \frac{\left(\frac{1{,}1}{1{,}05}\right)^5 - 1}{\frac{1{,}1}{1{,}05} - 1} = 6684{,}57$$

Пренумерандо: $K_5^* = K_5 \cdot q = 6684{,}57 \cdot 1{,}05 = 7015{,}66$ EUR.

Текущие стоимости:

$$BW = K_5 \cdot \frac{1}{q^5} = 6684{,}57 \cdot \frac{1}{1{,}05^5} = 5237{,}75$$
$$BW^* = K_5^* \cdot \frac{1}{q^5} = 7015{,}66 \cdot \frac{1}{1{,}05^5} = 5497{,}38$$

Глава 4

Погашение задолженности

В этом разделе речь идёт о погашении долга. В принципе погашение может быть осуществлено единовременным платежом в конце срока — возврат суммы займа плюс накопленные проценты. С точки зрения кредитора такой процесс представляет собой накопление капитала с единственным платежом в конце срока, который описывается инструментарием сложных процентов и здесь дополнительно не рассматривается.

Процесс погашения может также предусматривать регулярные или нерегулярные частичные выплаты. Рассмотрим сначала нерегулярное погашение. Для упрощения предположим, что нерегулярные выплаты и частичные процентные платежи могут производиться только в конце процентного периода — это позволяет ограничиться экспоненциальным начислением. В принципе данное ограничение может быть снято.

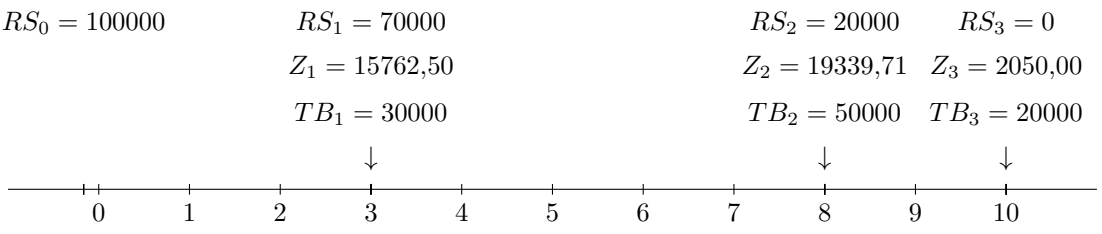
Начнём с **примера:**

Долг $RS_0 = 100\,000$ EUR погашается за 10 лет. Название начального долга, возможно, немного вводит в заблуждение — RS_0 означает остаток долга в момент $t = 0$, что, впрочем, также верно. Договариваемся: первый платёж через 3 года в размере $TB_1 = 30\,000$ EUR (TB — Tilgungsbetrag, доля погашения), второй ($TB_2 = 50\,000$ EUR) через 5 лет и остаток ($TB_3 = 20\,000$ EUR) в конце срока. Остаток долга после частичного погашения обозначается RS_1, RS_2 и RS_3. Начисление — ежегодное, $i = 5\%$. Накопленные проценты Z_1, Z_2, Z_3 выплачиваются в дату погашения.

Процентные суммы рассчитываются по принципу экспоненциального начисления:

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= 100000 \cdot [(1{,}05)^3 - 1] = 15762{,}50 \\
Z_2 &= 70000 \cdot [(1{,}05)^5 - 1] = 19339{,}71 \\
Z_3 &= 20000 \cdot [(1{,}05)^2 - 1] = 2050{,}00
\end{aligned}
$$

Процесс погашения графически:



Аннуитеты ($AN = TB + Z$):

$$
\begin{aligned}
AN_i &= TB_i + Z_i, \quad i = 1, 2, 3 \\
AN_1 &= 30000 + 15762{,}50 = 45762{,}50 \\
AN_2 &= 50000 + 19339{,}71 = 69339{,}71 \\
AN_3 &= 20000 + 2050{,}00 = 22050{,}00
\end{aligned}
$$

Общего описания здесь не приводим.

4.1. Погашение равными долями — *Ratentilgung*

Рассмотрим подробнее погашение с **постоянными долями погашения** при **равных периодах**. Аналогично процентному периоду — период погашения — это интервал между двумя последовательными выплатами. Расчёт процентов, выплата процентов и погашение могут в принципе происходить в разные моменты. Возможно множество комбинаций этих трёх периодов. Мы концентрируемся на двух случаях:

1. Процентный период и период погашения **совпадают**. Типичный случай — период 1 год при заданной годовой ставке. Другой вариант — внутригодовые зарплатные и расчётные периоды: начисление производится во внутригодовых периодах при заданной соответствующей ставке.

2. Процентный период и период погашения **не совпадают**. Рассматриваем случай, когда период начисления — год, а выплаты — внутригодовые (например, ежемесячные).

4.1.1. Совпадение периодов

Срок начального долга разбит на m процентных периодов. В конце каждого периода производятся расчёт процентов и выплата аннуитета $AN_j = TB_j + Z_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Задана периодоспецифическая ставка.

Доля погашения рассчитывается как частное от деления долга на число периодов:

$$\begin{aligned} TB_i &= \frac{RS_0}{m}, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ TB_i &= TB = \text{const} \end{aligned}$$

Остаток долга RS_i определяется из начального долга RS_0 и долей погашения TB:

$$\begin{aligned} RS_1 &= RS_0 - TB = RS_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right) \\ RS_2 &= RS_0 - 2 \cdot TB = RS_0 \cdot \left(1 - \frac{2}{m}\right) \\ \ldots &= \ldots \\ RS_m &= RS_0 - m \cdot TB = 0 \end{aligned}$$

Проценты рассчитываются рекуррентно:

$$\begin{aligned} Z_1 &= RS_0 \cdot i \\ Z_2 &= RS_1 \cdot i = RS_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdot i \\ \ldots &= \ldots \\ Z_m &= RS_{m-1} \cdot i = RS_0 \cdot \left(1 - \frac{m-1}{m}\right) \cdot i \end{aligned}$$

Аннуитеты определяются из долей погашения и процентов:

$$\begin{aligned} AN_1 &= \frac{RS_0}{m} + RS_0 \cdot i \\ AN_2 &= \frac{RS_0}{m} + RS_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdot i \\ \ldots &= \ldots \\ AN_m &= \frac{RS_0}{m} + RS_0 \cdot \left(1 - \frac{m-1}{m}\right) \cdot i \end{aligned}$$

В обобщённой форме для периода j:

$$TB = \frac{RS_0}{m} \tag{4.1}$$

$$RS_j = RS_0 \cdot \left(1 - \frac{j}{m}\right) \tag{4.2}$$

$$Z_j = RS_{j-1} \cdot i = RS_0 \cdot \left(1 - \frac{j-1}{m}\right) \cdot i \tag{4.3}$$

$$AN_j = \frac{RS_0}{m} + RS_0 \cdot \left(1 - \frac{j-1}{m}\right) \cdot i \tag{4.4}$$

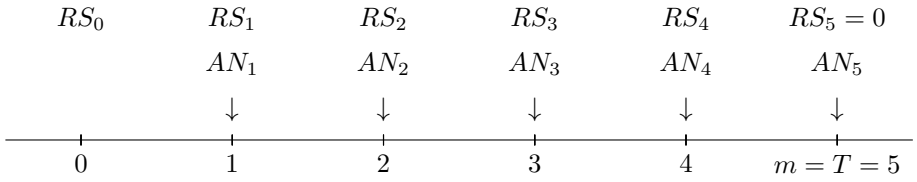
Итоговые процентные выплаты:

$$Z = \sum_{j=1}^{m} RS_0 \cdot \left(1 - \frac{j-1}{m}\right) \cdot i \tag{4.5}$$

Пример 1: $RS_0 = 100\,000$ EUR, $i = 5\%$, $m = 5$ лет.
Постоянная доля погашения для всех периодов: $TB = \frac{100000}{5} = 20000$ EUR. Таблица значений RS_j, Z_j и AN_j:

j	RS_j	TB	Z_j	AN_j
0	100000			
1	80000	20000	5000	25000
2	60000	20000	4000	24000
3	40000	20000	3000	23000
4	20000	20000	2000	22000
5	0	20000	1000	21000

Итого процентов: 15 000 EUR.



Данная схема расчётов применима и при внутригодовых периодах начисления и выплат при заданной соответствующей внутригодовой ставке. Если задана стандартная годовая ставка, периодоспецифическую ставку необходимо вывести — см. subsection 2.2.3.

Пример 2: Потребительский кредит 2000 EUR, ежемесячное начисление, 5 выплат, $i_{\frac{1}{12}} = 1\%$.
Постоянная доля погашения: $TB = \frac{2000}{5} = 400$ EUR. Таблица значений RS_j, Z_j и AN_j:

j	RS_j	TB	Z_j	AN_j
0	2000			
1	1600	400	20	420
2	1200	400	16	416
3	800	400	12	412
4	400	400	8	408
5	0	400	4	404

Итого процентов: 60 EUR.

Итоговые проценты можно рассчитать непосредственно по формуле (4.5):

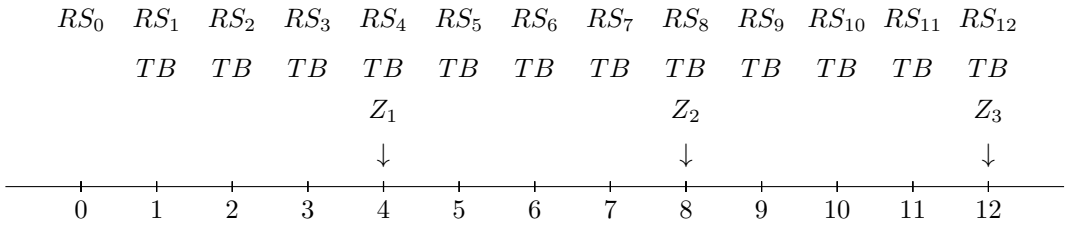
$$Z = RS_0 \cdot i \cdot \frac{1+m}{2}$$

$$Z = 2000 \cdot 0{,}01 \cdot \frac{6}{2} = 60 \text{ EUR}$$

Общая формула удобна, когда число периодов велико и рекуррентный расчёт трудоёмок.

4.1.2. Несовпадение периодов

Период начисления — 1 год, ежеквартальные доли погашения. $i = 8\%$, $i_{\frac{1}{4}} = 2\%$, $RS_0 = 24\,000$ EUR, соглашение $30/360$, $T = 3$ года, $m = 4$ квартала в году. Долг RS_0 разбивается на $T \cdot m = 3 \cdot 4 = 12$ периодов погашения, выплаты — постнумерандо, то есть в конце каждого периода. Доля погашения: $TB = \frac{RS_0}{12}$.



$TB = \frac{24000}{12} = 2000$. Процентные платежи:
Остаток долга:

$$\begin{aligned} RS_1 &= RS_0 - TB \\ RS_2 &= RS_0 - 2 \cdot TB \\ &\dots \\ RS_{T \cdot m} &= RS_0 - T \cdot m \cdot TB = 0 \end{aligned}$$

Проценты первого годового периода:

$$\begin{aligned} Z_1 &= RS_0 \cdot \frac{i}{4} + RS_1 \cdot \frac{i}{4} + RS_2 \cdot \frac{i}{4} + RS_3 \cdot \frac{i}{4} \\ &= \frac{i}{4} \cdot (RS_0 + RS_1 + RS_2 + RS_3) \\ &= \frac{i}{4} \cdot \big(4 \cdot RS_0 - TB \cdot (1 + 2 + 3)\big) = \frac{i}{4} \cdot \big(4 \cdot RS_0 - 6 \cdot TB\big) \\ &= 0{,}02 \cdot (4 \cdot 24000 - 6 \cdot 2000) = 1680 \end{aligned}$$

В общем виде: $Z_1 = \frac{i}{m} \cdot \big(m \cdot RS_0 - \frac{(m-1) \cdot m}{2} \cdot TB\big)$.
Для остальных двух лет аналогично, с учётом изменившихся остатков долга:

$$\begin{aligned} Z_2 &= \frac{i}{4} \cdot (RS_4 + RS_5 + RS_6 + RS_7) \\ &= \frac{i}{4} \cdot \big(4 \cdot RS_0 - TB \cdot (4 + 5 + 6 + 7)\big) = 0{,}02 \cdot (4 \cdot 24000 - 22 \cdot 2000) = 1040 \end{aligned}$$

$$Z_2 = \frac{i}{m} \cdot \big(m \cdot RS_0 - TB \cdot [m^2 + \tfrac{m(m-1)}{2}]\big)$$

$$\begin{aligned} Z_3 &= \frac{i}{4} \cdot (RS_8 + RS_9 + RS_{10} + RS_{11}) \\ &= \frac{i}{4} \cdot \big(4 \cdot RS_0 - TB \cdot (8 + 9 + 10 + 11)\big) = 0{,}02 \cdot (4 \cdot 24000 - 38 \cdot 2000) = 400 \end{aligned}$$

$$Z_3 = \frac{i}{m} \cdot \big(m \cdot RS_0 - TB \cdot [2m^2 + \tfrac{m(m-1)}{2}]\big)$$

В общем виде: $Z_T = \frac{i}{m} \cdot \big(m \cdot RS_0 - TB \cdot [(T-1)m^2 + \frac{m(m-1)}{2}]\big)$.
Итоговые проценты:

$$\begin{aligned} Z &= Z_1 + Z_2 + Z_3 = \frac{i}{4} \cdot \big(4 \cdot 3 \cdot RS_0 - TB \cdot [1 + 2 + \ldots + 11]\big) \\ Z &= 0{,}02 \cdot (12 \cdot 24000 - 2000 \cdot 66) = 3120 \text{ EUR} \end{aligned}$$

$$Z = \frac{i}{m} \cdot \left(m \cdot T \cdot RS_0 - TB \cdot \frac{(m \cdot T - 1) \cdot m \cdot T}{2} \right) \tag{4.6}$$

Таблица выплат:

j	RS_j	TB	Z_j	AN_j
0	24000			
1	22000	2000	480	2000
2	20000	2000	440	2000
3	18000	2000	400	2000
4	16000	2000	360	3680
5	14000	2000	320	2000
6	12000	2000	280	2000
7	10000	2000	240	2000
8	8000	2000	200	3040
9	6000	2000	160	2000
10	4000	2000	120	2000
11	2000	2000	80	2000
12	0	2000	40	2400

Итого процентов: 3120 EUR.

4.2. Погашение равными аннуитетами — *Annuitätentilgung*

В предыдущих разделах о погашении долгов мы исходили из того, что доля погашения TB является постоянной величиной. Это упрощает расчёт остатка долга на любой дате. Недостаток — все аннуитеты различаются между собой. Если выплаты списываются с текущего счёта, каждое списание должно быть инициировано отдельно. Один из способов обойти это — использовать постоянный аннуитет AN, состоящий, как и прежде, из выплаченных процентов Z и доли погашения TB:

$$AN_j = TB_j + Z_j = \text{const}$$

При постоянном аннуитете постоянно меняются остаток долга RS_j и, следовательно, проценты и доля погашения. Поскольку остаток убывает, убывают и проценты. Следовательно, при постоянном аннуитете доля погашения растёт.

Сначала рассмотрим случай, когда период погашения совпадает с процентным периодом:

4.2.1. Совпадение процентного периода и периода погашения

Долг RS_0 погашается m постоянными аннуитетами AN. Задана периодоспецифическая ставка i.
Остаток долга выводится рекуррентно:

$$\begin{aligned}
RS_1 &= RS_0 \cdot (1+i) - AN \\
RS_2 &= RS_1 \cdot (1+i) - AN = RS_0 \cdot (1+i)^2 - AN \cdot [1 + (1+i)] \\
&\dots = \dots \\
RS_j &= RS_0 \cdot (1+i)^j - AN \cdot \frac{(1+i)^j - 1}{i} \\
&\dots = \dots \\
RS_m &= RS_0 \cdot (1+i)^m - AN \cdot \frac{(1+i)^m - 1}{i}
\end{aligned}$$

При $RS_m = 0$ — формула аннуитета:

$$AN = RS_0 \cdot (1+i)^m \cdot \frac{i}{(1+i)^m - 1} \tag{4.7}$$

Доли погашения (рекуррентно):

$$\begin{aligned} TB_1 &= AN - RS_0 \cdot i = AN - Z_1 \\ TB_2 &= TB_1 \cdot (1+i) = AN - Z_2 \\ &\dots \\ TB_m &= TB_{m-1} \cdot (1+i) = TB_1 \cdot (1+i)^{m-1} = AN - Z_m \\ &\text{или} \quad TB_m = [AN - RS_0 \cdot i] \cdot (1+i)^{m-1} \end{aligned}$$

Процентные суммы: $Z_j = AN - TB_j$.
Сумма всех долей погашения равна начальному долгу:

$$\sum_{j=1}^{m} TB_j = m \cdot AN - \sum_{j=1}^{m} Z_j = RS_0$$

Итоговые процентные выплаты:

$$\sum_{j=1}^{m} Z_j = m \cdot AN - RS_0$$

Ещё открытым остаётся вопрос, как определить размер постоянного аннуитета. Его можно рассчитать, приравняв остаток долга после последней выплаты нулю: $RS_m = 0$ — долг полностью погашен:

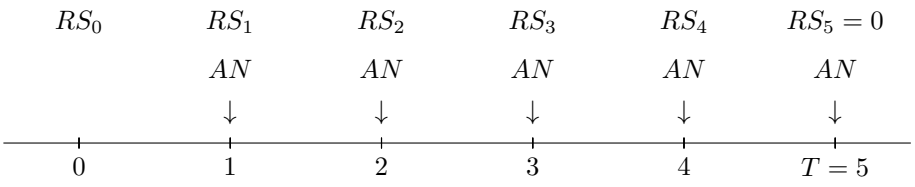
$$\begin{aligned} RS_0 \cdot (1+i)^m &= AN \cdot \frac{(1+i)^m - 1}{i} \\ AN &= RS_0 \cdot (1+i)^m \cdot \frac{i}{(1+i)^m - 1} \end{aligned}$$

Срок погашения при заданном аннуитете:

$$m = \frac{-\ln\left(1 - \frac{i \cdot RS_0}{AN}\right)}{\ln(1+i)} \tag{4.8}$$

Пример 1: $RS_0 = 100\,000$ EUR, $i = 5\%$, $m = 5$ лет:

$$AN = 100000 \cdot 1{,}05^5 \cdot \frac{0{,}05}{1{,}05^5 - 1} = 23097{,}48 \text{ EUR}$$



j	RS_j	TB	Z_j	AN_j
0	100000			
1	81902,52	18097,48	5000	23097,48
2	62900,17	19002,35	4095,12	23097,48
3	42947,70	19952,47	3145,01	23097,48
4	21997,60	20950,10	2147,38	23097,48
5	0	21997,60	1099,88	23097,48

Итого процентов: 15 487,39 EUR. Проценты убывают с 5000,00 EUR до 1099,88 EUR. Доли погашения растут с 18097,48 EUR до 21997,60 EUR.

В данном примере периоды начисления и погашения составляют ровно один год. Как и при погашении равными долями, схему расчёта можно применять и при внутригодовых периодах при условии задания соответствующей периодоспецифической ставки. Рассмотрим второй пример из раздела subsection 4.1.1:
Пример 2: Потребительский кредит 2000 EUR, ежемесячное начисление и ежемесячные аннуитеты (в конце каждого месяца), 5 выплат, $i_{\frac{1}{12}} = 1\%$.

$$AN = 2000 \cdot 1{,}01^5 \cdot \frac{0{,}01}{1{,}01^5 - 1} = 412{,}08 \text{ EUR}$$

j	RS_j	TB	Z_j	AN_j
0	2000			
1	1607,92	392,08	20	412,08
2	1211,92	396,00	16,08	412,08
3	811,96	399,96	12,12	412,08
4	408,00	403,96	8,12	412,08
5	0	408,00	4,08	412,08

Итого процентов: 64,28 EUR.

Частый практический вопрос — срок погашения при желаемом размере аннуитета. Например, аннуитет не должен превышать 300 EUR, поскольку такова максимальная ежемесячная нагрузка для клиента.
Для этого нужно обратить формулу аннуитета относительно m:
Если желаемый аннуитет — 300 EUR (меньше 412,08):

$$m = \frac{-\ln(1 - \frac{0{,}01 \cdot 2000}{300})}{\ln 1{,}01} = 6{,}93$$

Практически — 6 месяцев по 300 EUR, 7-й месяц — скорректированный аннуитет. Остаток после 6 месяцев:

$$RS_6 = 2000 \cdot 1{,}01^6 - 300 \cdot \frac{1{,}01^6 - 1}{0{,}01} = 277{,}43 \text{ EUR}$$

j	RS_j	TB	Z_j	AN_j
0	2000			
1	1720,00	280,00	20,00	300
2	1437,20	282,80	17,20	300
3	1151,57	285,63	14,38	300
4	863,08	288,48	11,52	300
5	571,71	291,37	8,63	300
6	277,43	294,28	5,71	300
7	0	277,43	2,77	280,03

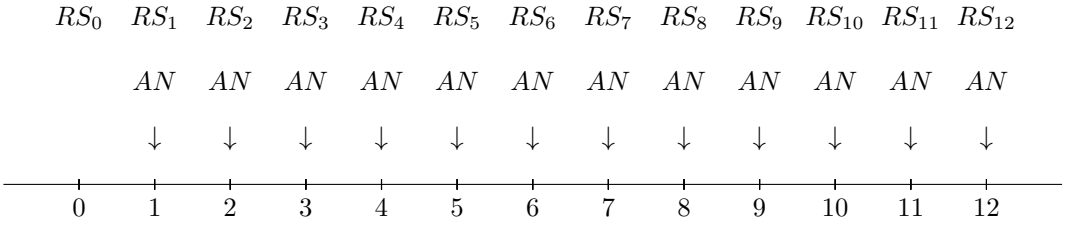
7-й аннуитет: $TB_7 = RS_6 \cdot (1 + i) = 277{,}43 \cdot 1{,}01 = 280{,}20$ EUR.
Таким образом, вместе с шестью аннуитетами по 300,00 EUR и последним аннуитетом в 280,20 EUR долг в 2000,00 EUR полностью погашен.

4.2.2. Несовпадение периода погашения с периодом начисления

Существует множество комбинаций, при которых периоды начисления и погашения не совпадают. Ограничимся случаем внутригодовых аннуитетов: и доля погашения, и проценты рассчитываются внутригодово, тогда как начисление производится ежегодно — то есть процентный период составляет год.

Аналогично разделу subsection 4.1.2: при сроке T лет каждый год делится на n периодов, в которых подлежит уплате квартальный аннуитет AN. Аннуитеты выплачиваются постнумерандо. Начисление — годовое при ставке 4%. Квартальный аннуитет определяется так, чтобы после $m \cdot n$ периодов долг был полностью погашен. Поскольку аннуитеты квартальные, и проценты Z_j, и доли погашения TB_j рассчитываются поквартально. Всего выплачивается до 12 аннуитетов, каждый из которых состоит из доли погашения и процентов.

Процесс погашения графически:



Если бы аннуитеты выплачивались не поквартально, а ежегодно, то накопленные аннуитеты в конце срока с процентами должны были бы равняться наращенному начальному долгу. Это означает:

$$RS_0 \cdot (1+i)^m = AN_{p/a} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Откуда годовой аннуитет $AN_{p/a}$ ($RS_0 = 24\,000$ EUR, $i = 4\%$, $m = 3$ года):

$$AN_{p/a} = \frac{RS_0 \cdot (1+i)^m}{\frac{(1+i)^m - 1}{i}} = \frac{24000 \cdot 1{,}04^3}{\frac{1{,}04^3 - 1}{0{,}04}} = 8648{,}36$$

Таблица годовых выплат:

j	RS_j	TB	Z_j	$AN_{p/a}$
0	24000			
1	16311,64	7688,36	960,00	8648,36
2	8315,75	7995,89	652,47	8648,36
3	0,02	8315,73	332,63	8648,36

Годовой аннуитет $AN_{p/a}$ теперь необходимо пересчитать в внутригодовые (квартальные) аннуитеты $AN_{\frac{1}{n}}$. Эта задача уже решалась в теории ренты — см. section 3.3. Там вычислялся капитал K_1 после первого года при внутригодовых взносах R с учётом процентов Z_1:

$$K_1 = R \cdot n + Z_1 = R \cdot n + R \cdot i \cdot \left(\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \ldots + 0 \right) = R \cdot \left[n + i \cdot \frac{n-1}{2} \right]$$

Применяя к нашей задаче: накопленный за год капитал при квартальных аннуитетах $AN_{\frac{1}{n}}$ должен равняться годовому аннуитету $AN_{p/a}$:

$$AN_{p/a} = AN_{\frac{1}{n}} \cdot \left[n + i \cdot \frac{n-1}{2} \right]$$

$$AN_{\frac{1}{n}} = \frac{AN_{p/a}}{n + i \cdot \frac{n-1}{2}}$$

Квартальный аннуитет ($n = 4$, $i = 4\%$):

$$AN_{\frac{1}{4}} = \frac{8648{,}36}{4 + 0{,}04 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{8648{,}36}{4{,}06} = 2130{,}14 \text{ EUR}$$

Квартальный аннуитет — 2130,14 EUR.

После $m = 3$ лет и $m \cdot n = 12$ уплаченных аннуитетов долг $RS_0 = 24\,000$ EUR полностью погашен. Проверка: квартальными аннуитетами за 12 периодов накапливается:

$$K_3 = AN_{\frac{1}{4}} \cdot \left[4 + \frac{3 \cdot 0{,}04}{2} \right] \cdot \frac{1{,}04^3 - 1}{0{,}04} = 2130{,}14 \cdot 4{,}06 \cdot 3{,}1216 = 26996{,}75 \text{ EUR}$$

Наращенный долг: $RS_0 \cdot (1{,}04)^3 = 24000 \cdot 1{,}04^3 = 26996{,}74$ EUR.
За исключением погрешности в 1 цент, наращенный долг равен накопленному капиталу от внутригодовых аннуитетов.

4.3. Надбавки и скидки при погашении

В данном разделе рассматривается лишь одна из возможностей модификации суммы выплаты кредита. При ипотечных кредитах нередко применяется уменьшение выплачиваемой суммы посредством так называемого **дизажио**. Выплачиваемая сумма сокращается в процентном отношении на $\alpha\%$ согласованной суммы кредита. Мотивация может быть различной. В ряде случаев дизажио может быть учтено как коммерческие расходы при подаче налоговой декларации. Налоговые аспекты в рамках финансовой математики не рассматриваются, однако заёмщику следует принимать их в расчёт при оценке условий. Здесь нас интересует иной аспект. Кредиты с дизажио, как правило, имеют иную процентную ставку, чем кредиты без дизажио. Это затрудняет сравнение условий погашения. Прежде чем сравнивать кредиты с дизажио и без него, кратко рассмотрим порядок расчёта погашения с дизажио.

Согласованная сумма кредита по-прежнему обозначается RS_0 (остаток долга в начале срока). Вся сумма кредита начисляется по ставке $i\%$. Согласованная сумма RS_0 погашается согласно методике предыдущих разделов. Наряду с суммой кредита учитывается так называемая выплачиваемая сумма (сумма кредита за вычетом дизажио), обозначаемая AZ_0. Выплачиваемая сумма для процесса погашения несущественна и в нём не учитывается. Ограничиваемся случаем постнумерандо-аннуитетного погашения при годовом периоде. Согласованная сумма RS_0 погашается годовыми аннуитетами AN_t, $t = 1, 2, \ldots, T$. Выплачиваемая сумма AZ_0:

$$AZ_0 = RS_0 \cdot (1 - \alpha) \tag{4.9}$$

Вопрос состоит в следующем: под какую ставку начисляется выплачиваемая сумма AZ_0, если по кредитному договору вся сумма RS_0 выдаётся под ставку $i\%$? Заёмщика интересует: при каких условиях погашение выплачиваемой суммы AZ_0 даёт тот же результат, что погашение согласованной суммы RS_0.

Рассмотрим простой **пример**:

Сумма кредита (RS_0)	100 000
Дизажио α	6%
Ставка i	5%
Срок T	10 лет

Выплачиваемая сумма AZ_0:

$$AZ_0 = RS_0 \cdot (1 - \alpha) = 100000 \cdot (1 - 0{,}06) = 94000 \text{ EUR}$$

Аннуитеты рассчитываются на базе согласованной суммы по контрактной ставке i:

$$AN = RS_0 \cdot (1 + i)^T \cdot \frac{i}{(1 + i)^T - 1} = 100000 \cdot 1{,}05^{10} \cdot \frac{0{,}05}{1{,}05^{10} - 1} = 12950{,}46$$

Выплачиваются 10 аннуитетов по 12 950,46 EUR, что соответствует погашаемой сумме 100 000 EUR. Однако реально выплачивается лишь 94 000 EUR. Если бы тот же аннуитет использовался для погашения реального долга в 94 000 EUR, это соответствовало бы ставке около $6{,}29463\%$:

$$\begin{aligned} AN &= AZ_0 \cdot (1 + i_{eff})^{10} \cdot \frac{i_{eff}}{(1 + i_{eff})^{10} - 1} \\ &= 94000 \cdot (1{,}0629463)^{10} \cdot \frac{0{,}0629463}{(1{,}0629463)^{10} - 1} = 12950{,}46 \end{aligned}$$

Эффективная ставка по сумме AZ_0:

$$i_{eff} \approx 0{,}0629463 = 6{,}29\%$$

Кредитор фактически использует ставку $6{,}29\%$ — значительно выше указанных 5%. Тем не менее это может быть выгоднее, чем кредит без дизажио при ставке $6{,}5\%$.

Существует ряд других способов модифицировать ставку путём применения надбавок и скидок к сумме кредита. Некоторые такие модификации описаны в книге [Bos91]. Рекомендуется всегда рассчитывать эффективную ставку, учитывающую все модификации условий кредита — это позволяет сравнивать различные кредиты с разными условиями.

4.4. Изменение условий погашения

Долгосрочные кредитные договоры, как правило, заключаются сначала на частичный период и затем пересматриваются в зависимости от рыночных условий. Главным аргументом служит изменение процентных ставок. Чтобы согласовать новые условия продолжения кредита, необходимо знать временну́ю стоимость кредита на момент изменения договора. Это означает: провести инвентаризацию — указать, какой объём уже

погашен, какие долги ещё остаются и какие дополнительные долги необходимо принять. Важно также составить новый план погашения.

В разделе section 3.2 уже рассматривался расчёт текущей стоимости рентных платежей BW_t. Конечная стоимость предстоящих платежей (K_{T-t}) дисконтируется коэффициентом $\frac{1}{q^{T-t}}$ к моменту t расчёта BW_t.

Текущую стоимость ренты в момент t можно интерпретировать следующим образом: если бы в момент t эту сумму вложили единовременно на тех же условиях (та же ставка), то единовременное вложение обеспечило бы ту же конечную стоимость, что и все предстоящие платежи. То есть BW_t тождественен возможной сумме досрочного погашения ренты в момент t.

Текущие стоимости можно определить и для процессов погашения. Процесс погашения можно рассматривать как последовательность переменных или постоянных выплат (аннуитетов), каждая из которых включает проценты и долю погашения. Из долей погашения можно определить остаток долга на любой момент времени; из процентных выплат — накопленные и будущие проценты.

И здесь встаёт вопрос: какой единовременной выплатой в момент t можно заменить прерванный процесс погашения? Речь идёт не только об оставшемся остатке долга, но и об упущенных процентах. Кредитор может рассматривать погашение долга как процесс накопления капитала. Его законный интерес — получить ту же сумму, что он получил бы в рамках процесса погашения. Иными словами: какой суммой можно «выкупить» прерванный кредитный договор.

Процесс погашения — последовательность постоянных или переменных выплат — может рассматриваться как рента. Результат рентных выплат в конце срока равен наращенному долгу — при той же ставке i. Рассмотрим аннуитетное погашение. Аннуитеты AN (постоянные) могут трактоваться как постнумерандо-взносы. Процентные и погасительные периоды — год. В конце срока T:

$$K_T = RS_0 \cdot (1+i)^T = AN \cdot \frac{(1+i)^T - 1}{i}$$

В любой момент t:

$$\begin{aligned} K_t &= RS_0 \cdot (1+i)^t \\ RS_t &= RS_0 \cdot (1+i)^t - AN \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i} \\ Z_t &= AN - RS_t \end{aligned}$$

Текущая стоимость процесса погашения в момент t рассчитывается из предстоящих аннуитетов AN_j $(j = t+1, \ldots, T)$ и коэффициента дисконтирования $\frac{1}{q^{T-t}}$:

$$BW_t = AN \cdot \frac{(1+i)^{T-t} - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^{T-t}} \tag{4.10}$$

Эта величина совпадает с остатком долга RS_t и равна сумме досрочного погашения.
Пример (из раздела subsection 4.2.1):

Долг 100 000 EUR погашается равными аннуитетами за 5 лет. Начисление — ежегодное, $i = 5\%$. Выплаты — в конце каждого периода. Постоянный годовой аннуитет 23 097,48 EUR. При этом достигается конечная стоимость $K_T = 127\,628{,}16$ EUR, а текущая стоимость в $t = 0$ равна 100 000 EUR:

$$\begin{aligned} K_T &= RS_0 \cdot (1+i)^T = 100000 \cdot 1{,}05^5 = 127628{,}16 \\ BW_0 &= \frac{K_T}{(1+i)^T} = \frac{127628{,}16}{1{,}05^5} = 100000 \end{aligned}$$

$RS_0 = 100\,000$ EUR, $i = 5\%$, 5 лет, $AN = 23097{,}48$ EUR. Остаток долга и предстоящие платежи в момент $t = 3$:

$$RS_3 = 100000 \cdot 1{,}05^3 - 23097{,}48 \cdot \frac{1{,}05^3 - 1}{0{,}05} = 42947{,}69 \text{ EUR}$$

Остаток долга в $t = 3$ равен 42947,69 EUR.
Накопленная стоимость предстоящих 2 аннуитетов ($2 \times AN$) к концу срока:

$$\begin{aligned} K_{3+2} &= RS_3 \cdot (1+i)^2 = 42947{,}69 \cdot 1{,}05^2 = 47349{,}83 \\ &= AN \cdot \frac{(1+i)^2 - 1}{i} = 23097{,}48 \cdot \frac{1{,}05^2 - 1}{0{,}05} = 47349{,}83 \end{aligned}$$

Текущая стоимость, как и следовало ожидать, совпадает с остатком долга RS_3:

$$BW_3 = K_{3+2} \cdot \frac{1}{(1+i)^2} = AN \cdot \frac{(1+i)^2 - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^2}$$
$$BW_3 = 47349{,}83 \cdot \frac{1}{1{,}05^2} = 23097{,}48 \cdot \frac{1{,}05^2 - 1}{0{,}05} \cdot \frac{1}{1{,}05^2} = 42947{,}69$$

Остаток долга и текущая стоимость в момент $t = 3$ равны 42947,69 EUR. Текущую стоимость можно интерпретировать следующим образом: если договор должен быть расторгнут путём выплаты остатка долга и упущенных процентов в момент $t = 3$, необходимо уплатить 42947,69 EUR.

Рассмотрим два варианта изменения договора:
(a) Изменение процентной ставки

Срок погашения в нашем примере составляет всего 5 лет, ставка зафиксирована на весь срок. Это, однако, не означает, что рыночные условия не изменились. Предположим, после 3 лет производится корректировка под рыночные условия: новая ставка $i = 5{,}5\%$ вместо $i = 5{,}0\%$. Под новыми рыночными условиями возможны два варианта — либо продолжить договор с изменённой ставкой, либо расторгнуть его и вложить средства иначе. Кредитор, разумеется, взвесит, какая форма вложения для него выгоднее. При росте рыночных ставок ему выгоднее не продолжать формирование капитала в рамках погашения, а инвестировать по более выгодным условиям.

Исходной точкой служит остаток долга RS_3 после трёх лет. Для погашения остатка рассчитываются новые аннуитеты:

$$AN = 42947{,}69 \cdot 1{,}055^2 \cdot \frac{0{,}055}{1{,}055^2 - 1} = 23261{,}25 \text{ EUR}$$

Итоговая стоимость:

$$\begin{aligned} K_{3+2} &= RS_3 \cdot (1+i)^2 = 42947{,}69 \cdot 1{,}055^2 = 47801{,}85 \text{ EUR} \\ &= AN \cdot \frac{(1+i)^2 - 1}{i} = 23261{,}25 \cdot \frac{1{,}055^2 - 1}{0{,}055} = 47801{,}86 \end{aligned}$$

Текущая стоимость в $t = 3$, полученная умножением на коэффициент дисконтирования $\frac{1}{(1+i)^2} = \frac{1}{1{,}055^2}$, естественно, равна остатку долга $RS_3 = 42947{,}69$. Конечные стоимости по старым и новым условиям различаются, но дисконтированные к $t = 3$ — равны.

Альтернатива продолжению договора — погасить остаток долга единовременным платежом. Кредитор смог бы вложить эту сумму по рыночным условиям (то есть по ставке $i = 5{,}5\%$) и получить те же 47 801,85 EUR.

(b) Продление договора

Другой способ изменить договор до истечения срока — продление, чтобы снизить ежегодную нагрузку по погашению. Если стороны договариваются в момент $t = 3$ об изменении условий таким образом, что срок продлевается сверх первоначального, то основой для пересчёта аннуитетов служит остаток долга. Допустим, срок погашения продлевается на 1 год, ставка остаётся на уровне 5%. Тогда получается аннуитет, выплачиваемый трижды в год:

$$AN = 42947{,}69 \cdot 1{,}05^3 \cdot \frac{0{,}05}{1{,}05^3 - 1} = 15770{,}76 \text{ EUR}$$

Новый аннуитет составляет 15 770,76 EUR.

Новый аннуитет 15 770,76 EUR обеспечивает за следующие 3 года итоговую стоимость 49 717,32 EUR:

$$K_{3+3} = AN \cdot \frac{(1+i)^3 - 1}{i} = 15770{,}76 \cdot \frac{1{,}05^3 - 1}{0{,}05} = 49717{,}32$$

или

$$K_{3+3} = RS_3 \cdot (1+i)^3 = 42947{,}69 \cdot 1{,}05^3 = 49717{,}32$$

Текущая стоимость в $t = 3$, полученная умножением на коэффициент дисконтирования $\frac{1}{(1+i)^3} = \frac{1}{1{,}05^3} = 0{,}8638$, естественно, равна остатку долга $RS_3 = 42947{,}69$.

Глава 5

Приложение

5.1. Статистические параметры для расчёта рисков

Для расчёта рисков необходимы статистические параметры, либо вычисляемые в этой книге, либо задаваемые как данность. Как описано в разделе **??**, параметры выводятся из долгосрочных временны́х рядов темпов роста факторов риска. Речь идёт о рядах длиной 250 наблюдений. Только для отдельных рядов расчёт был проиллюстрирован; прочие величины приняты произвольно.

В следующей таблице приведён обзор всех учитываемых в данной книге факторов риска и их статистических параметров.

Фактор риска	Обозначение	Среднее	Дисперсия	Ст. откл.
Темп роста курса EUR/USD	$wk(\text{EUR USD})$	$\mu = 0{,}000000$	$\sigma^2 = 0{,}000024$	$\sigma = 0{,}004920$
Темп роста курса EUR/GBP	$wk(\text{EUR GBP})$	$\mu = 0{,}000000$	$\sigma^2 = 0{,}000030$	$\sigma = 0{,}005477$
Темп роста коэфф. EUR $(0 \leftarrow 1)$	$\hat{q}_{\text{EUR}(0\leftarrow 1)}$	$\mu = 0{,}000000$	$\sigma^2 = 0{,}000022$	$\sigma = 0{,}004690$
Темп роста коэфф. EUR $(0 \leftarrow 2)$	$\hat{q}_{\text{EUR}(0\leftarrow 2)}$	$\mu = 0{,}000000$	$\sigma^2 = 0{,}000024$	$\sigma = 0{,}004920$
Темп роста коэфф. EUR $(0 \leftarrow 3)$	$\hat{q}_{\text{EUR}(0\leftarrow 3)}$	$\mu = 0{,}000000$	$\sigma^2 = 0{,}000028$	$\sigma = 0{,}005292$
Темп роста коэфф. EUR $(0 \leftarrow 4)$	$\hat{q}_{\text{EUR}(0\leftarrow 4)}$	$\mu = 0{,}000000$	$\sigma^2 = 0{,}000030$	$\sigma = 0{,}005477$
Темп роста коэфф. USD $(0 \leftarrow 2)$	$\hat{q}_{\text{USD}(0\leftarrow 2)}$	$\mu = 0{,}000000$	$\sigma^2 = 0{,}000028$	$\sigma = 0{,}005292$
Темп роста коэфф. EURIBOR срок в мес. $(0 \leftarrow 3)$	$\hat{q}_{\text{EURIBOR}(0\leftarrow 3)}$	$\mu = 0{,}000000$	$\sigma^2 = 0{,}000005$	$\sigma = 0{,}002236$
Темп роста коэфф. EURIBOR срок в мес. $(0 \leftarrow 9)$	$\hat{q}_{\text{EURIBOR}(0\leftarrow 9)}$	$\mu = 0{,}000000$	$\sigma^2 = 0{,}000008$	$\sigma = 0{,}002828$

Помимо среднего, дисперсии и стандартного отклонения, необходимо учитывать взаимосвязи между факторами риска в форме ковариаций.

Фактор риска 1	Фактор риска 2	Обозначение	Ковариация
Темп роста курса EUR/USD	Темп роста курса EUR/GBP	$\sigma^2_{wk(\text{EUR USD})/wk(\text{EUR GBP})}$	$\sigma^2 = 0{,}000005$
Темп роста коэфф. EUR $(0 \leftarrow 1)$	Темп роста коэфф. EUR $(0 \leftarrow 2)$	$\sigma^2_{(\hat{q}_{\text{EUR}(0\leftarrow 1)}/\hat{q}_{\text{EUR}(0\leftarrow 2)})}$	$\sigma^2 = 0{,}000005$
Темп роста коэфф. EUR $(0 \leftarrow 1)$	Темп роста коэфф. EUR $(0 \leftarrow 3)$	$\sigma^2_{(\hat{q}_{\text{EUR}(0\leftarrow 1)}/\hat{q}_{\text{EUR}(0\leftarrow 3)})}$	$\sigma^2 = 0{,}000006$
Темп роста коэфф. EUR $(0 \leftarrow 1)$	Темп роста коэфф. EUR $(0 \leftarrow 4)$	$\sigma^2_{(\hat{q}_{\text{EUR}(0\leftarrow 1)}/\hat{q}_{\text{EUR}(0\leftarrow 4)})}$	$\sigma^2 = 0{,}000007$
Темп роста коэфф. EUR $(0 \leftarrow 2)$	Темп роста коэфф. EUR $(0 \leftarrow 3)$	$\sigma^2_{(\hat{q}_{\text{EUR}(0\leftarrow 2)}/\hat{q}_{\text{EUR}(0\leftarrow 3)})}$	$\sigma^2 = 0{,}000008$
Темп роста коэфф. EUR $(0 \leftarrow 2)$	Темп роста коэфф. EUR $(0 \leftarrow 4)$	$\sigma^2_{(\hat{q}_{\text{EUR}(0\leftarrow 2)}/\hat{q}_{\text{EUR}(0\leftarrow 4)})}$	$\sigma^2 = 0{,}000005$
Темп роста коэфф. EUR $(0 \leftarrow 3)$	Темп роста коэфф. EUR $(0 \leftarrow 4)$	$\sigma^2_{(\hat{q}_{\text{EUR}(0\leftarrow 3)}/\hat{q}_{\text{EUR}(0\leftarrow 4)})}$	$\sigma^2 = 0{,}000003$
Темп роста коэфф. EURIBOR $(0 \leftarrow 3)$	Темп роста коэфф. EURIBOR $(0 \leftarrow 9)$	$\sigma^2_{(\hat{q}_{\text{EURIBOR}(0\leftarrow 3)}/\hat{q}_{\text{EURIBOR}(0\leftarrow 9)})}$	$\sigma^2 = 0{,}000004$

Напомним, что ковариация фактора i с фактором j равна ковариации j с i: $\sigma^2_{i,j} = \sigma^2_{j,i}$. Поэтому в таблице указаны только $\sigma^2_{i,j}$.

$$\sigma^2_{i,j} = \sigma^2_{j,i}$$

5.2. Динамические ренты — вывод формул

5.2.1. Арифметически возрастающие ренты

Закон роста:

$$\begin{aligned} R_1 &= R \\ R_2 &= R + \Delta \\ R_t &= R + (t-1) \cdot \Delta \end{aligned}$$

Δ — постоянный прирост.
Постнумерандо: каждый взнос наращивается по остатку срока:

$$\begin{aligned} B_1 &= R \cdot q^{T-1} \\ B_2 &= (R + \Delta) \cdot q^{T-2} \\ ... &= ... \\ B_t &= (R + (t-1) \cdot \Delta) \cdot q^{T-t} \\ B_T &= R + (T-1) \cdot \Delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_T &= \sum_{t=1}^{T} B_t \\ &= R \cdot q^{T-1} + (R + \Delta) \cdot q^{T-2} + \ldots + (R + (T-1) \cdot \Delta) \cdot q^0 \\ &= R \cdot (q^{T-1} + q^{T-2} + \ldots + q^0) + \Delta \cdot (q^{T-2} + 2 \cdot q^{T-3} + \ldots + (T-1) \cdot q^0) \\ &= S_1 + S_2 \end{aligned}$$

Частичные суммы рассматриваются отдельно:

$$\begin{aligned} S_2 &= \Delta \cdot (q^{T-2} + 2 \cdot q^{T-3} + \ldots + (T-1) \cdot q^0) \\ S_2 \cdot q &= \Delta \cdot (q^{T-1} + 2 \cdot q^{T-2} + \ldots + (T-1) \cdot q^1) \\ S_2 \cdot q - S_2 &= \Delta \cdot (q^{T-1} + q^{T-2} + \ldots + q^1 + q^0) - T \cdot \Delta \\ S_2 \cdot (q-1) &= \frac{\Delta \cdot (q^T - 1)}{q-1} - T \cdot \Delta \\ S_2 &= \frac{\Delta \cdot (q^T - 1)}{(q-1)^2} - \frac{T \cdot \Delta}{q-1} \end{aligned}$$

$$S_1 = R \cdot \frac{q^T - 1}{q-1}$$

Обе частичные суммы объединяются:

$$\begin{aligned} S_1 &= R \cdot \frac{q^T - 1}{q-1} \\ S_2 &= \frac{\Delta \cdot (q^T - 1)}{(q-1)^2} - \frac{T \cdot \Delta}{q-1} \end{aligned}$$

Итого:

$$K_T = \frac{q^T - 1}{q-1} \cdot \left(\frac{\Delta}{q-1} - \frac{T \cdot \Delta}{q^T - 1} + R \right)$$

Пренумерандо:

$$K_T = q \cdot \frac{q^T - 1}{q-1} \cdot \left(\frac{\Delta}{q-1} - \frac{T \cdot \Delta}{q^T - 1} + R \right)$$

5.2.2. Геометрически возрастающие ренты

Постнумерандо:

$$\begin{aligned} R_1 &= R \\ R_2 &= R \cdot (1+\beta) \\ ... &= ... \\ R_t &= R \cdot (1+\beta)^{t-1} \\ R_T &= R \cdot (1+\beta)^{T-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= R \cdot q^{T-1} \\ B_2 &= R \cdot (1+\beta) \cdot q^{T-2} \\ ... &= ... \\ B_t &= R \cdot (1+\beta)^{t-1} \cdot q^{T-t} \\ B_T &= R \cdot (1+\beta)^{T-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_T &= \sum_{t=1}^{T} B_t \\ &= R \cdot q^{T-1} + R \cdot (1+\beta) \cdot q^{T-2} + \ldots + R \cdot (1+\beta)^{t-1} \cdot q^{T-t} + \ldots + R \cdot (1+\beta)^{T-1} \\ &= R \cdot q^{T-1} \cdot \left(1 + \left(\frac{1+\beta}{q}\right)^{1} + \ldots + \left(\frac{1+\beta}{q}\right)^{T-t} + \ldots + \left(\frac{1+\beta}{q}\right)^{T-1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_T &= R \cdot q^{T-1} \cdot \frac{\left(\frac{1+\beta}{q}\right)^{T} - 1}{\frac{1+\beta}{q} - 1}, \quad (1+\beta) \neq q \\ K_T &= R \cdot q^{T-1} \cdot n \cdot T, \quad (1+\beta) = q \end{aligned}$$

Список литературы

[Böh21] Böhme, Wolfgang: *Finanzmathematik*. Skript, März 2021.

[Bos91] Bosch, Karl: *Finanzmathematik*. Oldenbourg Verlag, München, 1991.

[Hul01] Hull, John C.: *Optionen, Futures und andere Derivate*. Pearson Studium / Oldenbourg Verlag, München, 2001.

[Bun21a] Deutsche Bundesbank: *Liquiditätsrisiko*. Website, 2021. https://www.bundesbank.de/de/aufgaben/bankenaufsicht/einzelaspekte/eigrisiko/liquiditaetsrisiko. Abgerufen am 03.07.2021.

[Inv21] Investing.com: *EUR 5 Years IRS Interest Rate Swap*. Website, 2021. https://www.investing.com/rates-bonds/eur5-years-irs-interest-rate-swap-historical-data. Abgerufen am 10.06.2021.

[Wie18] Wiedemann, Arnd: *Financial Engineering – Bewertung von Finanzinstrumenten*. efiport GmbH, 2018.

[Bun21b] Deutsche Bundesbank: *Operationelles Risiko*. Website, 2021. https://www.bundesbank.de/de/aufgaben/bankenaufsicht/einzelaspekte/eigrisiko/operationelles-risiko-598534. Abgerufen am 03.07.2021.

[Kru10] Kruschwitz, Lutz: *Finanzmathematik*. 5. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, 2010.

[Lud24] Luderer, Bernd: *Starthilfe Finanzmathematik – Zinsen, Kurse, Renditen*. 5. Auflage, Springer Vieweg, Wiesbaden, 2024.

[Lud19] Luderer, Bernd: *Klassische Finanzmathematik*. Springer Gabler, Wiesbaden, 2019.

[Pfe09] Pfeifer, Andreas: *Praktische Finanzmathematik*. 5. überarbeitete Auflage, Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 2009.

[Tie15] Tietze, Jürgen: *Einführung in die Finanzmathematik*. 12. Auflage, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2015.

[TieÜ] Tietze, Jürgen: *Übungsbuch zur Finanzmathematik*. Springer Vieweg, Wiesbaden.

[HeiSch17] Heidorn, Thomas; Schäffler, Christian: *Finanzmathematik in der Bankpraxis*. 7. Auflage, Springer Gabler, Wiesbaden, 2017.

[Rei11] Reitz, Stefan: *Mathematik in der modernen Finanzwelt*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2011.

[GruLud09] Grundmann, Wolfgang; Luderer, Bernd: *Finanzmathematik, Versicherungsmathematik, Wertpapieranalyse*. 3. Auflage, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009.

[Wie09] Wiedemann, Arnd: *Risikotriade Zins-, Kredit- und operationelle Risiken*. 3. Auflage, Frankfurt School Verlag, Frankfurt am Main, 2009.

[Schu] Schulte-Mattler, Hermann; Traber, Uwe: *Marktrisiko – Messung und Eigenkapitalunterlegung*. Gabler Verlag, Wiesbaden.

[Cha17] Chan, Wai-Sum; Tse, Yiu-Kuen: *Financial Mathematics for Actuaries*. 2. Auflage, World Scientific, Singapur, 2017.

[Has22] Hastings, Kevin J.: *Introduction to Financial Mathematics*. 2. Auflage, Routledge/CRC Press, New York, 2022.

[Kam10] Kaminsky, Kenneth: *Financial Literacy*. 2. Auflage, University Press of America, Lanham, 2010.

[Hul18] Hull, John C.: *Options, Futures, and Other Derivatives*. 10. Auflage, Pearson Education, Hoboken, 2018.

[Fab12] Fabozzi, Frank J.: *Bond Markets, Analysis, and Strategies*. 8. Auflage, Pearson Education, Boston, 2012.

[BriMer06] Brigo, Damiano; Mercurio, Fabio: *Interest Rate Models – Theory and Practice*. 2. Auflage, Springer, Berlin/Heidelberg, 2006.

[JoR07] Jorion, Philippe: *Value at Risk*. 3. Auflage, McGraw-Hill, New York, 2007.

[McN05] McNeil, Alexander J.; Frey, Rüdiger; Embrechts, Paul: *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press, Princeton, 2005.