Четырёхмерный калькулятор затраты–выпуск

Математическое описание, этапы расчёта и работа с инструментом

Русский

Вольфганг Бёме

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

4 ноября 2026 г.

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

Содержание

1 Введение и обзор **2**
1.1 Примеры наборов данных . . . 2
1.2 Обозначения и порядок . . . 2

2 Вкладка 1 — общая четырёхмерная модель **4**
2.1 Основные уравнения . . . 4
2.2 Этапы расчёта для примера 1 . . . 4

3 Вкладка 2 — иерархическая структура (модели M1–M9) **7**
3.1 Принцип классификации . . . 7
3.2 Правила агрегирования . . . 7
3.3 Этапы расчёта для примера 1 . . . 7

4 Вкладка 3 — частичные таблицы затраты-выпуск **9**
4.1 Разбиение на две группы товаров . . . 9
4.2 Этапы расчёта для примера 1 при $N_1 = \{1, 2, 3\}$, $N_2 = \{4, 5\}$ . . . 9

5 Вкладка 4 — матрицы выпуска и использования **11**
5.1 Основные матрицы . . . 11
5.2 Предположения о технологии . . . 11

6 Вкладка 5 — вывод натурально-стоимостного баланса **13**
6.1 Основная идея . . . 13
6.2 Этапы расчёта для примера 1 при $N_1 = \{1, 2, 3\}$, ценах $p_{ik} = 1$ . . . 13

7 Датабокс **15**

A Глоссарий коэффициентов и величин **16**

Литература **16**

1. Введение и обзор

Этот документ описывает математические основы и порядок работы с веб-калькулятором четырёхмерной модели затраты–выпуск и шаг за шагом рассчитывает пример 1. Инструмент состоит из пяти вкладок:

- **Вкладка 1** — общая четырёхмерная модель (основа для вкладок 2 и 3)
- **Вкладка 2** — иерархическая структура: вывод моделей M1–M9
- **Вкладка 3** — частичные таблицы затраты–выпуск (разбиение на две группы товаров)
- **Вкладка 4** — матрицы выпуска и использования (самостоятельная база данных)
- **Вкладка 5** — вывод натурально-стоимостного баланса (собственный ввод данных, при желании из вкладки 1)

Указание по работе

Сначала обрабатывается вкладка 1 (загрузить или ввести данные, *Рассчитать*). Вкладки 2 и 3 используют рассчитанные там матрицу промежуточных потоков X_{ijkl} и вектор валового выпуска X_{ik}. Вкладка 4 работает с матрицами использования и выпуска, вкладка 5 — с собственной таблицей (которую можно перенять из вкладки 1).

1.1. Примеры наборов данных

Примеры хранятся в центральном датабоксе (метка «Четырёхмерная») и загружаются на каждой вкладке кнопкой *Загрузить данные из датабокса*.

Название в инструменте	Содержание	Вкладки
Пример 1 (5 товаров, 2 сектора)	числовой пример; $N_1 = \{1, 2, 3\}$	1, 2, 3, 5
Пример 2 (5 товаров, 2 сектора)	собственный согласованный пример; $N_1 = \{1, 2, 3\}$	1, 2, 3, 5
Пример 3 (3 товара, 2 сектора)	сокращённый пример с 3 товарами	1, 2, 3, 5
Пример 4 (3 товара, 2 сектора)	второй собственный пример	1, 2, 3, 5
Make-Use пример 1 (3 товара, 3 сектора)	числовой пример (большие значения)	4
Make-Use пример 2 (3 товара, 3 сектора)	собственный согласованный пример	4

Сквозным расчётным примером служит **пример 1** (вкладки 1, 2, 3, 5), для вкладки 4 — **Make-Use пример 2**.

1.2. Обозначения и порядок

Символ	Значение
i, j	индексы товаров, $i, j = 1, \ldots, n$
k, l	индексы секторов, $k, l = 1, \ldots, m$
(i, k)	комбинированный индекс: товар i, произведённый в секторе k (в инструменте Gi-Bk)
X_{ijkl}	поставка товара i из сектора k на производство товара j в секторе l
X_{ik}	валовой выпуск товара i в секторе k
Y_{ik}	конечный спрос на товар i из сектора k

Комбинированные индексы упорядочены **по секторам**: G1-B1, G2-B1, …, Gn-B1, G1-B2, … (B обозначает сектор). CSV-файл имеет вид

```
n=5;m=2
;G1-B1;G2-B1;…;G5-B2
G1-B1;20;20;…
…
Y;20;20;…
```

Если файл упорядочен по товарам (G1-B1, G1-B2, G2-B1, …), инструмент пересортировывает его по подписям и сообщает об этом.

2. Вкладка 1 — общая четырёхмерная модель

2.1. Основные уравнения

Балансовое уравнение (модель M1) для каждого товара i из сектора k:

$$X_{ik} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} X_{ijkl} + Y_{ik}, \qquad i = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,m. \tag{1}$$

Коэффициент затрат:

$$a_{ijkl} = \frac{X_{ijkl}}{X_{jl}}. \tag{2}$$

Система линейных уравнений и обратная матрица Леонтьева:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{Y} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{X} = (\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{Y} = \mathbf{L}\mathbf{Y}, \tag{3}$$

с матрицей $\mathbf{A}$ размера $(nm)\times(nm)$. Матрица весов (доля поставляющего сектора k во всех поставках товара i на использование (j,l)):

$$w_{ijkl} = \frac{X_{ijkl}}{\sum_{k'} X_{ijk'l}}, \qquad \sum_{k} w_{ijkl} = 1. \tag{4}$$

Стоимостная оценка с одной ценой p_{ik} на товар и сектор (при n товарах и m секторах $n\cdot m$ цен, например 6 при 3 товарах и 2 секторах, 10 при 5 товарах и 2 секторах); один и тот же товар может иметь в разных секторах разную цену:

$$X^{p}_{ik} = p_{ik}\,X_{ik}, \qquad X^{p}_{ijkl} = p_{ik}\,X_{ijkl}, \qquad a^{p}_{ijkl} = a_{ijkl}\,\frac{p_{ik}}{p_{jl}}, \qquad \mathbf{A}^{p} = \langle p\rangle\mathbf{A}\langle p\rangle^{-1}. \tag{5}$$

2.2. Этапы расчёта для примера 1

Шаг 1 — данные. Матрица промежуточных потоков $Z = (X_{ijkl})$, конечный спрос Y и валовой выпуск X (рассчитывается на шаге 2):

	G1-B1	G2-B1	G3-B1	G4-B1	G5-B1	G1-B2	G2-B2	G3-B2	G4-B2	G5-B2	Y	X
G1-B1	20	20	0	1	4	30	20	0	0	0	20	115
G2-B1	0	14	0	0	0	0	6	10	2	0,5	20	52,5
G3-B1	0	0	20	0	0	0	0	20	5	0	50	95
G4-B1	4	0	0	0	2	0	0	10	10	10	5	41
G5-B1	3	0	0	3	1	0	5	0	5	5	5	27
G1-B2	0	20	0	0	0	100	40	0	0	0	25	185
G2-B2	0	0	0	0	0	0	10	10	0	0	27,5	47,5
G3-B2	0	0	25	25	0	0	0	25	3	2	45	125
G4-B2	10	0	4	4	0	8	2	5	0	0	20	53
G5-B2	0	5	3	3	5	1	4	5	0	0	5	31

Шаг 2 — валовой выпуск по уравнению (1) как сумма строки плюс конечный спрос, например

$$\begin{aligned} X_{1,1} &= 20+20+0+1+4+30+20+0+0+0+20 = 115,\\ X_{2,1} &= 0+14+0+0+0+0+6+10+2+0{,}5+20 = 52{,}5,\\ X_{3,2} &= 0+0+25+25+0+0+0+25+3+2+45 = 125. \end{aligned}$$

Всего $X = (115;\ 52{,}5;\ 95;\ 41;\ 27;\ 185;\ 47{,}5;\ 125;\ 53;\ 31)^{\top}$.

Шаг 3 — матрица коэффициентов по уравнению (2): каждый столбец Z делится на выпуск получающей строки, например

$$a_{1,2,1,1} = \frac{X_{1,2,1,1}}{X_{2,1}} = \frac{20}{52{,}5} = 0{,}381, \qquad a_{2,2,1,2} = \frac{6}{47{,}5} = 0{,}126, \qquad a_{3,4,2,1} = \frac{25}{41} = 0{,}610.$$

	G1-B1	G2-B1	G3-B1	G4-B1	G5-B1	G1-B2	G2-B2	G3-B2	G4-B2	G5-B2
G1-B1	0,174	0,381	0	0,024	0,148	0,162	0,421	0	0	0
G2-B1	0	0,267	0	0	0	0	0,126	0,08	0,038	0,016
G3-B1	0	0	0,211	0	0	0	0	0,16	0,094	0
G4-B1	0,035	0	0	0	0,074	0	0	0,08	0,189	0,323
G5-B1	0,026	0	0	0,073	0,037	0	0,105	0	0,094	0,161
G1-B2	0	0,381	0	0	0	0,541	0,842	0	0	0
G2-B2	0	0	0	0	0	0	0,211	0,08	0	0
G3-B2	0	0	0,263	0,61	0	0	0	0,2	0,057	0,065
G4-B2	0,087	0	0,042	0,098	0	0,043	0,042	0,04	0	0
G5-B2	0	0,095	0,032	0,073	0,185	0,005	0,084	0,04	0	0

Суммы столбцов больше 1 (G2-B1: 1,124, G2-B2: 1,832) здесь допустимы: таблица составлена в натуральных единицах, количества разных товаров складывать нельзя. Для разрешимости решающее значение имеет спектральный радиус $\rho(\mathbf{A}) = 0{,}665 < 1$; следовательно, $\mathbf{L}$ существует и неотрицательна.

Шаг 4 — обратная матрица Леонтьева $\mathbf{L} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$:

	G1-B1	G2-B1	G3-B1	G4-B1	G5-B1	G1-B2	G2-B2	G3-B2	G4-B2	G5-B2
G1-B1	1,242	0,9	0,108	0,245	0,239	0,452	1,343	0,284	0,129	0,15
G2-B1	0,018	1,393	0,077	0,144	0,031	0,017	0,269	0,206	0,102	0,087
G3-B1	0,032	0,046	1,391	0,232	0,043	0,031	0,085	0,33	0,2	0,104
G4-B1	0,085	0,132	0,102	1,203	0,189	0,061	0,217	0,211	0,271	0,434
G5-B1	0,057	0,079	0,043	0,162	1,105	0,037	0,263	0,078	0,146	0,237
G1-B2	0,031	1,181	0,167	0,31	0,059	2,203	2,588	0,457	0,15	0,158
G2-B2	0,009	0,014	0,056	0,104	0,018	0,007	1,29	0,156	0,036	0,047
G3-B2	0,086	0,141	0,551	1,023	0,181	0,069	0,234	1,541	0,355	0,461
G4-B2	0,123	0,15	0,11	0,207	0,052	0,145	0,317	0,147	1,068	0,087
G5-B2	0,024	0,172	0,094	0,19	0,232	0,029	0,225	0,137	0,081	1,11

Проверка обратным расчётом: $\mathbf{L}Y = X$ точно воспроизводит

$$X = (115;\ 52{,}5;\ 95;\ 41;\ 27;\ 185;\ 47{,}5;\ 125;\ 53;\ 31)^{\top}.$$

Шаг 5 — матрица весов по уравнению (4). Пример: столбец G2-B1, товар 1: товар 1 поставляется в (G2,B1) из сектора 1 в объёме 20 и из сектора 2 в объёме 20, следовательно $w_{1,2,1,1} = w_{1,2,2,1} = 20/40 = 0{,}5$. Столбец G1-B1, товар 4: 10 из сектора 2 и 4 из сектора 1, следовательно $w_{4,1,1,1} = 4/14 = 0{,}286$, $w_{4,1,2,1} = 10/14 = 0{,}714$. Если ни один сектор не поставляет, $w = 0$.

	G1-B1	G2-B1	G3-B1	G4-B1	G5-B1	G1-B2	G2-B2	G3-B2	G4-B2	G5-B2
G1-B1	1	0,5	0	1	1	0,231	0,333	0	0	0
G2-B1	0	1	0	0	0	0	0,375	0,5	1	1
G3-B1	0	0	0,444	0	0	0	0	0,444	0,625	0
G4-B1	0,286	0	0	0	1	0	0	0,667	1	1
G5-B1	1	0	0	0,5	0,167	0	0,556	0	1	1
G1-B2	0	0,5	0	0	0	0,769	0,667	0	0	0
G2-B2	0	0	0	0	0	0	0,625	0,5	0	0
G3-B2	0	0	0,556	1	0	0	0	0,556	0,375	1
G4-B2	0,714	0	1	1	0	1	1	0,333	0	0
G5-B2	0	1	1	0,5	0,833	1	0,444	1	0	0

Стоимостная оценка. По умолчанию $p_{ik} = 1$ для всех товаров и секторов; тогда стоимостное и натуральное представления совпадают. При других ценах действует уравнение (5), например при $p_{1,1} = 2$ (товар 1 из сектора 1) и $p_{ik} = 1$ в остальных случаях: $X^{p}_{1,1} = 2 \cdot 115 = 230$, строка G1-B1 матрицы A^{p} удваивается, столбец G1-B1 уменьшается вдвое (диагональный элемент $a_{1,1,1,1}$ не меняется).

Указание по работе

Работа с вкладкой 1: (1) *Загрузить данные из датабокса* → выбрать пример; таблица заполняется и сразу рассчитывается. Либо задать структуру,

Создать таблицы и ввести данные или загрузить CSV, затем (2) *Рассчитать* — даёт X, A, L, W. При загрузке новых данных все прежние результаты отбрасываются. (3) При необходимости: *Рассчитать прогноз* при изменённом конечном спросе; ввести цены по товарам и секторам (поля G1-B1, G2-B1, ...) и *Применить цены*. (4) Экспорт по отдельности или общим CSV. (5) *Сохранить текущий результат в датабоксе* сохраняет n, m, Z, Y, а также A и Y. Статические наборы данных можно загрузить в разделе «Ещё» как n товаров с одним сектором.

3. Вкладка 2 — иерархическая структура (модели M1–M9)

3.1. Принцип классификации

Из M1 можно вывести восемь других моделей в зависимости от того, сохраняются ли на стороне затрат и на стороне выпуска оба признака (товар *и* сектор), только товар или только сектор:

	Выпуск: j,l	Выпуск: j	Выпуск: l
Затраты: i,k	M1 $i,k \to j,l$	M2 $i,k \to j$	M3 $i,k \to l$
Затраты: i	M4 $i \to j,l$	M5 $i \to j$	M6 $i \to l$
Затраты: k	M7 $k \to j,l$	M8 $k \to j$	M9 $k \to l$

Только M1, M5 и M9 являются квадратными, однозначно разрешимыми системами Леонтьева; остальные шесть — прямоугольные.

3.2. Правила агрегирования

Числитель и знаменатель уравнения (2) суммируются по отбрасываемым индексам. M4 (затраты только по товару):

$$a_{i,jl} = \frac{\sum_k X_{ijkl}}{X_{jl}} = \sum_k a_{ijkl}. \tag{6}$$

M5 (затраты и выпуск только по товару), где $X_{j\cdot} = \sum_l X_{jl}$:

$$a_{ij} = \frac{\sum_k \sum_l X_{ijkl}}{X_{j\cdot}} = \sum_l a_{i,jl}\, d_{jl}, \qquad d_{jl} = \frac{X_{jl}}{X_{j\cdot}}. \tag{7}$$

M9 (затраты и выпуск только по сектору), где $X_{\cdot l} = \sum_j X_{jl}$:

$$a_{kl} = \frac{\sum_i \sum_j X_{ijkl}}{X_{\cdot l}}. \tag{8}$$

3.3. Этапы расчёта для примера 1

M4 — просуммировать строки по секторам k (например, товар 1 в G2-B1: $20 + 20 = 40$), затем разделить на X_{jl} ($40/52{,}5 = 0{,}762$). Промежуточные затраты:

	G1-B1	G2-B1	G3-B1	G4-B1	G5-B1	G1-B2	G2-B2	G3-B2	G4-B2	G5-B2
G1	20	40	0	1	4	130	60	0	0	0
G2	0	14	0	0	0	0	16	20	2	0,5
G3	0	0	45	25	0	0	0	45	8	2
G4	14	0	4	4	2	8	2	15	10	10
G5	3	5	3	6	6	1	9	5	5	5

Коэффициенты:

	G1-B1	G2-B1	G3-B1	G4-B1	G5-B1	G1-B2	G2-B2	G3-B2	G4-B2	G5-B2
G1	0,174	0,762	0	0,024	0,148	0,703	1,263	0	0	0
G2	0	0,267	0	0	0	0	0,337	0,16	0,038	0,016
G3	0	0	0,474	0,61	0	0	0	0,36	0,151	0,065
G4	0,122	0	0,042	0,098	0,074	0,043	0,042	0,12	0,189	0,323
G5	0,026	0,095	0,032	0,146	0,222	0,005	0,189	0,04	0,094	0,161

M5 — дополнительно просуммировать столбцы по l. Выпуск товаров (например, $X_{1\cdot} = 115 + 185 = 300$) и конечный спрос по товарам:

$$X_{M5} = (300;\ 100;\ 220;\ 94;\ 58)^{\top}, \qquad Y_{M5} = (45;\ 47{,}5;\ 95;\ 25;\ 10)^{\top},$$

$$Z_{M5} = \begin{pmatrix} 150 & 100 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 30 & 20 & 2 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 90 & 33 & 2 \\ 22 & 2 & 19 & 14 & 12 \\ 4 & 14 & 8 & 11 & 11 \end{pmatrix},$$

$$A_{M5} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 & 0 & 0{,}0106 & 0{,}069 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}0909 & 0{,}0213 & 0{,}0086 \\ 0 & 0 & 0{,}4091 & 0{,}3511 & 0{,}0345 \\ 0{,}0733 & 0{,}02 & 0{,}0864 & 0{,}1489 & 0{,}2069 \\ 0{,}0133 & 0{,}14 & 0{,}0364 & 0{,}117 & 0{,}1897 \end{pmatrix},$$

$$L_{M5} = \begin{pmatrix} 2{,}0627 & 3{,}0221 & 0{,}5387 & 0{,}3682 & 0{,}3246 \\ 0{,}024 & 1{,}4806 & 0{,}254 & 0{,}1514 & 0{,}0672 \\ 0{,}1287 & 0{,}2681 & 1{,}8724 & 0{,}8224 & 0{,}3035 \\ 0{,}2094 & 0{,}4141 & 0{,}2857 & 1{,}3582 & 0{,}3812 \\ 0{,}0741 & 0{,}3774 & 0{,}178 & 0{,}2653 & 1{,}3197 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $L_{M5}\, Y_{M5} = (300;\ 100;\ 220;\ 94;\ 58)^{\top}$.

M9 — просуммировать строки и столбцы по секторам. Выпуск секторов $X_{\cdot l} = (330{,}5;\ 441{,}5)^{\top}$, конечный спрос по секторам $(100;\ 122{,}5)^{\top}$:

$$Z_{M9} = \begin{pmatrix} 92 & 138{,}5 \\ 104 & 215 \end{pmatrix}, \quad A_{M9} = \begin{pmatrix} 0{,}2784 & 0{,}3137 \\ 0{,}3147 & 0{,}487 \end{pmatrix}, \quad L_{M9} = \begin{pmatrix} 1{,}8896 & 1{,}1554 \\ 1{,}159 & 2{,}6579 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $L_{M9}\, Y_{M9} = (330{,}5;\ 441{,}5)^{\top}$. При натуральных единицах суммы по разным товарам интерпретируемы лишь арифметически, а не экономически (содержательны в стоимостном выражении с ценами).

Указание по работе

Работа с вкладкой 2: после *Рассчитать* на вкладке 1: *Вывести все модели M2–M9*. Для каждой модели показываются схема промежуточных потоков и матрица коэффициентов, для M5/M9 также обратная матрица Леонтьева. Экспорт по отдельности или целиком.

4. Вкладка 3 — частичные таблицы затраты-выпуск

4.1. Разбиение на две группы товаров

Товары разбиваются на $N_1 \cup N_2 = \{1, \dots, n\}$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. Поставки в другую группу относятся к конечному спросу:

$$Y^*_{ik} = Y_{ik} + \sum_l \sum_{j \in N_2} X_{ijkl}, \qquad i \in N_1, \tag{9}$$

закупки из другой группы показываются как первичные затраты:

$$P^*_{jl} = \sum_k \sum_{i \in N_2} X_{ijkl}, \qquad j \in N_1. \tag{10}$$

Частичная таблица для N_1 — самостоятельная система Леонтьева:

$$X_{ik} = \sum_{j \in N_1} \sum_l a_{ijkl}\, X_{jl} + Y^*_{ik}, \qquad i \in N_1. \tag{11}$$

Для N_2 то же самое с переставленными ролями.

4.2. Этапы расчёта для примера 1 при $N_1 = \{1, 2, 3\}$, $N_2 = \{4, 5\}$

Шаг 1 — модифицированный конечный спрос. Строка G1-B1: поставки в N_2 равны $X_{1,4,1,1} = 1$, $X_{1,5,1,1} = 4$, $X_{1,4,1,2} = X_{1,5,1,2} = 0$, следовательно $Y^* = 20{+}1{+}4 = 25$. Строка G3-B2: $45 + 25 + 0 + 3 + 2 = 75$. Порядок G1-B1, G2-B1, G3-B1, G1-B2, G2-B2, G3-B2:

$$Y^* = (25;\ 22{,}5;\ 55;\ 25;\ 27{,}5;\ 75)^\top, \qquad X = (115;\ 52{,}5;\ 95;\ 185;\ 47{,}5;\ 125)^\top.$$

Шаг 2 — первичные затраты (закупки из N_2), например столбец G1-B1: $4 + 3 + 10 + 0 = 17$:

$$P^* = (17;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11;\ 20)^\top.$$

Шаг 3 — коэффициенты и обратная матрица (фрагмент $N_1 \times N_1$ матрицы **A**):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0{,}1739 & 0{,}381 & 0 & 0{,}1622 & 0{,}4211 & 0 \\ 0 & 0{,}2667 & 0 & 0 & 0{,}1263 & 0{,}08 \\ 0 & 0 & 0{,}2105 & 0 & 0 & 0{,}16 \\ 0 & 0{,}381 & 0 & 0{,}5405 & 0{,}8421 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2105 & 0{,}08 \\ 0 & 0 & 0{,}2632 & 0 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix},$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1{,}2105 & 0{,}8508 & 0{,}0746 & 0{,}4272 & 1{,}2375 & 0{,}2237 \\ 0 & 1{,}3636 & 0{,}0565 & 0 & 0{,}2182 & 0{,}1695 \\ 0 & 0 & 1{,}3571 & 0 & 0 & 0{,}2714 \\ 0 & 1{,}1306 & 0{,}1298 & 2{,}1765 & 2{,}5025 & 0{,}3893 \\ 0 & 0 & 0{,}0452 & 0 & 1{,}2667 & 0{,}1357 \\ 0 & 0 & 0{,}4464 & 0 & 0 & 1{,}3393 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $L_1\, Y^* = (115;\ 52{,}5;\ 95;\ 185;\ 47{,}5;\ 125)^\top$ — совпадает с X из вкладки 1.

Частичная таблица N_2 (G4-B1, G5-B1, G4-B2, G5-B2):

$$Y^* = (19;\ 13;\ 49;\ 23)^\top, \qquad P^* = (26;\ 4;\ 10;\ 2{,}5)^\top,$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}0741 & 0{,}1887 & 0{,}3226 \\ 0{,}0732 & 0{,}037 & 0{,}0943 & 0{,}1613 \\ 0{,}0976 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0732 & 0{,}1852 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1{,}0588 & 0{,}1518 & 0{,}2141 & 0{,}366 \\ 0{,}1069 & 1{,}087 & 0{,}1227 & 0{,}2098 \\ 0{,}1033 & 0{,}0148 & 1{,}0209 & 0{,}0357 \\ 0{,}0973 & 0{,}2124 & 0{,}0384 & 1{,}0656 \end{pmatrix},$$

Проверка: $L_2\, Y^* = (41;\ 27;\ 53;\ 31)^\top$.

Указание по работе

Работа с вкладкой 3: *Загрузить данные из датабокса* (для примеров 1 и 2 задаёт $N_1 = \{1, 2, 3\}$) или использовать данные вкладки 1. После загрузки из датабокса вкладка 1 рассчитывается автоматически; иначе сначала *Рассчитать* на вкладке 1. Отнести товары к N_1 флажками (остальные образуют N_2), *Сформировать частичные таблицы*. В стоимостном представлении каждая строка (i, k) умножается на p_{ik} из вкладки 1.

5. Вкладка 4 — матрицы выпуска и использования

5.1. Основные матрицы

Матрица использования U (товар $\times$ сектор) и матрица выпуска V (сектор $\times$ товар); выпуск товаров и секторов:

$$x_i = \sum_k V_{ki}, \qquad g_k = \sum_i V_{ki}. \tag{12}$$

Матрицы коэффициентов:

$$D_{ki} = V_{ki}/x_i \quad \text{(матрица рыночных долей)} \tag{13}$$
$$B_{il} = U_{il}/g_l \quad \text{(коэффициенты использования)} \tag{14}$$
$$C_{il} = V_{li}/g_l \quad \text{(структура производства)} \tag{15}$$

5.2. Предположения о технологии

Отраслевая технология (единая структура затрат для каждого сектора):

$$A_{ii} = B\,D \quad \text{(товар} \times \text{товар)}, \qquad A_{ll} = D\,B \quad \text{(сектор} \times \text{сектор)}. \tag{16}$$

Продуктовая технология (единая структура затрат для каждого товара, требует $n = m$):

$$A_{ii} = B\,C^{-1}, \qquad A_{ll} = C^{-1}B. \tag{17}$$

Make-Use пример 2 (3 товара, 3 сектора)

Исходные данные.

$$V = \begin{pmatrix} 80 & 4 & 2 \\ 3 & 95 & 5 \\ 2 & 6 & 70 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 20 & 8 & 4 \\ 6 & 35 & 7 \\ 3 & 5 & 25 \end{pmatrix}, \quad y = (53;\ 57;\ 44)^\top.$$

По уравнению (12): $x = (85;\ 105;\ 77)$, $g = (86;\ 103;\ 78)$. Проверка: сумма строки $U + y = x$, например $20 + 8 + 4 + 53 = 85$.
Коэффициенты (уравнения (13)–(15)), например $D_{11} = 80/85 = 0{,}9412$, $B_{11} = 20/86 = 0{,}2326$, $C_{11} = 80/86 = 0{,}9302$:

$$D = \begin{pmatrix} 0{,}9412 & 0{,}0381 & 0{,}0260 \\ 0{,}0353 & 0{,}9048 & 0{,}0649 \\ 0{,}0235 & 0{,}0571 & 0{,}9091 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}2326 & 0{,}0777 & 0{,}0513 \\ 0{,}0698 & 0{,}3398 & 0{,}0897 \\ 0{,}0349 & 0{,}0485 & 0{,}3205 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}9302 & 0{,}0291 & 0{,}0256 \\ 0{,}0465 & 0{,}9223 & 0{,}0769 \\ 0{,}0233 & 0{,}0485 & 0{,}8974 \end{pmatrix}.$$

Отраслевая технология (уравнение (16)):

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 0{,}2228 & 0{,}0821 & 0{,}0577 \\ 0{,}0798 & 0{,}3152 & 0{,}1055 \\ 0{,}0421 & 0{,}0636 & 0{,}2954 \end{pmatrix}, \quad A_{ll} = \begin{pmatrix} 0{,}2224 & 0{,}0873 & 0{,}0600 \\ 0{,}0736 & 0{,}3133 & 0{,}1038 \\ 0{,}0412 & 0{,}0654 & 0{,}2977 \end{pmatrix},$$

$$L_{pp} = \begin{pmatrix} 1{,}3113 & 0{,}1695 & 0{,}1328 \\ 0{,}1671 & 1{,}5025 & 0{,}2386 \\ 0{,}0934 & 0{,}1457 & 1{,}4488 \end{pmatrix}, \quad L_{ll} = \begin{pmatrix} 1{,}3104 & 0{,}1798 & 0{,}1386 \\ 0{,}1542 & 1{,}4983 & 0{,}2347 \\ 0{,}0912 & 0{,}1500 & 1{,}4539 \end{pmatrix}.$$

Конечный спрос в секторном разрезе $y' = D\,y = (53{,}197;\ 56{,}299;\ 44{,}504)^\top$. Точно выполняются $L_{pp}\,y = x$ и $L_{ll}\,y' = g$.

Продуктовая технология (уравнение (17)):

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}0773 & -0{,}0325 & -0{,}0280 \\ -0{,}0522 & 1{,}0907 & -0{,}0920 \\ -0{,}0251 & -0{,}0582 & 1{,}1200 \end{pmatrix},$$

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 0{,}2452 & 0{,}0742 & 0{,}0438 \\ 0{,}0552 & 0{,}3631 & 0{,}0673 \\ 0{,}0270 & 0{,}0332 & 0{,}3535 \end{pmatrix}, \quad A_{ll} = \begin{pmatrix} 0{,}2473 & 0{,}0713 & 0{,}0434 \\ 0{,}0607 & 0{,}3621 & 0{,}0657 \\ 0{,}0292 & 0{,}0327 & 0{,}3525 \end{pmatrix},$$

$$L_{pp} = \begin{pmatrix} 1{,}3405 & 0{,}1617 & 0{,}1076 \\ 0{,}1227 & 1{,}5936 & 0{,}1742 \\ 0{,}0623 & 0{,}0885 & 1{,}5603 \end{pmatrix}, \quad L_{ll} = \begin{pmatrix} 1{,}3452 & 0{,}1557 & 0{,}1059 \\ 0{,}1350 & 1{,}5915 & 0{,}1706 \\ 0{,}0674 & 0{,}0873 & 1{,}5577 \end{pmatrix}.$$

$L_{pp}\,y = x$ точно; $L_{ll}\,y' = (85{,}037;\ 104{,}372;\ 77{,}824)^\top \approx g$.

Институциональные/функциональные таблицы $Z = A \cdot \mathrm{diag}(x)$, товар $\times$ товар:

$$Z^{\text{отрасл.}} = \begin{pmatrix} 18{,}9 & 8{,}6 & 4{,}4 \\ 6{,}8 & 33{,}1 & 8{,}1 \\ 3{,}6 & 6{,}7 & 22{,}7 \end{pmatrix}, \qquad Z^{\text{продукт.}} = \begin{pmatrix} 20{,}8 & 7{,}8 & 3{,}4 \\ 4{,}7 & 38{,}1 & 5{,}2 \\ 2{,}3 & 3{,}5 & 27{,}2 \end{pmatrix};$$

в обоих случаях сумма строки $+\,y$ даёт $x = (85;\ 105;\ 77)$.

Асимметрия при продуктовой технологии

По товарам L_{pp} всегда точно воспроизводит вектор x. По секторам $y' = D\,y$ формируется из матрицы рыночных долей и пересчитывается с выведенной из C^{-1} матрицей A_{ll}; при продуктовой технологии эти два шага точно не согласуются. Отклонение от g (здесь около ± 1) является структурным свойством, а не погрешностью вычислений.

Указание по работе

Работа с вкладкой 4: *Загрузить данные из датабокса* (Make-Use пример 1 или 2) или задать структуру и ввести U, V, y либо загрузить их как CSV. Выбрать предположение о технологии, *Рассчитать*. Результат: D, B, C, A_{ii}, A_{ll}, обратные матрицы Леонтьева, институциональные/функциональные таблицы.

6. Вкладка 5 — вывод натурально-стоимостного баланса

6.1. Основная идея

Как и на вкладке 3, товары разбиваются на N_1 (детально) и N_2 (как *остаточное производство*). Секторная разбивка сохраняется для N_1; N_2 сводится по каждому сектору в один столбец остаточного производства.

Таблица А (схема затраты–выпуск, вариант 1): строки N_1 по каждому сектору k полностью в натуральных единицах, а также для каждого сектора l

$$\text{Ост.произв.}_{ikl} = \sum_{j \in N_2} X_{ijkl}. \tag{18}$$

Таблица В (натурально-стоимостной баланс): те же строки N_1, просуммированные по секторам k (принцип М4):

$$X_{i,jl} = \sum_k X_{ijkl}, \qquad \text{Ост.произв.}_{il} = \sum_k \text{Ост.произв.}_{ikl}, \qquad X_i = \sum_k X_{ik}. \tag{19}$$

Строки секторов (в стоимостном выражении, сумма по *всем* товарам с ценами p_{ik}):

$$\text{Сектор}_k[j,l] = \sum_{i=1}^{n} p_{ik}\, X_{ijkl}. \tag{20}$$

6.2. Этапы расчёта для примера 1 при $N_1 = \{1,2,3\}$, ценах $p_{ik} = 1$

Шаг 1 — таблица А. Строка G1-B1: поставки в G1–G3 в секторах 1 и 2 без изменений $(20,\ 20,\ 0 \mid 30,\ 20,\ 0)$; остаточное производство сектор 1 $= X_{1,4,1,1} + X_{1,5,1,1} = 1 + 4 = 5$, сектор 2 $= 0$. Строка G2-B1: остаточное производство сектор 2 $= 2 + 0{,}5 = 2{,}5$. Строка G3-B2: остаточное производство сектор 1 $= 25 + 0 = 25$, сектор 2 $= 3 + 2 = 5$. Строка сектора 1, столбец G1-B1 по уравнению (20): $1 \cdot 20 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 27$.

	G1B1	G2B1	G3B1	G1B2	G2B2	G3B2	Ост.B1	Ост.B2	Y	X
G1-B1	20	20	0	30	20	0	5	0	20	115
G2-B1	0	14	0	0	6	10	0	2,5	20	52,5
G3-B1	0	0	20	0	0	20	0	5	50	95
G1-B2	0	20	0	100	40	0	0	0	25	185
G2-B2	0	0	0	0	10	10	0	0	27,5	47,5
G3-B2	0	0	25	0	0	25	25	5	45	125
Сектор 1	27	34	20	30	31	40	11	37,5	100	330,5
Сектор 2	10	25	32	109	56	45	37	5	122,5	441,5

Шаг 2 — таблица В (строки просуммированы по секторам), например товар 1 в G2-B1: $20 + 20 = 40$, в G1-B2: $30 + 100 = 130$, $X_1 = 115 + 185 = 300$:

	G1B1	G2B1	G3B1	G1B2	G2B2	G3B2	Ост.B1	Ост.B2	Y	X
G1	20	40	0	130	60	0	5	0	45	300
G2	0	14	0	0	16	20	0	2,5	47,5	100
G3	0	0	45	0	0	45	25	10	95	220
Сектор 1	27	34	20	30	31	40	11	37,5	100	330,5
Сектор 2	10	25	32	109	56	45	37	5	122,5	441,5

При $p_{ik} = 1$ суммы строк секторов равны 330,5 и 441,5 (= выпуск секторов из М9).

Указание по работе

Работа с вкладкой 5: *Загрузить данные из датабокса* (для примеров 1 и 2 задаёт $N_1 = \{1, 2, 3\}$), *Взять данные из вкладки 1* или собственные данные/CSV. Ввести цены p_{ik} по товарам и секторам или загрузить их как CSV (по умолчанию 1; шаблон со строкой заголовка G1-B1; G2-B1; …; столбцы сопоставляются по подписям, старые файлы с одной ценой на товар применяются ко всем секторам), *Рассчитать*, проверить N_1, *Создать таблицы* — даёт таблицу A, таблицу A (в ценах), таблицу B, а также матрицы коэффициентов и векторы.

7. Датабокс

- **Загрузка:** на вкладках 1, 3, 4 и 5 кнопка *Загрузить данные из датабокса* открывает список подходящих наборов данных — таблицы потоков для вкладок 1, 3 и 5, наборы выпуска и использования для вкладки 4. Статические наборы данных находятся в разделе «Ещё» и загружаются как n товаров с одним сектором ($Z = A\,\mathrm{diag}(X)$, $X = (I - A)^{-1}Y$).
- **Сохранение** (вкладка 1): с полной структурой (n, m, Z, Y) в поле `io4d`, а также A и Y размерности nm; метка «Четырёхмерная».
- **Экспорт** (управление датабоксом): CSV в формате IO-калькулятора (можно снова загрузить), Excel с листами Z или U/V.
- Русские инструменты используют собственный датабокс (отдельно от немецкой и английской версий).

A. Глоссарий коэффициентов и величин

Символ	Значение
X_{ijkl}	поставка товара i из сектора k на производство товара j в секторе l
X_{ik}	валовой выпуск товара i в секторе k
Y_{ik}	конечный спрос на товар i из сектора k
a_{ijkl}	коэффициент затрат, $= X_{ijkl}/X_{jl}$ (ур. 2)
A, L	матрица коэффициентов и обратная матрица Леонтьева четырёхмерной модели
$\rho(A)$	спектральный радиус; $\rho < 1$ обеспечивает разрешимость и при суммах столбцов больше 1 (натуральные единицы)
w_{ijkl}	матрица весов: доля поставляющего сектора k в поставке товара i на использование (j, l)
p_{ik}	цена товара i из сектора k
A^p, X^p	матрица коэффициентов и валовой выпуск в ценах
M1–M9	варианты модели в зависимости от сохраняемого классификационного признака (вкладка 2)
d_{jl}	доля сектора l в производстве товара j, $= X_{jl}/X_{j\cdot}$
N_1, N_2	непересекающиеся подмножества товаров (вкладки 3 и 5)
Y^*_{ik}	модифицированный конечный спрос частичной таблицы (ур. 9)
P^*_{jl}	первичные затраты частичной таблицы из другой группы (ур. 10)
U_{il}, V_{ki}	матрица использования и матрица выпуска (вкладка 4)
x_i, g_k	выпуск товаров и секторов (ур. 12)
D, B, C	матрица рыночных долей, коэффициентов использования и структуры производства (вкладка 4)
A_{ii}, A_{ll}	матрица коэффициентов товар×товар или сектор×сектор при отраслевой или продуктовой технологии
Таблица A	схема затраты–выпуск, вариант 1: строки N_1 по секторам плюс остаточное производство (вкладка 5)
Таблица B	натурально-стоимостной баланс: таблица A, просуммированная по секторам (вкладка 5)
Ост.произв.$_{ikl}$	поставка из $(i, k) \in N_1$ в N_2 в секторе l (ур. 18)
Сектор$_k$	строка сектора в стоимостном выражении, сумма по всем товарам с ценовыми весами (ур. 20)

Литература

P. Fleissner, W. Böhme, H.-U. Brautzsch, J. Höhne, J. Siassi, K. Stark: *Input-Output-Analyse. Eine Einführung in Theorie und Anwendungen* [Анализ затраты–выпуск. Введение в теорию и приложения]. Springer-Verlag, Wien, New York 1993.