# Сетевое планирование

## МКП и PERT — критический путь и управление проектами

Теория, алгоритмы и интерактивный инструмент

Русский

**Вольфганг Бёме**

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25 октября 2026 г.

---

Полное введение с пошаговыми алгоритмами и разобранным примером

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

# Содержание

**1 Введение и мотивация** **2**

**2 Основные понятия** **2**

**3 МКП — Алгоритм** **3**
3.1 Прямой проход (ранние сроки) . . . . . 3
3.2 Обратный проход (поздние сроки) . . . . . 3
3.3 Критический путь и резервы . . . . . 3

**4 PERT — Три оценки времени** **4**

**5 Полный пример: программный проект** **4**
5.1 Прямой проход . . . . . 5
5.2 Обратный проход . . . . . 5
5.3 Сетевой граф . . . . . 6

**6 Описание инструмента** **6**
6.1 Ввод данных . . . . . 6
6.2 Методы . . . . . 6
6.3 Результаты . . . . . 6

**7 Итоги** **7**

# 1. Введение и мотивация

**Сетевое планирование** — это инструмент управления сложными проектами, в которых множество работ выполняется параллельно или последовательно. Цель — определить **критический путь**: последовательность работ, задержка которых откладывает весь проект.

**Типичные применения**

- Строительные проекты: планирование этапов строительства
- Разработка программного обеспечения: задачи и зависимости между ними
- Производство: последовательность технологических операций
- Организация мероприятий: подготовка конференций, выставок

# 2. Основные понятия

**Определение: Сетевой план**

**Сетевой план** — ориентированный граф, в котором:

- **Узлы (работы)** — отдельные задачи проекта с продолжительностью $d_i$
- **Дуги** — зависимости: стрелка из $A$ в $B$ означает, что $B$ может начаться только после завершения $A$

**Временны́е характеристики работы**

Для каждой работы $i$ определяются:

- $ES_i$ — **ранний старт** (Earliest Start)
- $EF_i = ES_i + d_i$ — **раннее окончание** (Earliest Finish)
- $LS_i$ — **поздний старт** (Latest Start)
- $LF_i = LS_i + d_i$ — **позднее окончание** (Latest Finish)
- $TF_i = LS_i - ES_i$ — **общий резерв** (Total Float)
- $FF_i$ — **свободный резерв** (Free Float)

**Определение: Критический путь**

**Критический путь** — путь от начала до конца проекта с наибольшей суммарной продолжительностью. Работы на критическом пути имеют **общий резерв = 0**: любая задержка откладывает весь проект.

# 3. МКП — Алгоритм

## 3.1. Прямой проход (ранние сроки)

**Алгоритм: Прямой проход МКП**

1. Для начальной работы: $ES = 0$.
2. Для каждой работы $j$: $ES_j = \max_{i \in \text{предш.}(j)} EF_i$.
3. $EF_j = ES_j + d_j$.
4. Обрабатывать в топологическом порядке.

Результат: продолжительность проекта $T = \max_i EF_i$.

## 3.2. Обратный проход (поздние сроки)

**Алгоритм: Обратный проход МКП**

1. Для конечных работ: $LF = T$ (продолжительность проекта).
2. Для каждой работы $i$ (в обратном порядке): $LF_i = \min_{j \in \text{посл.}(i)} LS_j$.
3. $LS_i = LF_i - d_i$.
4. Общий резерв: $TF_i = LS_i - ES_i$.

## 3.3. Критический путь и резервы

**Резервы времени**

- **Общий резерв:** $TF_i = LS_i - ES_i = LF_i - EF_i$
  Время, на которое можно задержать работу без задержки проекта.
- **Свободный резерв:** $FF_i = \min_{j \in \text{посл.}(i)} ES_j - EF_i$
  Время задержки без изменения ранних сроков последующих работ.

- **Критическая работа:** $TF_i = 0$.

# 4. PERT — Три оценки времени

**PERT-оценка**

При неопределённой продолжительности используются три оценки:

- $a$ — **оптимистичная** (минимальная продолжительность)
- $m$ — **наиболее вероятная**
- $b$ — **пессимистичная** (максимальная продолжительность)

**Ожидаемая продолжительность:**

$$\mu = \frac{a + 4m + b}{6}$$

**Дисперсия:**

$$\sigma^2 = \left(\frac{b - a}{6}\right)^2$$

**Теорема о продолжительности проекта (PERT)**

Продолжительность проекта $T$ (сумма по критическому пути) имеет **нормальное распределение** (при достаточном числе работ):

$$T \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i \in \text{кр. путь}} \mu_i, \sum_{i \in \text{кр. путь}} \sigma_i^2\right)$$

Вероятность завершения до срока $T_0$:

$$P(T \leq T_0) = \Phi\left(\frac{T_0 - \mu_T}{\sigma_T}\right)$$

# 5. Полный пример: программный проект

**Программный проект: 7 работ**

| ID | Название | Длит. | Предш. |
|---|---|---|---|
| A | Анализ требований | 3 | — |
| B | Проектирование БД | 4 | A |
| C | Разработка UI | 5 | A |
| D | Разработка Backend | 6 | B |
| E | Тестирование | 3 | C, D |
| F | Документация | 2 | C |
| G | Развёртывание | 2 | E, F |

## 5.1. Прямой проход

| ID | Название | Длит. | ES | EF | Предш. EF |
|---|---|---|---|---|---|
| A | Анализ | 3 | 0 | 3 | — |
| B | Проект. БД | 4 | 3 | 7 | EF(A)=3 |
| C | UI | 5 | 3 | 8 | EF(A)=3 |
| D | Backend | 6 | 7 | 13 | EF(B)=7 |
| E | Тестирование | 3 | 13 | 16 | max(EF(C)=8, EF(D)=13) |
| F | Документация | 2 | 8 | 10 | EF(C)=8 |
| G | Развёртывание | 2 | 16 | 18 | max(EF(E)=16, EF(F)=10) |

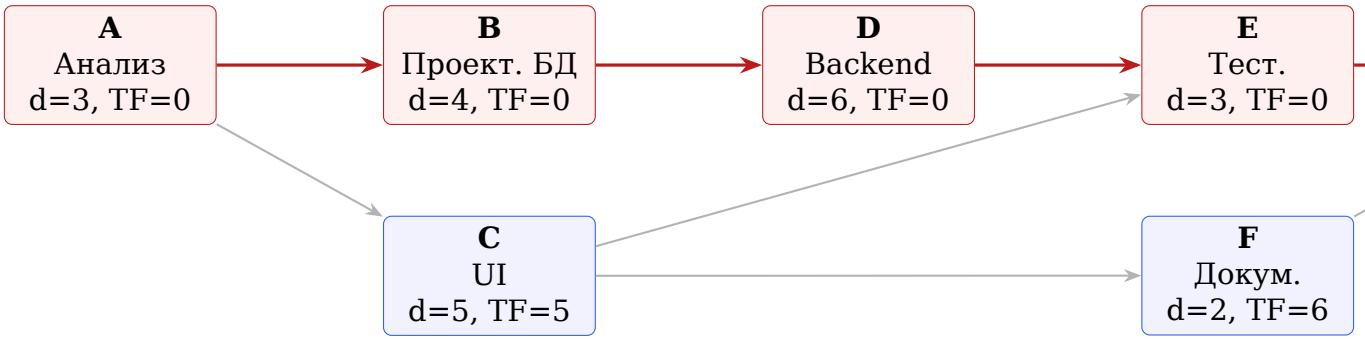
**Продолжительность проекта:** $T = 18$ **единиц времени.**

## 5.2. Обратный проход

| ID | Название | EF | LF | LS | TF | Крит.? |
|---|---|---|---|---|---|---|
| G | Развёртывание | 18 | 18 | 16 | 0 | Да |
| E | Тестирование | 16 | 16 | 13 | 0 | Да |
| F | Документация | 10 | 16 | 14 | 6 | Нет |
| D | Backend | 13 | 13 | 7 | 0 | Да |
| C | UI | 8 | 13 | 8 | 5 | Нет |
| B | Проект. БД | 7 | 7 | 3 | 0 | Да |
| A | Анализ | 3 | 3 | 0 | 0 | Да |

**Критический путь:** **A → B → D → E → G** (18 единиц времени)

### 5.3. Сетевой граф




## 6. Описание инструмента

**Сетевое планирование — Интерактивный инструмент**

Инструмент вычисляет критический путь (МКП и PERT) и визуализирует сетевой граф.

### 6.1. Ввод данных

Для каждой работы указываются:

- **ID** — уникальный идентификатор
- **Название** — описание работы
- **Длительность** (МКП) или **три оценки** a, m, b (PERT)
- **Предшественники** — список ID предшествующих работ (через запятую)

### 6.2. Методы

- **МКП:** классический критический путь — детерминированные длительности.
- **PERT:** три оценки времени — вероятностная продолжительность.
- **МКП + PERT:** совместный анализ обоими методами.

### 6.3. Результаты

- **Сетевой граф:** критические работы выделены красным, остальные — синим.
- **Сводная таблица:** ES, EF, LS, LF, TF, FF для каждой работы.
- **PERT-распределение:** кривая вероятности продолжительности проекта.

# 7. Итоги

**Ключевые положения: Сетевое планирование**

1. **Критический путь** — наидлиннейший путь от старта до финиша; задержка любой критической работы задерживает весь проект.
2. **Прямой проход:** вычисляет ранние сроки ($ES$, $EF$) слева направо.
3. **Обратный проход:** вычисляет поздние сроки ($LS$, $LF$) справа налево.
4. **Общий резерв** $TF_i = LS_i - ES_i$: насколько можно задержать работу без задержки проекта.
5. **Критическая работа:** $TF_i = 0$.
6. **PERT** учитывает неопределённость: $\mu = (a + 4m + b)/6$, $\sigma^2 = ((b - a)/6)^2$.
7. Продолжительность проекта по PERT распределена нормально (ЦПТ).

---