Value-at-Risk (VaR)

Теоретические основы и методы расчёта

Риск-менеджмент в финансовой сфере

Русский

Вольфганг Бёме

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

7 ноября 2026 г.

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

Содержание

1 Введение в Value-at-Risk **2**
1.1 Определение . . . 2
1.2 Историческое развитие . . . 2
1.3 Ключевые параметры . . . 2

2 Ковариационный метод (параметрический подход) **3**
2.1 Основной принцип . . . 3
2.2 Математический вывод . . . 3
2.2.1 Шаг 1: распределение доходностей . . . 3
2.2.2 Шаг 2: квантиль нормального распределения . . . 3
2.2.3 Шаг 3: формула VaR . . . 3
2.3 Портфельный анализ . . . 3
2.4 Преимущества и недостатки . . . 4

3 Историческое моделирование **5**
3.1 Основной принцип . . . 5
3.2 Этапы расчёта . . . 5
3.3 Математическая формулировка . . . 5
3.4 Преимущества и недостатки . . . 6

4 Моделирование Монте-Карло **8**
4.1 Основной принцип . . . 8
4.2 Этапы расчёта . . . 8
4.3 Стохастическая модель . . . 8
4.4 Коррелированные факторы риска . . . 8
4.5 Преимущества и недостатки . . . 9

5 Expected Shortfall (CVaR) **10**
5.1 Определение и мотивация . . . 10
5.2 Расчёт . . . 10
5.3 Преимущества перед VaR . . . 10

6 Сравнение методов **10**

7 Ограничения VaR **11**
7.1 Отсутствие субаддитивности . . . 11
7.2 «Слепота» к хвостам . . . 11
7.3 Проциклличность . . . 11

8 Практический пример: валютный портфель **11**
8.1 Исходные данные . . . 11
8.2 Расчёт (ковариационный метод) . . . 12
8.3 Интерпретация . . . 12

9 Рекомендуемая литература **13**

1 Введение в Value-at-Risk

1.1 Определение

Value-at-Risk (VaR) — это статистическая мера риска, которая определяет максимальный убыток портфеля или отдельной позиции в течение заданного периода времени с определённой вероятностью (уровнем доверия).

Формально: VaR при уровне доверия α определяет пороговое значение, которое не будет превышено с вероятностью α; вероятность превышения составляет $(1 - \alpha)$.

$$P(\text{Убыток} > \text{VaR}) = 1 - \alpha \tag{1}$$

Пример

VaR в 1 миллион EUR при уровне доверия 99 % и периоде удержания 10 дней означает: с вероятностью 99 % убыток в течение следующих 10 дней не превысит 1 миллион EUR.

1.2 Историческое развитие

Концепция VaR была разработана в 1990-х годах в J.P. Morgan и популяризирована через систему RiskMetrics. После Базельского соглашения (Basel II/III) VaR стал регуляторным стандартом для банков при определении требуемого капитала для покрытия рыночных рисков.

1.3 Ключевые параметры

Три параметра определяют каждый VaR:

Уровень доверия (α)
: Типично 95 % или 99 %. Более высокий уровень доверия приводит к более высокому VaR.

Период удержания (T)
: Временной горизонт оценки риска. Для торговых портфелей обычно 1–10 дней, для стратегических позиций — дольше.

Стоимость позиции
: Рыночная стоимость рассматриваемой позиции или портфеля.

2 Ковариационный метод (параметрический подход)

2.1 Основной принцип

Ковариационный метод (также называемый дельта-нормальным методом) основан на предположении, что доходности нормально распределены. VaR рассчитывается аналитически из волатильности и соответствующего квантиля стандартного нормального распределения.

2.2 Математический вывод

2.2.1 Шаг 1: распределение доходностей

Предположение: логарифмические доходности r следуют нормальному распределению:

$$r \sim N(\mu, \sigma^2) \tag{2}$$

где μ — математическое ожидание (часто принимается равным 0 для коротких периодов), а σ — стандартное отклонение (волатильность).

2.2.2 Шаг 2: квантиль нормального распределения

α-квантиль стандартного нормального распределения z_α определяет критическое значение:

$$z_{0,95} = 1{,}645 \qquad z_{0,99} = 2{,}326 \tag{3}$$

2.2.3 Шаг 3: формула VaR

Для позиции стоимостью V и дневной волатильностью σ:

$$\boxed{\text{VaR} = V \times \sigma \times z_\alpha \times \sqrt{T}} \tag{4}$$

Множитель $\sqrt{T}$ (корень из периода удержания) масштабирует дневную волатильность на требуемый временной период (правило квадратного корня из времени).

2.3 Портфельный анализ

Для портфеля из n позиций ковариационный метод учитывает корреляции между позициями:

$$\sigma^2_{\text{портфеля}} = \sum_i \sum_j w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \tag{5}$$

В матричной форме:

$$\sigma^2_{\text{портфеля}} = \mathbf{w}' \mathbf{\Sigma} \mathbf{w} \tag{6}$$

где $\mathbf{w}$ — вектор весов, $\mathbf{\Sigma}$ — ковариационная матрица, а ρ_{ij} — корреляция между позициями i и j.

2.4 Преимущества и недостатки

Преимущества:

- Простой и быстрый расчёт
- Аналитическое замкнутое решение
- Учёт корреляций для портфелей
- Хорошо подходит для линейных факторов риска

Недостатки:

- Предположение о нормальном распределении часто нереалистично (тяжёлые хвосты)
- Недооценивает экстремальные убытки
- Не подходит для нелинейных инструментов (опционов)
- Волатильность и корреляции могут меняться во времени

3 Историческое моделирование

3.1 Основной принцип

Историческое моделирование — это непараметрический подход, который не делает предположений о распределении доходностей. Вместо этого используется эмпирическое распределение исторических доходностей для оценки потенциальных будущих убытков.

3.2 Этапы расчёта

1. **Сбор данных:** собрать исторические доходности за определённый период (например, 250 торговых дней)
2. **Переоценка портфеля:** рассчитать гипотетическую стоимость портфеля для каждой исторической доходности
3. **Распределение прибылей/убытков:** построить распределение гипотетических прибылей и убытков
4. **Сортировка:** отсортировать результаты от наибольшего убытка до наибольшей прибыли
5. **Определение квантиля:** VaR соответствует $(1-\alpha)$-квантилю отсортированных убытков

3.3 Математическая формулировка

Пусть имеется n исторических дней наблюдения. Для каждой позиции j (стоимость V_j в базовой валюте, $V = \sum_j V_j$) обозначим через r_{ij} дневную логарифмическую доходность соответствующего фактора риска (например, валютного курса) в день i.

Шаг 1 — масштабирование на период удержания. Дневная доходность масштабируется на T дней по правилу квадратного корня из времени, и портфель переоценивается:

$$V_i = \sum_j V_j \cdot \exp\left(r_{ij}\sqrt{T}\right), \qquad i = 1, \ldots, n \tag{7}$$

Шаг 2 — убытки. Гипотетический убыток (прибыль — отрицательный убыток) и доходность за период удержания:

$$L_i = V - V_i, \qquad R_i^{(T)} = \frac{V_i - V}{V} = -\frac{L_i}{V} \tag{8}$$

Шаг 3 — сортировка. Убытки сортируются по убыванию: $L_{(1)} \geq L_{(2)} \geq \ldots \geq L_{(n)}$. $L_{(1)}$ — наихудший сценарий (ранг 1).

Шаг 4 — VaR. При

$$k = \lfloor n \cdot (1-\alpha) \rfloor \tag{9}$$

граница квантиля лежит между рангом k и рангом $k+1$ (при $n = 250$, $\alpha = 99\,\%$: $n(1-\alpha) = 2{,}5$). Исторический VaR равен среднему этих двух рангов:

$$\boxed{\mathrm{VaR}_{\alpha}^{\mathrm{hist}} = \frac{L_{(k)} + L_{(k+1)}}{2}} \qquad (k \geq 1) \tag{10}$$

Если $k = 0$ (слишком мало наблюдений для данного уровня доверия), используется наихудший сценарий: $\mathrm{VaR} = L_{(1)}$.

Шаг 5 — Expected Shortfall. ES равен среднему k наихудших убытков, т. е. всех сценариев за границей квантиля:

$$\boxed{\mathrm{ES}_{\alpha}^{\mathrm{hist}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} L_{(i)}} \qquad (k \geq 1;\ \text{иначе ES} = L_{(1)}) \tag{11}$$

Числовой пример из FX-VaR-калькулятора

Портфель: 100 000 USD, 50 000 GBP и 200 000 CNY; базовая валюта EUR, стоимость портфеля $V = 176\,049$ EUR; демонстрационные данные, $n = 250$ дней; $\alpha = 99\,\%$; $T = 10$ дней.

$k = \lfloor 250 \cdot 0{,}01 \rfloor = \lfloor 2{,}5 \rfloor = 2$

Ранг	Доходность 10 дн.	Убыток (EUR)	
1	−3,321 %	5 847	ES
2	−3,268 %	5 754	ES, VaR
3	−2,773 %	4 882	VaR

$$\mathrm{VaR}_{99\%,10\text{д}} = \frac{L_{(2)} + L_{(3)}}{2} = \frac{5\,754 + 4\,882}{2} = \mathbf{5\,318\ EUR}$$

$$\mathrm{ES}_{99\%,10\text{д}} = \frac{L_{(1)} + L_{(2)}}{2} = \frac{5\,847 + 5\,754}{2} \approx \mathbf{5\,800\ EUR}^{1}$$

Проверка: $2{,}773\,\% \times 176\,049$ EUR $\approx 4\,882$ EUR.

3.4 Преимущества и недостатки

Преимущества:

- Не требует предположений о распределении
- Автоматически учитывает тяжёлые хвосты и асимметрию
- Неявный учёт корреляций

[1] Расхождения в последнем знаке объясняются округлением отдельных убытков.

- Интуитивно понятен и легко объясним

Недостатки:

- Зависит от качества и длины исторических данных
- Предположение: прошлое репрезентативно для будущего
- Не может предвидеть структурные изменения рынка
- Эффект «призрака» (ghost effect): экстремальные события выпадают из расчёта через T дней

4 Моделирование Монте-Карло

4.1 Основной принцип

Моделирование Монте-Карло генерирует большое количество случайных сценариев на основе стохастической модели. Это наиболее гибкий метод VaR, способный оценивать сложные портфели с нелинейными инструментами.

4.2 Этапы расчёта

1. **Спецификация модели:** выбрать стохастическую модель для факторов риска (например, геометрическое броуновское движение)
2. **Оценка параметров:** оценить параметры по историческим данным (дрейф, волатильность, корреляции)
3. **Генерация случайных чисел:** сгенерировать коррелированные случайные числа (например, с помощью разложения Холецкого)
4. **Генерация сценариев:** симулировать n траекторий цен (типично: 10 000 – 100 000)
5. **Оценка портфеля:** оценить стоимость портфеля для каждого сценария
6. **Определение VaR:** определить $(1-\alpha)$-квантиль симулированных убытков

4.3 Стохастическая модель

Наиболее распространённая модель — геометрическое броуновское движение (GBM):

$$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dW \tag{12}$$

В дискретной форме для временного шага Δt:

$$S(t+\Delta t) = S(t) \times \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \times \varepsilon\right] \tag{13}$$

где $\varepsilon \sim N(0,1)$ — стандартная нормально распределённая случайная величина.

4.4 Коррелированные факторы риска

Для множества коррелированных факторов риска используется разложение Холецкого:

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{L} \times \mathbf{L}' \tag{14}$$

где $\mathbf{L}$ — нижняя треугольная матрица. Коррелированные случайные числа генерируются как:

$$\mathbf{z}_{\text{коррел}} = \mathbf{L} \times \mathbf{z}_{\text{независ}} \tag{15}$$

4.5 Преимущества и недостатки

Преимущества:

- Максимальная гибкость в выборе модели
- Подходит для нелинейных инструментов (опционов, деривативов)
- Может моделировать сложные структуры зависимостей
- Позволяет проводить сценарный анализ и стресс-тесты

Недостатки:

- Высокие вычислительные затраты
- Модельный риск: результаты сильно зависят от выбранной модели
- Ошибка выборки при недостаточном количестве симуляций
- Сложная реализация и валидация

5 Expected Shortfall (CVaR)

5.1 Определение и мотивация

Expected Shortfall (ES), также называемый Conditional Value-at-Risk (CVaR), — это когерентная мера риска, устраняющая недостатки VaR. Он показывает ожидаемый убыток при условии, что убыток превышает VaR.

Математически:

$$\mathrm{ES}_\alpha = E[\text{Убыток} \mid \text{Убыток} > \mathrm{VaR}_\alpha] \tag{16}$$

$$\mathrm{ES}_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \times \int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_u \, du \tag{17}$$

5.2 Расчёт

При нормальном распределении:

$$\mathrm{ES}_\alpha = \sigma \times \frac{\varphi(z_\alpha)}{1-\alpha} \tag{18}$$

где $\varphi(z)$ — функция плотности стандартного нормального распределения.

При историческом моделировании ES равен среднему $k = \lfloor n(1-\alpha) \rfloor$ наихудших убытков (определение и числовой пример см. в разделе 3.3):

$$\mathrm{ES} = \frac{1}{k} \times \sum_{i=1}^{k} L_{(i)} \tag{19}$$

В примере ($n = 250$, $\alpha = 99\,\%$, $k = 2$) получаем ES $= (5\,847 + 5\,754)/2 \approx 5\,800$ EUR при VaR 5 318 EUR.

5.3 Преимущества перед VaR

- **Когерентная мера риска:** удовлетворяет субаддитивности ($\mathrm{ES}(A+B) \leq \mathrm{ES}(A) + \mathrm{ES}(B)$)
- **Хвостовой риск:** учитывает серьёзность экстремальных убытков, а не только их частоту
- **Регулирование:** Basel III постепенно заменяет VaR на ES для рыночного риска
- **Выпуклость:** позволяет эффективную оптимизацию портфеля

6 Сравнение методов

Следующая таблица обобщает основные характеристики трёх методов VaR:

Критерий	**Ковариационный**	**Ист. моделирование**	**Монте-Карло**
Распределение	Нормальное	Нет (эмпирическое)	Выбираемое
Выч. затраты	Низкие	Средние	Высокие
Тяжёлые хвосты	Не учитывает	Учитывает	Зависит от модели
Нелинейные инстр.	Не подходит	Условно подходит	Хорошо подходит
Реализация	Простая	Простая	Сложная
Модельный риск	Средний	Низкий	Высокий

Таблица 1: Сравнение трёх методов VaR

7 Ограничения VaR

Несмотря на широкое распространение, VaR имеет фундаментальные недостатки:

7.1 Отсутствие субаддитивности

VaR не является когерентной мерой риска, так как не субаддитивен. В редких случаях $\mathrm{VaR}(A+B) > \mathrm{VaR}(A) + \mathrm{VaR}(B)$, что как бы «наказывает» диверсификацию.

7.2 «Слепота» к хвостам

VaR ничего не говорит о серьёзности убытков за пределами порогового значения. Два портфеля с одинаковым VaR могут иметь совершенно разные хвостовые риски.

7.3 Проциклличность

В кризисные периоды VaR растёт, что может приводить к давлению продаж и усугублению кризиса. Такое проциклличное поведение может усиливать системные риски.

8 Практический пример: валютный портфель

Рассмотрим пример расчёта VaR для валютной позиции:

8.1 Исходные данные

- Позиция: 1 000 000 USD против UZS
- Текущий курс: 12 500 UZS/USD
- Дневная волатильность: $\sigma = 0{,}3\,\%$ (на основе исторических данных)
- Уровень доверия: 99 %
- Период удержания: 10 дней

8.2 Расчёт (ковариационный метод)

Стоимость позиции в UZS:

$$V = 1\,000\,000 \times 12\,500 = 12\,500\,000\,000 \text{ UZS} \tag{20}$$

Расчёт VaR:

$$\begin{aligned} \mathrm{VaR}_{99\%,10\text{д}} &= V \times \sigma \times z_{0,99} \times \sqrt{10} && (21)\\ &= 12\,500\,000\,000 \times 0{,}003 \times 2{,}326 \times 3{,}162 && (22)\\ &\approx 276\,000\,000 \text{ UZS} && (23) \end{aligned}$$

8.3 Интерпретация

С вероятностью 99 % убыток по данной позиции в USD в течение следующих 10 торговых дней не превысит 276 миллионов UZS. Иначе говоря: только в 1 % случаев (примерно 2,5 дня в год) следует ожидать более высоких убытков.

9 Рекомендуемая литература

- Jorion, P. (2007): *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. 3rd Edition, McGraw-Hill.
- Hull, J.C. (2018): *Risk Management and Financial Institutions*. 5th Edition, Wiley.
- McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P. (2015): *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press.
- Basel Committee on Banking Supervision (2019): *Minimum capital requirements for market risk*. BIS.
- Artzner, P. et al. (1999): Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance* 9(3), 203–228.

Конец документа
