Калькулятор оценки и рисков облигаций

Математические шаги расчёта

Русский

Вольфганг Бёме
wolfgang.boehme@economic-modeling.de
www.economic-modeling.de

25 октября 2026 г.

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

Содержание

1 Основные концепции **2**
1.1 Кривая доходности и дисконтирование 2
1.2 Интерполяция кривой доходности 2

2 Облигации с фиксированной ставкой **2**
2.1 Параметры облигации 2
2.2 Купонные выплаты 2
2.3 Текущая стоимость 3
2.4 Чистая цена и грязная цена 3
2.5 Дюрация Маколея 3
2.6 Модифицированная дюрация 3
2.7 DV01 (долларовая стоимость 01) 4
2.8 Выпуклость 4

3 Облигации с плавающей ставкой **4**
3.1 Параметры облигации 4
3.2 Форвардные ставки 4
3.3 Переменные купонные выплаты 5
3.4 Текущая стоимость 5
3.5 Накопленный процент 5

4 Бескупонные облигации **5**
4.1 Параметры облигации 5
4.2 Текущая стоимость 5
4.3 Чистая и грязная цена 6
4.4 Дюрация Маколея 6
4.5 Модифицированная дюрация 6
4.6 DV01 и выпуклость 6

5 Стоимость под риском (VaR) **6**
5.1 Два метода 6
5.2 Параметрический VaR 6
5.3 Эмпирический портфельный VaR с историческими данными 7
5.3.1 Структура исторических данных 7
5.3.2 Расчёт доходностей 7
5.3.3 Эмпирическая ковариационная матрица 8
5.3.4 Волатильности 8
5.3.5 Корреляции 8
5.3.6 Вектор чувствительностей 9
5.3.7 Портфельная дисперсия 9
5.3.8 Масштабирование на временной горизонт 10
5.3.9 Портфельный VaR 10
5.4 Расчёт Z-показателя 10

6 Статистический анализ **10**
6.1 Статистика денежных потоков 10
6.2 Ковариация между последовательными денежными потоками 11
6.3 Корреляция 11

7 Сценарный анализ **11**

8 Доходность к погашению (YTM) **11**

9 Замечания по реализации **12**
9.1 Численная стабильность 12
9.2 Управление кривыми доходности 12
9.3 Конвенция торговых дней 12

10 Пример расчёта 1: Облигация с фиксированной ставкой **12**
10.1 Дано 12
10.2 Расчёты 13

11 Пример расчёта 2: Облигация с плавающей ставкой **13**
11.1 Дано 13
11.2 Расчёты 13

12 Пример расчёта 3: Портфельный VaR с историческими данными (v3.2) **14**
12.1 Дано 14
12.2 Ковариационная матрица логарифмических доходностей . . 15
12.3 Вектор чувствительностей 15
12.4 Портфельная дисперсия и VaR 15

13 Сводка формул **16**

14 Литературные ссылки **16**

1 Основные концепции

1.1 Кривая доходности и дисконтирование

Кривая доходности $r(t)$ определяет процентную ставку для срока t. Для оценки используется непрерывное дисконтирование:

$$DF(t) = e^{-r(t) \cdot t} \tag{1}$$

где:

- $DF(t)$ = дисконтный фактор для срока t
- $r(t)$ = процентная ставка из кривой доходности для срока t
- t = время в годах

1.2 Интерполяция кривой доходности

Для сроков между опорными точками используется линейная интерполяция:

$$r(t) = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1} \cdot (t - t_1) \tag{2}$$

где $t_1 \leq t \leq t_2$ и r_1, r_2 – процентные ставки в точках t_1, t_2.

2 Облигации с фиксированной ставкой

2.1 Параметры облигации

- N = номинальная стоимость
- c = купон (годовая процентная ставка)
- T = срок в годах
- f = частота выплат (1=ежегодно, 2=раз в полгода, 4=ежеквартально, 12=ежемесячно)
- n = количество выплат = $\lfloor T \cdot f \rfloor$
- Δt = интервал выплат = $\frac{1}{f}$

2.2 Купонные выплаты

Купонная выплата за период составляет:

$$C = \frac{N \cdot c}{f} \tag{3}$$

Сроки выплат:

$$t_i = i \cdot \Delta t \quad \text{для } i = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

2.3 Текущая стоимость

Текущая стоимость состоит из суммы всех дисконтированных купонных выплат плюс дисконтированное погашение:

$$PV = \sum_{i=1}^{n} C \cdot DF(t_i) + N \cdot DF(t_n) \tag{5}$$

Развёрнутый вид:

$$PV = \sum_{i=1}^{n} C \cdot e^{-r(t_i) \cdot t_i} + N \cdot e^{-r(t_n) \cdot t_n} \tag{6}$$

2.4 Чистая цена и грязная цена

Чистая цена (без накопленных процентов):

$$\text{Clean Price} = \frac{PV}{N} \cdot 100\% \tag{7}$$

Накопленный процент:

$$AI = \frac{C \cdot d}{d_{\text{период}}} \tag{8}$$

где:

- d = дни с последней купонной выплаты
- $d_{\text{период}}$ = дни в одном периоде = $\frac{365}{f}$

Грязная цена (с накопленными процентами):

$$\text{Dirty Price} = \text{Clean Price} + \frac{AI}{N} \cdot 100\% \tag{9}$$

2.5 Дюрация Маколея

Дюрация Маколея измеряет средний срок связывания капитала:

$$D_{\text{Mac}} = \frac{1}{PV} \left[\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot C \cdot DF(t_i) + t_n \cdot N \cdot DF(t_n) \right] \tag{10}$$

2.6 Модифицированная дюрация

Модифицированная дюрация измеряет процентное изменение цены при изменении ставки:

$$D_{\text{Mod}} = \frac{D_{\text{Mac}}}{1 + \frac{\bar{r}}{f}} \tag{11}$$

где $\bar{r}$ – средняя процентная ставка (например, $r(T/2)$).

2.7 DV01 (долларовая стоимость 01)

DV01 измеряет абсолютное изменение стоимости при изменении ставки на 1 базисный пункт (0.01%):

$$DV01 = -\left[PV(r + 0.0001) - PV(r)\right] \tag{12}$$

Расчёт:

1. Увеличить все ставки в кривой на 1 б.п.: $r'(t) = r(t) + 0.0001$
2. Рассчитать PV' со сдвинутой кривой
3. $DV01 = -(PV' - PV)$

2.8 Выпуклость

Выпуклость измеряет кривизну отношения цена-ставка:

$$\text{Выпуклость} = \frac{PV^+ + PV^- - 2 \cdot PV}{PV \cdot (\Delta r)^2} \tag{13}$$

где:

- PV^+ = текущая стоимость при $r(t) + \Delta r$
- PV^- = текущая стоимость при $r(t) - \Delta r$
- $\Delta r = 0.0001$ (1 базисный пункт)

3 Облигации с плавающей ставкой

3.1 Параметры облигации

- N = номинальная стоимость
- s = спред над базовой ставкой (в базисных пунктах)
- T = срок в годах
- f = частота выплат
- n = количество выплат = $\lfloor T \cdot f \rfloor$

3.2 Форвардные ставки

Для каждого срока выплаты рассчитывается форвардная ставка из кривой доходности:

Первый период:

$$f_1 = r(t_1) \tag{14}$$

Последующие периоды:

$$f_i = \frac{DF(t_{i-1})/DF(t_i) - 1}{t_i - t_{i-1}} \tag{15}$$

Развёрнутый вид:

$$f_i = \frac{e^{-r(t_{i-1})\cdot t_{i-1}}/e^{-r(t_i)\cdot t_i} - 1}{t_i - t_{i-1}} \tag{16}$$

3.3 Переменные купонные выплаты

Купонная выплата за период i составляет:

$$C_i = \frac{N \cdot (f_i + s)}{f_{\text{freq}}} \tag{17}$$

где:

- f_i = форвардная ставка для периода i
- s = спред (в десятичной форме, например 150 б.п. = 0.015)
- f_{freq} = частота выплат

3.4 Текущая стоимость

$$PV = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot DF(t_i) + N \cdot DF(t_n) \tag{18}$$

3.5 Накопленный процент

Оценён по первой форвардной ставке:

$$AI = \frac{C_1 \cdot d}{d_{\text{период}}} \tag{19}$$

где $C_1 = \frac{N\cdot(f_1+s)}{f_{\text{freq}}}$

4 Бескупонные облигации

4.1 Параметры облигации

- N = номинальная стоимость / погашение
- T = остаточный срок в годах

4.2 Текущая стоимость

В бескупонных облигациях есть только одна выплата в конце:

$$PV = N \cdot DF(T) = N \cdot e^{-r(T)\cdot T} \tag{20}$$

4.3 Чистая и грязная цена

Так как купонных выплат нет:

$$\text{Clean Price} = \text{Dirty Price} = \frac{PV}{N} \cdot 100\% \tag{21}$$

$$\text{Накопленный процент} = 0 \tag{22}$$

4.4 Дюрация Маколея

Для бескупонных облигаций дюрация соответствует сроку:

$$D_{\text{Mac}} = T \tag{23}$$

4.5 Модифицированная дюрация

$$D_{\text{Mod}} = \frac{T}{1 + r(T)} \tag{24}$$

4.6 DV01 и выпуклость

Аналогично облигациям с фиксированной ставкой, но с только одной выплатой:

$$DV01 = -\left[N \cdot e^{-(r(T)+0.0001)\cdot T} - N \cdot e^{-r(T)\cdot T}\right] \tag{25}$$

$$\text{Выпуклость} = \frac{PV^{+} + PV^{-} - 2 \cdot PV}{PV \cdot (0.0001)^2} \tag{26}$$

5 Стоимость под риском (VaR)

5.1 Два метода

Калькулятор поддерживает два метода VaR:

1. **Параметрический VaR** – при ручном вводе кривой доходности
2. **Эмпирический портфельный VaR** – при исторических данных о ставках

5.2 Параметрический VaR

При ручном вводе кривой доходности используется:

$$VaR = z_{\alpha} \cdot \sigma_{\text{scaled}} \cdot 10000 \cdot |DV01| \tag{27}$$

где:

- z_α = Z-показатель для доверительного уровня α (например, 1.645 для 95%)
- σ_{scaled} = масштабированная волатильность
- $DV01$ = долларовая стоимость 01 (в EUR)

Масштабирование волатильности:

$$\sigma_{\text{scaled}} = \sigma_{\text{дневная}} \cdot \sqrt{\frac{h}{250}} \tag{28}$$

где:

- $\sigma_{\text{дневная}}$ = дневная волатильность ставок (в десятичной форме)
- h = временной горизонт в днях
- 250 = количество торговых дней в году

5.3 Эмпирический портфельный VaR с историческими данными

5.3.1 Структура исторических данных

CSV-файл содержит:

- Дата
- Процентные ставки для различных сроков (например, 3М, 6М, 1Г, 2Г, 3Г, 5Г, 7Г, 10Г)
- Минимум 250 наблюдений

5.3.2 Расчёт доходностей

Дневные доходности рассчитываются как **логарифмические доходности дисконтных факторов**:

$$\ell_{i,t} = \ln\left(\frac{DF_i(t)}{DF_i(t-1)}\right) = \ln\left(\frac{e^{-r_{i,t}\cdot\tau_i}}{e^{-r_{i,t-1}\cdot\tau_i}}\right) = -\tau_i \cdot \left(r_{i,t} - r_{i,t-1}\right) \tag{29}$$

где:

- i = индекс срока $(1, 2, \ldots, m)$
- t = временной индекс (день)
- τ_i = срок в годах для опорной точки i
- $r_{i,t}$ = процентная ставка для срока i в день t (непрерывная, десятичная)

Обоснование: Логарифмическая доходность дисконтного фактора непосредственно пропорциональна изменению текущей стоимости денежного потока. По сравнению с простым изменением ставки Δr, величина $\ell_{i,t}$ учитывает срок τ_i как естественный весовой коэффициент и лучше подходит для предположения о нормальном распределении.

5.3.3 Эмпирическая ковариационная матрица

Эмпирическая ковариация между сроками i и j рассчитывается как:

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\ell_{i,t} - \bar{\ell}_i\right)\left(\ell_{j,t} - \bar{\ell}_j\right) \tag{30}$$

где:

- T = количество наблюдений (доходностей)
- $\bar{\ell}_i$ = среднее значение логарифмических доходностей для срока i

Средние значения:

$$\bar{\ell}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\ell_{i,t} \tag{31}$$

Полная ковариационная матрица:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \cdots & \Sigma_{1m} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \cdots & \Sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{m1} & \Sigma_{m2} & \cdots & \Sigma_{mm} \end{pmatrix} \tag{32}$$

Единица измерения Σ_{ij}: $(\Delta \ln DF)^2$.

5.3.4 Волатильности

Волатильность для срока i:

$$\sigma_i = \sqrt{\Sigma_{ii}} \tag{33}$$

5.3.5 Корреляции

Корреляция между сроками i и j:

$$\rho_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j} \tag{34}$$

Матрица корреляций:

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1m} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{m1} & \rho_{m2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{35}$$

5.3.6 Вектор чувствительностей

Для каждой опорной точки i кривой доходности чувствительность рассчитывается как **взвешенный по текущей стоимости денежный поток**:

$$s_i = \sum_{k=1}^{n} CF_k \cdot DF(t_k) \cdot w_i(t_k) \tag{36}$$

где $w_i(t_k)$ – весовой коэффициент линейной интерполяции для срока выплаты t_k на опорную точку i:

$$w_i(t_k) = \begin{cases} 1 & \text{если } t_k = \tau_i \\ \dfrac{\tau_{i+1} - t_k}{\tau_{i+1} - \tau_i} & \text{если } \tau_i < t_k < \tau_{i+1} \\ \dfrac{t_k - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}} & \text{если } \tau_{i-1} < t_k < \tau_i \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \tag{37}$$

Экономический смысл: s_i соответствует изменению текущей стоимости при изменении $\ln DF(\tau_i)$ на единицу, то есть:

$$\frac{\partial PV}{\partial \ln DF(\tau_i)} \approx s_i \tag{38}$$

Вектор чувствительностей:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} \quad \text{(единица: EUR)} \tag{39}$$

Проверка согласованности: $\sum_{i=1}^{m} s_i = PV$ (сумма взвешенных чувствительностей равна текущей стоимости).

5.3.7 Портфельная дисперсия

Портфельная дисперсия (на дневной основе) рассчитывается как:

$$\sigma_P^2 = \mathbf{s}^T \boldsymbol{\Sigma}\, \mathbf{s} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} s_i \cdot \Sigma_{ij} \cdot s_j \tag{40}$$

Единицы согласованы: $[\text{EUR}]^2 \cdot [(\Delta \ln DF)^2]/[(\Delta \ln DF)^2] \to [\text{EUR}]^2$.
Портфельное стандартное отклонение:

$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_P^2} \quad \text{(единица: EUR/день)} \tag{41}$$

5.3.8 Масштабирование на временной горизонт

Поскольку σ_P рассчитана из **дневных** доходностей, правило квадратного корня применяется непосредственно к горизонту в торговых днях:

$$\sigma_{P,h} = \sigma_P \cdot \sqrt{h} \tag{42}$$

где h – временной горизонт в торговых днях.

Обоснование: Ковариационная матрица $\mathbf{\Sigma}$ выражена в единицах $(\Delta \ln DF)^2$ **на торговый день**. Деление на 250 потребовалось бы только в том случае, если бы σ_P была задана в годовых единицах – что здесь не так.

5.3.9 Портфельный VaR

Окончательный VaR рассчитывается как:

$$\boxed{VaR = z_\alpha \cdot \sigma_{P,h} = z_\alpha \cdot \sigma_P \cdot \sqrt{h}} \tag{43}$$

Единица – непосредственно EUR, поскольку $\mathbf{s}$ в EUR, а $\mathbf{\Sigma}$ безразмерна (в $(\Delta \ln DF)^2$).

5.4 Расчёт Z-показателя

Z-показатель рассчитывается через обратное нормальное распределение:

$$z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) \tag{44}$$

Примеры значений:

- 90% доверие: $z_{0.90} = 1.282$
- 95% доверие: $z_{0.95} = 1.645$
- 99% доверие: $z_{0.99} = 2.326$

6 Статистический анализ

6.1 Статистика денежных потоков

Даны денежные потоки $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Среднее значение:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} C_i \tag{45}$$

Дисперсия:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (C_i - \mu)^2 \tag{46}$$

Стандартное отклонение:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \tag{47}$$

6.2 Ковариация между последовательными денежными потоками

$$\text{Cov}(C_i, C_{i+1}) = (C_i - \mu)(C_{i+1} - \mu) \tag{48}$$

Средняя ковариация:

$$\bar{\text{Cov}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (C_i - \mu)(C_{i+1} - \mu) \tag{49}$$

6.3 Корреляция

$$\rho = \frac{\bar{\text{Cov}}}{\sigma^2} \tag{50}$$

7 Сценарный анализ

Для сценарного анализа вся кривая доходности сдвигается параллельно:

$$r'(t) = r(t) + \Delta r \tag{51}$$

где $\Delta r \in \{-50, -25, -10, 0, +10, +25, +50\}$ базисных пунктов.
Для каждого сценария рассчитывается:

- Новая текущая стоимость: PV'
- Абсолютное изменение: $\Delta PV = PV' - PV$
- Процентное изменение: $\frac{\Delta PV}{|PV|} \cdot 100\%$
- Новая чистая цена: $\frac{PV'}{N} \cdot 100\%$

8 Доходность к погашению (YTM)

Доходность к погашению – это внутренняя процентная ставка, которая приравнивает текущую стоимость к рыночной цене.

Для аппроксимации используется:

$$YTM \approx \bar{r} \tag{52}$$

где $\bar{r}$ – средняя процентная ставка кривой доходности (например, $r(T/2)$).

Примечание: Точный расчёт YTM требует итеративных методов (например, метод Ньютона-Рафсона), которые для сложных структур кривых доходности требуют значительных вычислений.

9 Замечания по реализации

9.1 Численная стабильность

- Все процентные ставки внутренне хранятся как десятичные числа (например, 3.5% = 0.035)
- Базисные пункты конвертируются делением на 10000
- Экспоненциальные функции используют $e^{-r \cdot t}$ для непрерывного дисконтирования

9.2 Управление кривыми доходности

- Линейная интерполяция между опорными точками
- Константная экстраполяция за пределами определённого диапазона
- Корректировки спреда добавляются после интерполяции

9.3 Конвенция торговых дней

Для расчётов VaR используется конвенция:

- 250 торговых дней в году
- 365 календарных дней для расчётов накопленных процентов

10 Пример расчёта 1: Облигация с фиксированной ставкой

10.1 Дано

- Номинальная стоимость: $N = 1\,000\,000$ EUR
- Купон: $c = 3.5\%$ год.
- Срок: $T = 5$ лет
- Частота: $f = 2$ (раз в полгода)
- Процентная ставка (постоянная): $r = 3.0\%$

10.2 Расчёты

Количество выплат:

$$n = \lfloor 5 \cdot 2 \rfloor = 10 \tag{53}$$

Купонная выплата:

$$C = \frac{1\,000\,000 \cdot 0.035}{2} = 17\,500 \text{ EUR} \tag{54}$$

Сроки выплат:

$$t_i = \{0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0\} \text{ лет} \tag{55}$$

Текущая стоимость (первые 3 выплаты + принципал):

$$\begin{aligned} PV = {} & 17\,500 \cdot e^{-0.03 \cdot 0.5} + 17\,500 \cdot e^{-0.03 \cdot 1.0} + \ldots \\ & + 17\,500 \cdot e^{-0.03 \cdot 5.0} + 1\,000\,000 \cdot e^{-0.03 \cdot 5.0} \end{aligned} \tag{56}$$

Численный результат:

$$PV \approx 1\,023\,186 \text{ EUR} \tag{57}$$

Чистая цена:

$$\text{Clean Price} = \frac{1\,023\,186}{1\,000\,000} \cdot 100\% = 102.32\% \tag{58}$$

11 Пример расчёта 2: Облигация с плавающей ставкой

11.1 Дано

- Номинальная стоимость: $N = 1\,000\,000$ EUR
- Спред: $s = 150$ б.п. = 0.015
- Срок: $T = 5$ лет
- Частота: $f = 4$ (ежеквартально)
- Кривая доходности: возрастающая от 2.5% (3М) до 3.9% (10Г)

11.2 Расчёты

Количество выплат:

$$n = \lfloor 5 \cdot 4 \rfloor = 20 \tag{59}$$

Интервал выплат:

$$\Delta t = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ лет} \tag{60}$$

Расчёт форвардной ставки (пример для периода 2):
Дано:

- $t_1 = 0.25$ лет, $r(t_1) = 2.5\%$
- $t_2 = 0.50$ лет, $r(t_2) = 2.6\%$

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{DF(t_1)/DF(t_2) - 1}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{e^{-0.025 \cdot 0.25} / e^{-0.026 \cdot 0.50} - 1}{0.50 - 0.25} \\ &= \frac{0.993769/0.987080 - 1}{0.25} \\ &= 0.027112 = 2.71\% \end{aligned} \tag{61}$$

Купонная выплата период 2:

$$C_2 = \frac{1\,000\,000 \cdot (0.02711 + 0.015)}{4} = 10\,528 \text{ EUR} \tag{62}$$

Текущая стоимость периода 2:

$$PV_2 = 10\,528 \cdot e^{-0.026 \cdot 0.50} = 10\,392 \text{ EUR} \tag{63}$$

Общая текущая стоимость:

$$PV = \sum_{i=1}^{20} C_i \cdot DF(t_i) + 1\,000\,000 \cdot DF(5.0) \approx 1\,045\,230 \text{ EUR} \tag{64}$$

Интерпретация:
Облигация с плавающей ставкой торгуется выше номинала (100%), так как:

- Дополнительный спред в 150 б.п. привлекателен
- Форвардные ставки ниже эффективной процентной ставки (форвардная + спред)
- Спред увеличивает стоимость всех будущих выплат

12 Пример расчёта 3: Портфельный VaR с историческими данными (v3.2)

12.1 Дано

- Облигация с фиксированной ставкой: $N = 1\,000\,000$ EUR, $c = 5\%$, $T = 5$ лет, ежегодно
- 251 историческое наблюдение (кривая доходности еврозоны)
- 5 сроков: 1Г, 2Г, 3Г, 4Г, 5Г
- Текущая кривая: 2.88%, 2.94%, 3.04%, 3.32%, 3.88%
- Доверительный уровень: 99%
- Временной горизонт: $h = 1$ день

12.2 Ковариационная матрица логарифмических доходностей

Рассчитано из 250 дневных логарифмических доходностей $\ell_{i,t} = \ln(DF_i(t)/DF_i(t-1))$ (в 10^{-6}):

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0.57 & 1.33 & 1.99 & 2.61 & 3.09 \\ 1.33 & 3.53 & 5.67 & 7.52 & 9.11 \\ 1.99 & 5.67 & 10.24 & 14.36 & 17.80 \\ 2.61 & 7.52 & 14.36 & 22.28 & 29.17 \\ 3.09 & 9.11 & 17.80 & 29.17 & 42.07 \end{pmatrix} \tag{65}$$

12.3 Вектор чувствительностей

Для 5-летней облигации с ежегодными выплатами (сроки выплат = рыночные опорные точки):

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} CF_1 \cdot DF(1) \\ CF_2 \cdot DF(2) \\ CF_3 \cdot DF(3) \\ CF_4 \cdot DF(4) \\ CF_5 \cdot DF(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48\,581 \\ 47\,145 \\ 45\,642 \\ 43\,782 \\ 864\,841 \end{pmatrix} \text{ EUR} \tag{66}$$

Проверка: $\sum s_i = 1\,049\,990$ EUR $= PV$ ✓

12.4 Портфельная дисперсия и VaR

$$\sigma_P^2 = \mathbf{s}^T \boldsymbol{\Sigma}\, \mathbf{s} = 36\,291\,289 \text{ EUR}^2 \tag{67}$$

$$\sigma_P = \sqrt{36\,291\,289} = 6\,024 \text{ EUR/день} \tag{68}$$

Масштабирование ($h = 1$ день):

$$\sigma_{P,1} = 6\,024 \cdot \sqrt{1} = 6\,024 \text{ EUR} \tag{69}$$

$$VaR_{99\%,\,1\text{д}} = 2.3263 \cdot 6\,024 = \mathbf{14\,014} \text{ EUR} \tag{70}$$

Для 10 дней:

$$VaR_{99\%,\,10\text{д}} = 2.3263 \cdot 6\,024 \cdot \sqrt{10} = \mathbf{44\,318} \text{ EUR} \tag{71}$$

13 Сводка формул

Таблица 1: Обзор всех основных формул (v3.2)

Показатель	**Формула**	**Единица**
Дисконтный фактор	$e^{-r(t)\cdot t}$	–
Текущая стоимость	$\sum C_i \cdot DF(t_i) + N \cdot DF(t_n)$	EUR
Форвардная ставка	$\frac{DF(t_{i-1})/DF(t_i)-1}{t_i - t_{i-1}}$	–
Чистая цена	$\frac{PV}{N} \cdot 100$	%
Грязная цена	Чистая цена $+\frac{AI}{N} \cdot 100$	%
Дюрация Маколея	$\frac{1}{PV}\sum t_i \cdot CF_i \cdot DF(t_i)$	лет
Модифицированная дюрация	$\frac{D_{\text{Мас}}}{1+r/f}$	лет
DV01	$-(PV_{r+1\text{б.п.}} - PV_r)$	EUR
Выпуклость	$\frac{PV^+ + PV^- - 2PV}{PV \cdot (\Delta r)^2}$	–
Лог-доходность DF	$\ell_{i,t} = \ln(DF_i(t)/DF_i(t-1))$	–
Ковариация	$\frac{1}{T-1}\sum(\ell_{i,t} - \bar{\ell}_i)(\ell_{j,t} - \bar{\ell}_j)$	–
Корреляция	$\Sigma_{ij}/(\sigma_i \cdot \sigma_j)$	–
Вектор чувствительностей	$s_i = \sum_k CF_k \cdot DF(t_k) \cdot w_i(t_k)$	EUR
Параметрический VaR	$z_\alpha \cdot \sigma \cdot \sqrt{h/250} \cdot 10000 \cdot \lvert DV01\rvert$	EUR
Портфельный VaR	$z_\alpha \cdot \sqrt{\mathbf{s}^T \boldsymbol{\Sigma}\, \mathbf{s}} \cdot \sqrt{h}$	EUR

Три изменённые по сравнению с v3 формулы выделены **жирным шрифтом**.

14 Литературные ссылки

- Hull, J. C. (2018). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson.
- Tuckman, B., & Serrat, A. (2011). *Fixed Income Securities*. Wiley.
- Fabozzi, F. J. (2012). *Bond Markets, Analysis, and Strategies*. Pearson.
- Jorion, P. (2006). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. McGraw-Hill.
- Alexander, C. (2008). *Market Risk Analysis, Volume IV: Value at Risk Models*. Wiley.