Моделирование временных рядов

Техническая документация · Модуль 2

ARIMA, ARIMAX, GARCH, VAR

Русский

Вольфганг Бёме

wolfgang.boehme@economic-modeling.de

www.economic-modeling.de

25 октября 2026 г.

Документация на этом сайте разработана при поддержке ИИ Claude (Anthropic).

0 Содержание

1 Обзор и работа с приложением **2**
1.1 Формат данных . . . 2
1.2 Навигация . . . 2
1.3 Рекомендуемый порядок работы . . . 2

2 Стационарность и тесты на единичный корень **3**
2.1 Расширенный тест Дики–Фуллера (ADF) . . . 3
2.2 Работа в приложении . . . 4

3 Тест Льюнга–Бокса и ARCH-LM **4**
3.1 Тест Льюнга–Бокса . . . 4
3.2 ARCH-LM тест (Энгл, 1982) . . . 4
3.3 Работа в приложении . . . 4

4 Модели ARIMA **5**
4.1 Идентификация по ACF и PACF . . . 5
4.2 Диагностика остатков . . . 5
4.3 Auto-ARIMA . . . 5
4.4 Работа в приложении . . . 6

5 ARIMAX — ARIMA с экзогенными переменными **6**
5.1 Сравнение ARIMA и ARIMAX . . . 6
5.2 Работа в приложении . . . 6

6 Модели GARCH **6**
6.1 Value-at-Risk (VaR) . . . 7
6.2 Период полураспада волатильности . . . 7
6.3 Работа в приложении . . . 7

7 Прогнозирование и доверительные интервалы **7**
7.1 Точечный прогноз . . . 8
7.2 Доверительные интервалы . . . 8

8 Rolling Forecast и качество прогноза **8**
8.1 Методология . . . 8
8.2 Меры качества прогноза . . . 8

9 Сравнение моделей: AIC и BIC **9**

10 Коинтеграция (Энгл–Грэнджер) **9**

10.1 Двухшаговая процедура Энгла–Грэнджера 10

11 Причинность по Грэнджеру **10**

11.1 F-тест 10

12 Модели VAR **11**

12.1 Выбор лага 11

12.2 Работа в приложении 11

13 Числовой пример **11**

13.1 Описание данных 12

13.2 Шаг 1: Тест на единичный корень (ADF) 12

13.3 Шаг 2: Оценка ARIMA 12

13.4 Шаг 3: ARIMAX со ставкой ЕЦБ 13

13.5 Шаг 4: GARCH на лог-изменениях 13

13.6 Шаг 5: Прогноз (3 шага) 14

13.7 Шаг 6: Причинность по Грэнджеру (лаг 2) 14

13.8 Шаг 7: Коинтеграция (Энгл–Грэнджер) 14

13.9 Шаг 8: VAR(1) 15

1 Обзор и работа с приложением

Приложение для моделирования временных рядов — это автономное HTML-приложение, работающее в браузере без установки. Оно дополняет Анализатор временных рядов (Модуль 1) продвинутыми методами моделирования.

1.1 Формат данных

Приложение принимает **CSV-файл** следующего формата:

```
Дата,Переменная_1,Переменная_2,...,Переменная_k
2020-01,1.5,0.0,...
2020-02,1.7,0.0,...
```

- Столбец 1: временная метка (дата, месяц, квартал — любой формат)
- Столбцы 2+: числовые значения временных рядов (разделитель — точка)
- Разделитель столбцов: запятая
- Заголовок: обязателен (первая строка)

1.2 Навигация

Приложение использует **боковую панель** с тремя группами:

Группа	Модули
Предпосылки	Единичный корень (ADF), Льюнг–Бокс / ARCH-LM
Одномерные	ARIMA, ARIMAX, GARCH
Прогноз и оценка	Прогноз, Rolling Forecast, Выбор модели (AIC/BIC)
Многомерные	Коинтеграция, Грэнджер, VAR

1.3 Рекомендуемый порядок работы

1. **Загрузка данных**: загрузить CSV или использовать демо-данные.
2. **Проверка единичного корня**: тест ADF — определить порядок интегрирования d.
3. **Предварительные тесты**: Льюнг–Бокс (нужен ли ARIMA?) и ARCH-LM (нужен ли GARCH?).
4. **Выбор модели**: поиск по сетке AIC/BIC — выбрать оптимальные (p, d, q).
5. **Оценка ARIMA** (при необходимости с Auto-ARIMA); проверить остатки.
6. **ARIMAX**: добавить экзогенную переменную и проверить улучшение AIC.

7. **GARCH**: если обнаружены ARCH-эффекты — оценить модель волатильности.
8. **Прогноз**: построить h-шаговый прогноз с доверительным интервалом.
9. **Rolling Forecast**: оценить качество прогноза вне выборки (RMSE, MAE, MAPE).
10. **Многомерный анализ**: коинтеграция, Грэнджер, VAR для нескольких рядов.

2 Стационарность и тесты на единичный корень

Определение 2.1 (Стационарность)**.** Временной ряд $\{Y_t\}$ называется *слабо стационарным*, если:

$$\mathrm{E}[Y_t] = \mu \quad \text{(постоянное математическое ожидание)}, \tag{1}$$

$$\mathrm{Var}(Y_t) = \sigma^2 < \infty \quad \text{(конечная постоянная дисперсия)}, \tag{2}$$

$$\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-h}) = \gamma(h) \quad \text{(зависит только от лага } h\text{, не от } t\text{)}. \tag{3}$$

Нестационарные ряды содержат *стохастический тренд* (единичный корень, $I(1)$) или детерминированный тренд. Модели ARIMA требуют стационарности после d-кратного дифференцирования.

2.1 Расширенный тест Дики–Фуллера (ADF)

Уравнение ADF-теста

$$\Delta Y_t = \alpha + \beta\, Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} \delta_i\, \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t \tag{4}$$

- **Нулевая гипотеза** H_0: $\beta = 0$ — единичный корень, $Y_t \sim I(1)$.
- **Альтернатива** H_1: $\beta < 0$ — стационарный ряд.
- Статистика теста: $\tau = \hat{\beta}/\mathrm{SE}(\hat{\beta})$ (левосторонний тест).

Уровень значимости	Критическое значение	Решение ($\tau <$ крит.)
1 %	$-3{,}43$	Стационарный (высоко значимо)
5 %	$-2{,}86$	Стационарный
10 %	$-2{,}57$	Слабо стационарный

2.2 Работа в приложении

Шаг 1: Выбрать ряд в верхней панели.
Шаг 2: Боковая панель → *Единичный корень* → нажать «Вычислить тесты».
Шаг 3: Рекомендованное d автоматически переносится в ARIMA, ARIMAX и Rolling Forecast.

3 Тест Льюнга–Бокса и ARCH-LM

3.1 Тест Льюнга–Бокса

Проверяет наличие значимой автокорреляции в данных или остатках модели.

Статистика Льюнга–Бокса

$$Q_{LB} = n(n+2)\sum_{k=1}^{m}\frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} \;\sim\; \chi^2(m) \tag{5}$$

где $\hat{\rho}_k$ — выборочная автокорреляция при лаге k, n — объём выборки. H_0: нет автокорреляции. Отклонение при $Q_{LB} > \chi^2_{m;0,95}$.

3.2 ARCH-LM тест (Энгл, 1982)

Проверяет условную гетероскедастичность (ARCH-эффекты) — основание для применения GARCH.

Процедура ARCH-LM теста

1. Получить остатки $\hat{\varepsilon}_t$ из AR-модели (или исходные данные).
2. Вспомогательная регрессия: $\hat{\varepsilon}_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1\hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \cdots + \gamma_q\hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + u_t$.
3. Статистика теста: $LM = n \cdot R^2 \;\sim\; \chi^2(q)$.

H_0: нет ARCH-эффектов (постоянная дисперсия). Отклонение при $LM > 3{,}84$ (для $q = 1$, уровень 5 %).

3.3 Работа в приложении

Боковая панель → *Льюнг–Бокс / ARCH-LM* → выбрать тип входных данных → «Вычислить тесты».
Результат: автоматическая рекомендация — нужны ли ARIMA и/или GARCH.

4 Модели ARIMA

Определение 4.1 (ARIMA(p, d, q))**.** Временной ряд Y_t следует процессу ARIMA(p, d, q), если $W_t = \Delta^d Y_t$ подчиняется стационарному процессу ARMA(p, q):

$$\boxed{W_t = c + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \, W_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \, \varepsilon_{t-j}} \tag{6}$$

где $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$.

Параметр	Название	Смысл
p	Порядок AR	Количество авторегрессионных лагов
d	Порядок интегрирования	Количество дифференцирований до стационарности
q	Порядок MA	Количество членов скользящего среднего
ϕ_i	AR-коэффициенты	Веса запаздывающих значений
θ_j	MA-коэффициенты	Веса запаздывающих ошибок
σ^2	Дисперсия ошибки	Дисперсия белого шума

4.1 Идентификация по ACF и PACF

Модель	ACF	PACF
AR(p)	Экспоненциально убывает	Обрыв после лага p
MA(q)	Обрыв после лага q	Экспоненциально убывает
ARMA(p, q)	Экспоненциально убывает	Экспоненциально убывает

4.2 Диагностика остатков

- **ACF остатков**: все столбцы должны находиться в 95%-полосе $\pm 1{,}96/\sqrt{n}$.
- **Льюнг–Бокс на остатках**: $Q_{LB} < \chi^2_{m;0,95}$ — нет оставшейся автокорреляции.
- **Нормальность**: гистограмма близка к колоколообразной; асимметрия ≈ 0, эксцесс ≈ 0.

4.3 Auto-ARIMA

Приложение выполняет поиск по сетке $p \in \{0, \ldots, 3\}$, $q \in \{0, \ldots, 3\}$ и выбирает модель с наименьшим AIC:

$$\text{AIC} = -2\,\hat{\ell} + 2k, \quad k = p + q + d + 1 \tag{7}$$

4.4 Работа в приложении

1. Боковая панель → *ARIMA* → задать p, d, q (или нажать «Auto-ARIMA»).
2. «Оценить» → уравнение модели, показатели качества, график подгонки и диагностика остатков.
3. Проверить ACF остатков: красные столбцы вне полосы → увеличить p или q.

5 ARIMAX — ARIMA с экзогенными переменными

Определение 5.1 (ARIMAX(p, d, q))**.** Расширение ARIMA за счёт регрессионного члена $\beta\, X_t$:

$$\Delta^d Y_t = c + \sum_{i=1}^{p} \phi_i\, \Delta^d Y_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \theta_j\, \varepsilon_{t-j} + \beta\, \Delta^d X_t + \varepsilon_t \tag{8}$$

- X_t: экзогенная (объясняющая) переменная — также дифференцируется d раз.
- β: показывает влияние единичного изменения $\Delta^d X_t$ на $\Delta^d Y_t$.
- **Применение**: инфляция и процентная ставка, ВВП и госрасходы, продажи и реклама.

5.1 Сравнение ARIMA и ARIMAX

Приложение автоматически вычисляет улучшение AIC:

$$\Delta\text{AIC} = \text{AIC}_{\text{ARIMA}} - \text{AIC}_{\text{ARIMAX}} \tag{9}$$

$\Delta\text{AIC} > 2$: экзогенная переменная значимо улучшает объяснительную силу модели.

5.2 Работа в приложении

1. Боковая панель → *ARIMAX* → задать p, d, q и выбрать переменную X.
2. «Оценить» → уравнение с коэффициентом β, сравнение ΔAIC, 4 графика.
Примечание: Y и X должны иметь одинаковую длину; более короткий ряд обрезается.

6 Модели GARCH

Финансовые доходности демонстрируют *кластеризацию волатильности*: периоды высокой волатильности чередуются с периодами низкой. Это нарушает предположение о постоянной дисперсии.

Определение 6.1 (GARCH(p, q))**.**

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t \, z_t, \quad z_t \sim \text{WN}(0, 1) \tag{10}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \, \sigma_{t-j}^2 \tag{11}$$

где $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$.

Параметр	Название	Смысл
ω	Константа	Долгосрочный уровень дисперсии
α_i	Коэффициент ARCH	Краткосрочная реакция на шоки (ε^2)
β_j	Коэффициент GARCH	Персистентность волатильности
$\alpha + \beta$	Персистентность	Близко к 1: очень долгая кластеризация волатильности

6.1 Value-at-Risk (VaR)

$$\text{VaR}_{95\%,t} = -1{,}645 \, \hat{\sigma}_t \tag{12}$$

Интерпретация: с вероятностью 95 % убыток в период t не превысит $|\text{VaR}_{95\%}|$.

6.2 Период полураспада волатильности

$$t_{1/2} = \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(\alpha + \beta)} \tag{13}$$

6.3 Работа в приложении

1. Боковая панель → *GARCH* → задать p, q и тип входных данных (для финансовых данных рекомендуются лог-доходности).
2. «Оценить» → уравнение дисперсии, условная волатильность, VaR и персистентность.
Совет: предварительно выполнить тест ARCH-LM, чтобы убедиться в необходимости GARCH.

7 Прогнозирование и доверительные интервалы

На основе оценённой модели ARIMA строятся h-шаговые прогнозы.

7.1 Точечный прогноз

Рекурсивное прогнозирование на дифференцированном ряде:

$$\hat{W}_{T+h|T} = \hat{c} + \hat{\phi}_1 \hat{W}_{T+h-1|T} + \cdots + \hat{\phi}_p \hat{W}_{T+h-p|T} \tag{14}$$

Обратное преобразование (накопление разностей) даёт прогноз в исходных единицах:

$$\hat{Y}_{T+h} = Y_T + \sum_{s=1}^{h} \hat{W}_{T+s|T} \tag{15}$$

7.2 Доверительные интервалы

Стандартная ошибка h-шагового прогноза возрастает с горизонтом:

$$\mathrm{SE}_h = \hat{\sigma}\sqrt{h} \tag{16}$$

Доверительный интервал уровня $(1-\alpha)$:

$$\hat{Y}_{T+h} \pm z_{1-\alpha/2}\,\mathrm{SE}_h \tag{17}$$

Доступные уровни: 80 % ($z = 1{,}282$), 90 % ($z = 1{,}645$), 95 % ($z = 1{,}960$).

8 Rolling Forecast и качество прогноза

8.1 Методология

При методе скользящего окна модель переоценивается в каждый момент времени t на окне фиксированного размера w и строится одношаговый прогноз:

$$\hat{Y}_{t+1} = f\big(Y_{t-w+1}, \ldots, Y_t\big) \tag{18}$$

Это исключает *смещение заглядывания вперёд* и даёт реалистичную оценку качества прогноза.

8.2 Меры качества прогноза

Меры качества прогноза

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{T_{\text{test}}} \sum_{t} \left(Y_t - \hat{Y}_t\right)^2} \tag{19}$$

$$\text{MAE} = \frac{1}{T_{\text{test}}} \sum_{t} \left|Y_t - \hat{Y}_t\right| \tag{20}$$

$$\text{MAPE} = \frac{100}{T_{\text{test}}} \sum_{t} \left|\frac{Y_t - \hat{Y}_t}{Y_t}\right| \% \tag{21}$$

$$\text{Bias} = \frac{1}{T_{\text{test}}} \sum_{t} \left(\hat{Y}_t - Y_t\right) \tag{22}$$

- **RMSE**: сильнее штрафует крупные отдельные ошибки (за счёт возведения в квадрат).
- **MAE**: устойчивее к выбросам; легче интерпретировать.
- **MAPE**: относительная ошибка в процентах; не зависит от масштаба.
- **Bias** > 0: систематическое завышение; **Bias** < 0: систематическое занижение.

9 Сравнение моделей: AIC и BIC

Информационные критерии

$$\text{AIC} = -2\,\hat{\ell} + 2k \tag{23}$$

$$\text{BIC} = -2\,\hat{\ell} + k\,\ln(n) \tag{24}$$

где $\hat{\ell}$ — максимизированное логарифмическое правдоподобие, k — количество свободных параметров, n — объём выборки.

- **Оптимум**: модель с *наименьшим* AIC или BIC.
- **BIC vs. AIC**: BIC сильнее штрафует за количество параметров ($\ln n > 2$ при $n > 7$) и выбирает более экономные модели.
- **Практическое правило**: $\Delta\text{AIC} > 2$ означает значимое улучшение.

10 Коинтеграция (Энгл–Грэнджер)

Определение 10.1 (Коинтеграция). Два ряда $I(1)$ — Y_t и X_t — *коинтегрированы*, если линейная комбинация $u_t = Y_t - \alpha - \beta X_t$ стационарна ($I(0)$).

10.1 Двухшаговая процедура Энгла–Грэнджера

Процедура теста Энгла–Грэнджера

Шаг 1: МНК-регрессия:

$$Y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\, X_t + \hat{u}_t \tag{25}$$

Шаг 2: тест ADF на остатки $\hat{u}_t$ (без константы):

$$\Delta \hat{u}_t = \gamma\, \hat{u}_{t-1} + \sum_{k=1}^{m} \delta_k\, \Delta \hat{u}_{t-k} + \varepsilon_t \tag{26}$$

Статистика теста: $\tau_{EG} = \hat{\gamma}/\mathrm{SE}(\hat{\gamma})$

Уровень значимости	**Критическое значение (Маккиннон 1991,** $n \geq 100$**)**
1 %	$-3{,}90$
5 %	$-3{,}34$
10 %	$-3{,}04$

Экономическая интерпретация: коинтегрированные ряды возвращаются к общему равновесию после отклонений. Это основа для:

- **VECM** (модель коррекции ошибок)
- **Парной торговли** (статистический арбитраж)

11 Причинность по Грэнджеру

Определение 11.1 (Причинность по Грэнджеру)**.** *X_t причинно предшествует по Грэнджеру Y_t*, если прошлые значения X значимо улучшают прогноз Y сверх информации из собственных лагов Y.

Важное замечание

Причинность по Грэнджеру означает **прогностическую полезность**, а *не* реальную причинно-следственную связь в философском смысле. Третьи переменные могут создавать ложную причинность.

11.1 F-тест

F-тест Грэнджера при лаге m

$$\text{Ограниченная модель (AR):} \quad Y_t = c + \sum_{k=1}^{m} \phi_k Y_{t-k} + \varepsilon_t^r \tag{27}$$

$$\text{Неограниченная модель (VAR):} \quad Y_t = c + \sum_{k=1}^{m} \phi_k Y_{t-k} + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k X_{t-k} + \varepsilon_t^u \tag{28}$$

$$F = \frac{(\mathrm{SSR}_r - \mathrm{SSR}_u)/m}{\mathrm{SSR}_u/(n-2m-1)} \sim F(m,\, n-2m-1) \tag{29}$$

H_0: $\gamma_1 = \cdots = \gamma_m = 0$ (нет причинности по Грэнджеру). Отклонение при $F > F_{\text{крит}}$.

12 Модели VAR

Определение 12.1 (VAR(p)-модель)**.** Векторная авторегрессионная модель порядка p для k-мерного процесса $\mathbf{Y}_t = (Y_{1t}, \ldots, Y_{kt})'$:

$$\boxed{\mathbf{Y}_t = \mathbf{c} + \mathbf{A}_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \cdots + \mathbf{A}_p \mathbf{Y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t} \tag{30}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathrm{WN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Каждое уравнение оценивается отдельно методом МНК (эффективно при одинаковых регрессорах). Модель содержит $k(1 + kp)$ параметров.

12.1 Выбор лага

Оптимальный лаг определяется по AIC или BIC:

$$\mathrm{AIC}(p) = -2\hat{\ell} + 2k^2 p, \qquad \mathrm{BIC}(p) = -2\hat{\ell} + k^2 p \ln(n) \tag{31}$$

12.2 Работа в приложении

1. Боковая панель → *VAR* → выбрать переменные с помощью флажков (мин. 2).
2. Дополнительно: нажать «Оптимальный лаг (AIC/BIC)» → лучший p подставляется автоматически.
3. «Оценить VAR» → матрицы коэффициентов, графики подгонки и кросс-корреляция.

13 Числовой пример: макроданные еврозоны

13.1 Описание данных

Используем демо-данные с месячной частотой (2010–2024):

Переменная	Среднее	Ст. откл.	Единица
Инфляция (Y)	3,08	1,71	% год.
Ставка ЕЦБ (X)	1,04	1,52	%

Для расчётов используются 12 наблюдений (2020–2021):

$$\mathbf{Y}_{\text{инфл}} = (1{,}5;\ 1{,}7;\ 2{,}0;\ 2{,}3;\ 2{,}8;\ 3{,}5;\ 4{,}2;\ 5{,}1;\ 5{,}8;\ 6{,}1;\ 5{,}5;\ 4{,}8)$$

$$\mathbf{X}_{\text{ставка}} = (0{,}0;\ 0{,}0;\ 0{,}0;\ 0{,}0;\ 0{,}0;\ 0{,}5;\ 1{,}5;\ 2{,}5;\ 3{,}5;\ 4{,}0;\ 4{,}0;\ 3{,}75)$$

13.2 Шаг 1: Тест на единичный корень (ADF)

Пример: ADF-тест на инфляцию

Уравнение теста: $\Delta Y_t = \alpha + \beta\, Y_{t-1} + \varepsilon_t$

Оценка МНК:

$$\hat{\beta} = -0{,}1194, \quad \text{SE}(\hat{\beta}) = 0{,}0915$$

$$\tau_{ADF} = \frac{-0{,}1194}{0{,}0915} = -1{,}305$$

Результат: $\tau_{ADF} = -1{,}305 > -2{,}86$ (крит. 5 %) $\Rightarrow$ H_0 не отклоняется.
Вывод: ряд инфляции **нестационарен** ($I(1)$) $\Rightarrow$ рекомендуется $d = 1$.

13.3 Шаг 2: Оценка ARIMA

Пример: Оценка ARIMA

Дифференцированный ряд: $W_t = \Delta Y_t$

Матрица регрессоров (первые разности, лаг 1):

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & W_1 \\ 1 & W_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & W_{10} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} W_2 \\ W_3 \\ \vdots \\ W_{11} \end{pmatrix}$$

Оценка МНК $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$:

$$\hat{c} = -0{,}0925, \quad \hat{\phi}_1 = 1{,}0063$$

Уравнение модели: $\Delta Y_t = -0{,}0925 + 1{,}0063\, \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$

Показатели качества:

RMSE	R^2	AIC	BIC
0,3655	0,6025	14,25	15,16

13.4 Шаг 3: ARIMAX со ставкой ЕЦБ

Пример: Оценка ARIMAX

Расширенная матрица с ΔX_t (изменение ставки):

$$\hat{c} = -0{,}0877, \quad \hat{\phi}_1 = 0{,}6322, \quad \hat{\beta}_Z = 0{,}3862$$

Уравнение модели:

$$\Delta Y_t = -0{,}0877 + 0{,}6322\,\Delta Y_{t-1} + 0{,}3862\,\Delta X_t + \varepsilon_t$$

Интерпретация: повышение ставки на 1 п.п. сопровождается ростом инфляции на $0{,}39$ п.п. (при прочих равных, одновременно).

R^2	AIC	ΔAIC vs. ARIMA
0,6388	16,63	$-2{,}38$

При $n = 12$ экзогенная переменная не улучшает AIC. При $n \geq 60$ эффект, как правило, положительный.

13.5 Шаг 4: GARCH на лог-изменениях

Пример: Оценка GARCH

Лог-изменения инфляции: $r_t = \ln(Y_t / Y_{t-1})$

Параметры (итерационный метод моментов):

$$\hat{\omega} = 0{,}001331, \quad \hat{\alpha} = 0{,}15, \quad \hat{\beta} = 0{,}75$$

Уравнение дисперсии:

$$\hat{\sigma}_t^2 = 0{,}001331 + 0{,}15\,r_{t-1}^2 + 0{,}75\,\hat{\sigma}_{t-1}^2$$

Ключевые показатели:

$$\text{Персистентность: } \hat{\alpha} + \hat{\beta} = 0{,}90$$

$$\text{Период полураспада: } t_{1/2} = \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}90} \approx 6{,}6 \text{ периодов}$$

$$\text{Текущая волатильность: } \hat{\sigma}_{12} = 0{,}1296$$

$$\text{VaR}_{95\%} : -1{,}645 \times 0{,}1296 = -0{,}2131$$

13.6 Шаг 5: Прогноз (3 шага)

Пример: Прогноз ARIMA

Последнее значение разности: $W_{11} = Y_{11} - Y_{10} = 4{,}8 - 5{,}5 = -0{,}7$

Рекурсивный расчёт:

$$\hat{W}_{13} = -0{,}0925 + 1{,}0063 \times (-0{,}7) = -0{,}7969$$
$$\hat{Y}_{13} = 4{,}8 + (-0{,}7969) = 4{,}003$$

Шаг	Прогноз	НГ (95 %)	ВГ (95 %)
$t+1$	4,0031	3,2867	4,7196
$t+2$	3,1088	2,0956	4,1220
$t+3$	2,1163	0,8754	3,3573

Доверительная полоса расширяется: $\hat{\sigma}\sqrt{h} = 0{,}3655\sqrt{h}$.

13.7 Шаг 6: Причинность по Грэнджеру (лаг 2)

Пример: Тест Грэнджера — ставка ЦБ → инфляция

Ограниченная модель (AR(2) на инфляцию): $\text{SSR}_r = 0{,}4772$
Неограниченная модель (AR(2) + 2 лага ставки): $\text{SSR}_u = 0{,}1491$

$$F = \frac{(0{,}4772 - 0{,}1491)/2}{0{,}1491/(10 - 2 \cdot 2 - 1)} = \frac{0{,}1641}{0{,}0298} = 5{,}50$$

Критическое значение: $F_{2;5;0{,}05} \approx 5{,}79$.
$F = 5{,}50 < 5{,}79$ — незначимо на уровне 5 %, значимо на уровне 10 %.
Замечание: при $n = 12$ мощность теста мала. При большей выборке ставка ЦБ, как правило, является значимым грэнджеровским предиктором инфляции.

13.8 Шаг 7: Коинтеграция (Энгл–Грэнджер)

Пример: Коинтеграция инфляции и ставки ЦБ

Шаг 1: МНК-регрессия $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$:

$$\hat{\alpha} = 2{,}3013, \quad \hat{\beta} = 0{,}8954, \quad R^2 = 0{,}8852$$

Равновесное соотношение:

$$\hat{Y}_t = 2{,}30 + 0{,}90\, X_t$$

Шаг 2: ADF на остатки $\hat{u}_t$:

$$\tau_{EG} = -0{,}9504$$

Крит. значение (5 %): $-3{,}34$.
$\tau_{EG} = -0{,}95 > -3{,}34 \Rightarrow H_0$ не отклоняется $\Rightarrow$ **коинтеграция не подтверждена**.

Примечание: несмотря на высокое $R^2 = 0{,}885$, налицо *ложная регрессия* — классический пример важности теста на коинтеграцию.

13.9 Шаг 8: VAR(1)

Пример: Модель VAR

Система уравнений ($k = 2$, $p = 1$):

$$\hat{Y}_{1t} = -0{,}882 + 1{,}636\, Y_{1,t-1} - 0{,}796\, Y_{2,t-1}$$
$$\hat{Y}_{2t} = -1{,}465 + 0{,}796\, Y_{1,t-1} + 0{,}228\, Y_{2,t-1}$$

где Y_1 = инфляция, Y_2 = ставка ЦБ.

Интерпретация уравнения 1 (инфляция):
$\hat{\phi}_{11} = 1{,}636$: сильная персистентность инфляции.
$\hat{\phi}_{12} = -0{,}796$: более высокая ставка снижает инфляцию в следующем периоде.

Интерпретация уравнения 2 (ставка ЦБ):
$\hat{\phi}_{21} = 0{,}796$: рост инфляции повышает ставку (эффект правила Тейлора).

13 Краткий справочник по модулям

Модуль	Назначение	Раздел
Единичный корень	Проверка стационарности, определение d	Предпосылки
Льюнг–Бокс/ARCH	Нужны ли ARIMA/GARCH?	Предпосылки
ARIMA	Одномерное моделирование и прогноз	Одномерные
ARIMAX	ARIMA + экзогенная переменная	Одномерные
GARCH	Моделирование волатильности, VaR	Одномерные
Прогноз	h-шаговый прогноз + доверительный интервал	Прогноз
Rolling Forecast	Out-of-sample RMSE/MAE/MAPE	Прогноз
Выбор модели	Поиск по сетке AIC/BIC	Прогноз
Коинтеграция	Долгосрочное равновесие	Многомерные
Грэнджер	Прогностическая причинность X $\rightarrow$ Y	Многомерные
VAR	Совместное моделирование k рядов	Многомерные